Solch ein relativer CW ist eindeutig bis auf Homotopie-Äquivalenz:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X[n] \arrow[dd, shift right, "\simeq"'] \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X[n]' \arrow[uu, shift right] \end{tikzcd}$$

Wir nennen $X \xrightarrow{i_n} X[n]$ den <u>n-te POSTNIKOV-Schnitt</u> von X.

<u>Beweis</u>: die Existenz von $X[n]$ ist genau 3.18; Die Eindeutigkeit folgt aus 3.17: $[X[n], X[n]'] \xrightarrow[\cong]{i_n^*} [X, X[n]']$. #

<u>6.10 Definition + Lemma</u>: Sei X ein 0-zus. Raum, und $n \geq 1$. Seien $X \xrightarrow{i_n} X[n]$ und $X \xrightarrow{i_{n+1}} X[n+1]$ Postnikov-Schnitte von X. Dann existiert eine (bis auf Homotopie unter X) eindeutige Abbildung $p_{n+1} : X[n+1] \to X[n]$ mit $i_n = p_{n+1} \circ i_{n+1}$. Wir können induktiv i_{n+1} und p_{n+1} so wählen, dass p_{n+1} für alle $n \geq 1$ eine <u>Faserung</u> ist. Der Turm (mit p_i Faserung) heißt der <u>Postnikov-Turm</u> von X.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \vdots \\ & X[3] \arrow[d, "p_3"] \\ & X[2] \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "i_1"] \arrow[ur, bend left, "i_2"] \arrow[uur, bend left, "i_3"] \arrow[uuur, bend left, "\cdots"] & X[1] \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u>: die Existenz solch einer Ab. $p_{n+1} : X[n+1] \to X[n]$ folgt wieder aus 3.17: $[X[n+1], X[n]] \xrightarrow{i_{n+1}^*} [X, X[n]]$, $p_{n+1} \mapsto i_n$. Ersetze dann p_{n+1} durch eine Faserung wie in 2.24:

$$\begin{tikzcd} & X[n+1] \arrow[r, "S"] \arrow[d, "p_{n+1}"] & E(p_{n+1}) \arrow[dl, "p"] \\ X \arrow[ur, "i_{n+1}"] \arrow[r, "i_n"] & X[n] & \end{tikzcd}$$

#

<u>6.11 Satz</u>: Der Postnikov Turm eines 0-zus. Raumes X hat die folgenden Eigenschaften:

(a) $X[1]$ ist ein $K(\pi_1 X, 1)$

(b) Die Faser von $p_{n+1} : X[n+1] \to X[n]$ ist ein $K(\pi_{n+1} X, n+1)$

(c) Die Abbildungen i_n induzieren eine schwache Homotopie-Äquivalenz $i : X \longrightarrow \lim\limits_n X[n]$

($\lim X[n]$ mit der Teilraumtopologie des Produktes $\prod_n X[n]$).

Beweis: (a) ist die Definition, (b) folgt aus der lange exakte Homotopiefolge der Faserung p_{n+1}.

(c) Für einen Turm von Serre-Faserungen $\cdots \to X_{n+1} \to X_n \to \cdots \to X_0$ von punktierten Räumen hat man eine kurze exakte Folge

$$0 \to \lim{}^1 \pi_{i+1} X_n \to \pi_i(\lim X_n) \xrightarrow{\alpha} \lim \pi_i(X_n) \to 0$$

(α durch $\alpha_n : \lim X_n \to X_n$ induziert), siehe zum Beispiel Hatcher, S. 411). In unserem Fall, für i gegeben gilt natürlich die Mittag-Leffler Eigenschaft:

$$\pi_i(X[i+m]) \xrightarrow{\cong} \pi_i(X[i]) \quad \forall\, m \geq 0$$

also $\lim\limits_n{}^1 \pi_{i+1} X[n] = 0 \quad \forall\, i \geq 1$, und α ist ein Iso.

Die Verknüpfung: $\pi_i X \xrightarrow{p_*} \pi_i(\lim X_n) \xrightarrow{\alpha} \lim \pi_i(X_n)$ ist ein Iso, da $p_{n_*} : \pi_i X \to \pi_i(X_n)$ ein Iso für $n \geq i$ ist. Also ist $p_* : \pi_* X \to \pi_*(\lim X_n)$ ein Iso. #

6.12 Theorem (Hurewicz-Satz modulo Serre-Klassen).
Sei X ein 1-zusammenhängender Raum, $n \geq 2$, und sei C eine Serre-Klasse aus Beispiel 1.3. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\pi_i(X) \in C$ für $1 \leq i < n$

(b) $H_i(X;\mathbb{Z}) \in C$ für $1 \leq i < n$

Wenn eine von diese Aussagen gilt, so folgt: der Hurewicz Hom.

$$h_i : \pi_i(X) \to H_i(X;\mathbb{Z})$$

ist ein C-Isomorphismus für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\pi_i = \pi_i X$. Wir haben aus 6.8: $H_j(K(\pi_i, i)) \in C$ für alle $j \geq 1$ und $2 \leq i \leq n-1$. Der Raum $X[n-1]$ wird induktiv aus $K(\pi_2, 2), \ldots, K(\pi_{n-1}, n-1)$ gebaut, also aus 6.7 folgt: $H_j(X[n-1]) \in C \;\; \forall\, j \geq 1$.
Die Abbildung $X \to X[n-1]$ induziert einen Iso auf H_j für $j \leq n-1$, also $H_j(X) \in C$ für $1 \leq j \leq n-1$. Das ist (b).

Sei (b) angenommen. Wir beweisen per Induktion auf $2 \leq k \leq n$, dass $h_k : \pi_k(X) \to H_k(X;\mathbb{Z})$ ein $\mathcal{C}$-Iso ist (woraus folgt: $H_k(X;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C} \Rightarrow \pi_k(X) \in \mathcal{C}$).

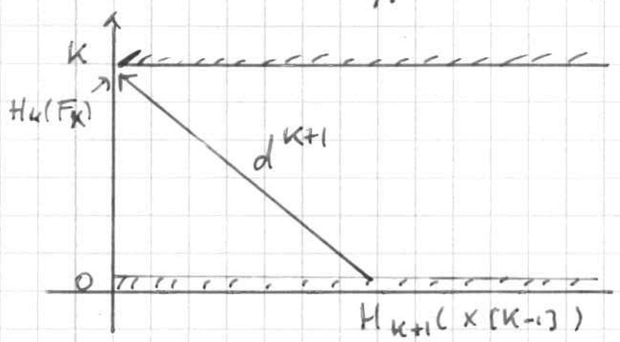
<u>$k=2$</u>: Da X 1-zus. hängend ist, folgt das aus Hurewicz 3.29.

Sei <u>$3 \leq k \leq n$</u> und angenommen, dass

$$h_j : \pi_j(X) \to H_j(X;\mathbb{Z}) \quad \text{ein } \mathcal{C}\text{-Iso für } 2 \leq j \leq k-1 \text{ ist.}$$

Insbesondere gilt $\pi_j(X) \in \mathcal{C}$ für $2 \leq j \leq k-1$, also aus dem Beweis (a) $\Rightarrow$ (b) folgt: $H_\ell(X[k-1]) \in \mathcal{C} \;\; \forall \ell \geq 1$.

Wir betrachten die Faserung $X[k] \xrightarrow{\gamma_k} X[k-1]$ mit Faser F_k (ein $K(\pi_k, k)$). Die Serre-sp. Seq. von γ_k hat d^{k+1} als erste nicht trivialen differential (von E^2 ab), weil $H_i(F_k)=0$, $0<i<k$:



Diese Differential ist also Teil einer exakten Folge:

(Edge $= i_*$, $i : F_k \hookrightarrow X[k]$ inkl. Faser)

$$H_{k+1}(X[k-1]) \xrightarrow{d^{k+1}} H_k(F_k) \longrightarrow H_k(X[k]) \xrightarrow{\gamma_{k*}} H_k(X[k-1]) \to 0$$

Da $H_{k+1}(X[k-1])$ (und dann auch Bild $d^k = \ker i_*$) und $H_k(X[k-1])$ ($\cong \operatorname{coker} i_*$) beide in $\mathcal{C}$ sind, ist $i_* : H_k(F_k) \to H_k(X[k])$ ein $\mathcal{C}$-Iso.

Andererseits haben wir durch Natürlichkeit von Hurewicz ein Kom. Diag.:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_k(F_k) & \xrightarrow{\cong} & \pi_k(X[k]) & \xleftarrow{\cong} & \pi_k(X) \\
① \cong \downarrow h_k & & \downarrow h_k & ③ & \downarrow h_k \\
H_k(F_k) & \xrightarrow{②} & H_k(X[k]) & \xleftarrow{\cong} & H_k(X)
\end{array}$$

① ist ein Iso dank 3.29 (Hurewicz)

② ist ein $\mathcal{C}$-Iso

③ sind Iso's weil $(X[k], X)$ hat Zellen von Dimension $\geq k+2$

$\Rightarrow h_k : \pi_k(X) \to H_k(X;\mathbb{Z})$ ist auch ein $\mathcal{C}$-Iso.

#

<u>6.13 Bemerkung</u> (a) Beispiel 3.41 zeigt, dass 6.12 nicht notwendigerweise für 0-zusammenhängenden Räume gilt. Aber es gilt in genau dieser Formulierung für ein <u>einfachen</u> 0-zus. Raum X. Wenn X einfach ist (und genau dann) kann man die Faserung $K(\pi_n X, n) \to X[n] \xrightarrow{r_n} X[n-1]$ für $n \geq 2$ einmal "entschleifen": es existiert eine Abbildung

$k_n : X[n-1] \to K(\pi_n X, n+1)$ so dass

$$K(\pi_n X, n) = \Omega K(\pi_n X, n+1) \to X[n] \to X[n-1] \xrightarrow{k_n} K(\pi_n X, n+1)$$

eine Faserfolge ist. Die Klasse $k_n \in H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n X)$, $n \geq 2$ heißt die n-te <u>k-Invariante von X</u> (so dass ein einfacher X durch seine Homotopiegruppen und k-Invariante bis auf schwache Homotopie-Äquivalenz bestimmt ist).

In diesem Fall gilt für die Faserung r_n, dass $\pi_1 X$ trivial auf $\pi_n(F_n)$ (F_n = Faser r_n) operiert. Da F_n ein $K(\pi_n, n)$ ist, operiert $\pi_1 X$ also trivial auf F_n ($u \simeq id : F_n \circlearrowleft$), also trivial auf $H_*(F_n; \mathbb{Z})$. Vergleiche Hatcher, 410-415.
Also gilt unser Beweis von 6.12 genauso in diesem Fall.

(b) In 6.12 verlangen wir nur von der Serre Klasse $\mathcal{C}$, dass
- (i) (6.4) gilt
- (ii) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow H_i(K(A,1); \mathbb{Z}) \in \mathcal{C} \quad \forall i \geq 1$.

Als Korollar von 6.12 erhalten wir also das tiefe Ergebnis:

<u>6.14 Theorem</u>: Sei X ein 1-zusammenhängender Raum, $n \geq 2$.
- (a) $\pi_i X \in \mathcal{FG} \ \forall 2 \leq i \leq n \iff H_i X \in \mathcal{FG} \ \forall 2 \leq i \leq n$
- (b) $\pi_i X \in \mathcal{Fin} \ \forall 2 \leq i \leq n \iff H_i X \in \mathcal{Fin} \ \forall 2 \leq i \leq n$.
- (c) Ist X ein endlicher, 1-zus. (oder einfacher) CW-Komplex, so ist $\pi_i X$ für alle $i \geq 0$ endlich erzeugt!

Insbesondere ist $\pi_n(S^m)$ eine endlich-erzeugte Gruppe;
Wir haben also eine exakte Folge $0 \to T \to \pi_n(S^m) \to \mathbb{Z}^k \to 0$
mit $k = \text{Rank}(\pi_n(S^m)) = \dim_{\mathbb{Q}}(\pi_n(S^m) \otimes \mathbb{Q})$, und
T die (endliche) Torsions-Untergruppe von $\pi_n(S^m)$. Sei p Prim.
Wir nennen $T \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ $(\cong \mathbb{Z}/p^{i_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p^{i_2})$ die p-primäre
Komponente von $\pi_n(S^m)$. Hier eine einfache Folgerung von 6.12:

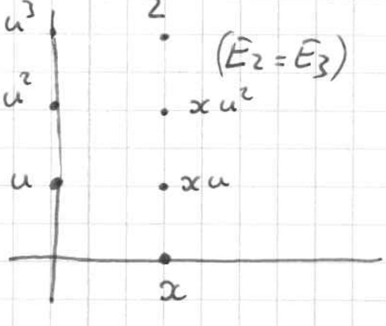
<u>6.15 Theorem</u>: Sei p eine Primzahl. Die p-Primäre Komponente von $\pi_m(S^3)$ ist 0 für $0 \leq m < 2p$ und $\mathbb{Z}/p$ für $m = 2p$. Für alle $m \geq 4$ ist $\pi_m(S^3)$ endlich.

<u>Beweis</u>: Betrachte $S^3 \xrightarrow{i_3} K(\mathbb{Z},3)$, und sei $E = \text{hofib}(i_3)$ die Homotopiefaser von i_3, $E \xrightarrow{\varphi} S^3$. Die LEF der Faserung impliziert, dass $\varphi: \pi_m E \to \pi_m(S^3)$ ein Iso für $m \geq 4$, und dass E 3-zusammenhängend ist.

Wir haben eine Faserung (bis auf Homotopie) $\underset{\mathbb{C}P^\infty}{\overset{}{K(\mathbb{Z},2)}} \to E \to S^3$.

Wir berechnen $H^*(E;\mathbb{Z})$ mit der Serre Spseq:

$$E_2^{*,*} = H^*(S^3;\mathbb{Z}) \otimes H^*(K(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z}) = E_{\mathbb{Z}}(x) \otimes \mathbb{Z}[u]$$



Da E 3-zusammenhängend ist gilt $H^3(E;\mathbb{Z}) = 0$ und x muss von d_3 getroffen werden:

$$d_3(u) = \pm x.$$

Aus der multiplikativen Struktur folgt dann $d_3(u^n) = n u^{n-1} \cdot x$,
also

$$E_4^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z} & (p,q) = (0,0) \\ \mathbb{Z}/n & (p,q) = (3, 2n-2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = E_\infty^{p,q}$$

Also $H^m(E;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0 \\ \mathbb{Z}/n & m = 2n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Wir wissen dass $H_m(E;\mathbb{Z})$ $\forall m$ eine endlich-erzeugte Abelsche Gruppe ist; es folgt aus Universellen Koeffizienten für

Kohomologie, dass $\mathrm{Ext}\,(H_{m-1}(E;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^m(E;\mathbb{Z})$
ein Iso für alle $m \geq 2$ ist, also

$$H_m(E;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & m=0 \\ \mathbb{Z}/n & m=2n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \Rightarrow H_m(E;\mathbb{Z}) \in \mathcal{F}in \quad \forall\, m \geq 1.$$

Aus 6.12 folgt also $\underset{\forall m \geq 4}{\pi_m(S^3) \cong \pi_m(E)} \underset{\forall m}{\in \mathcal{F}in}$.

Sei nun $\mathcal{P} = \{ \ell \in \mathbb{N} \text{ prim} \mid \ell \neq p \}$.
Dann gilt $H_m(E;\mathbb{Z}) \in \mathcal{F}in_{\mathcal{P}} \quad \forall\ 1 \leq m < 2p$.
Also $\pi_m(E) \in \mathcal{F}in_p \quad \forall\ 1 \leq m < 2p$ und

$$h_{2p} : \pi_{2p}(E) \to H_{2p}(E;\mathbb{Z})$$

ist ein $\mathcal{F}in_{\mathcal{P}}$-Iso; Also ist die p-primäre Komponenten von $\pi_{2p}(E)$ und $H_{2p}(E;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2p$ Isomorph. Das Theorem folgt aus $\pi_m(S^3) \cong \pi_m(E)$ für $m \geq 4$. #

<u>6.16 Korollar</u>: $\pi_1^s \cong \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2$.

<u>6.17 Bemerkung</u>: Aus 6.15 folgt also, dass $\pi_m(S^3)$ (und also auch $\pi_m S^2$) für unendlich viele Werte von m nicht 0 ist !! Der Beweis über die Endlichkeit von $\pi_m(S^3)$, $m>3$ kann man für ungerad-dimensionale Sphären verallgemeinern.

<u>6.18 Theorem</u>: Sei $n \geq 1$, und $i_n : S^n \to K(\mathbb{Z},n)$ der n-te Postnikov Schritt von S^n, also ein Erzeuger von $\pi_n(K(\mathbb{Z},n))$. Wir haben einen Induziert Iso $i_n^* : H^n(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^n(S^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ und sei $x_n \in H^n(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q})$ die Klasse, die ein gewählten Erzeuger von $H^n(S^n;\mathbb{Q})$ entspricht. Wir haben Isomorphismen von $\mathbb{Q}$-Algebren

$$H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} E_{\mathbb{Q}}(x_n) & n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Q}[x_n] & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

<u>Beweis</u>: Aufgabe 13.4. #