Licence PC2 2005/2006

Examen

24 janvier 2006

durée 3 heures

On sera attentif à la précision de la rédaction et à la présentation. Les résultats devront toujours être justifiés en quelques mots.

Documents et calculettes non autorisés

Exercice 1

Soit f la fonction

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$$

1.– Trouver l'ensemble de définition de la fonction f

2.– Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

3.– Montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur

$$D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} =]0, +\infty[\times] - \infty, +\infty[$$

4.– Étudier les extrema éventuels de f.

Exercice 2

Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$

$$\omega = y(1 + z(x, y))dx + x(1 + z(x, y))dy$$

où $z = z(x, y)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.– Quelle relation doit vérifier la fonction z pour que ω soit fermée dans $\mathbb{R}^2$, on notera (E) cette relation.

2.– Soit $h(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, Montrer que si

$$z(x, y) = h(xy)$$

alors z vérifie la relation $(E) : x\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3.– On prend

$$z(x,y) = \frac{xy}{1+(xy)^2}$$

montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Calculer dans ce cas l'intégrale curviligne, $\displaystyle\int_\gamma \omega$, où (γ) est le cercle

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (\gamma)$$

orienté dans le sens direct, que l'on dessinera.

Exercice 3

On considère le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-1 \geq 0,\ x^2+y^2-1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

1.– Dessiner le domaine D

2.– Calculer la valeur de l'intégrale

$$K = \iint_D (x-y)dxdy$$

3.– Retrouver ce résultat à l'aide de la formule de Green-Riemann en utilisant la forme différentielle

$$\omega = \frac{1}{2}y^2dx + \frac{1}{2}x^2dy$$

Exercice 4

Soit a et b des réels non nuls et soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\right\}$$

que l'on dessinera.

Calculer

$$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

On pourra utiliser le changement de variable

$$x = x(r,\theta) = a \cdot r\cos\theta, \quad y = y(r,\theta) = b \cdot r\sin\theta$$