# Licence PC2 2005/2006

Examen

31 août 2006

durée 2 heures

**Traiter trois des quatre exercices ci-dessous, en indiquant les numéros de ceux que vous avez choisis**.

On sera attentif à la précision de la rédaction et à la présentation. Les résultats devront toujours être justifiés en quelques mots.

## Documents et calculettes non autorisés

## Exercice 1

Soit $f$ la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \end{array}$$

**1.**– Trouver l'ensemble de définition de la fonction $f$

**2.**– $f$ admet-elle une limite en $(0,0)$ et peut-elle être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

**3.**– Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 2

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$.

**1.**– Dessiner le cercle $\mathcal{C}$

**2.**– On considère la forme différentielle :

$$\omega = \left(3y - e^{sinx}\right)dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right)dy$$

L'intégrale

$$I = \int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} \left(3y - e^{sinx}\right)dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right)dy$$

est-elle calculable par la formule de Green-Riemann ?

## Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Rechercher ses maxima et minima locaux ainsi que les points-selles.

## Exercice 4

Calculer l'intégrale double

$$\iint_R e^{\frac{(x+y)}{(x-y)}} dxdy$$

où $R$ est l'intérieur du trapèze de sommets $(0,-1)$, $(0,-2)$, $(2,0)$, $(1,0)$. On pourra utiliser le changement de variable

$$u = x + y, \qquad v = x - y$$

qui envoie le trapèze $R$ sur le trapèze $S$ de sommets $(-2,2)$, $(2,2)$, $(1,1)$, $(-1,1)$

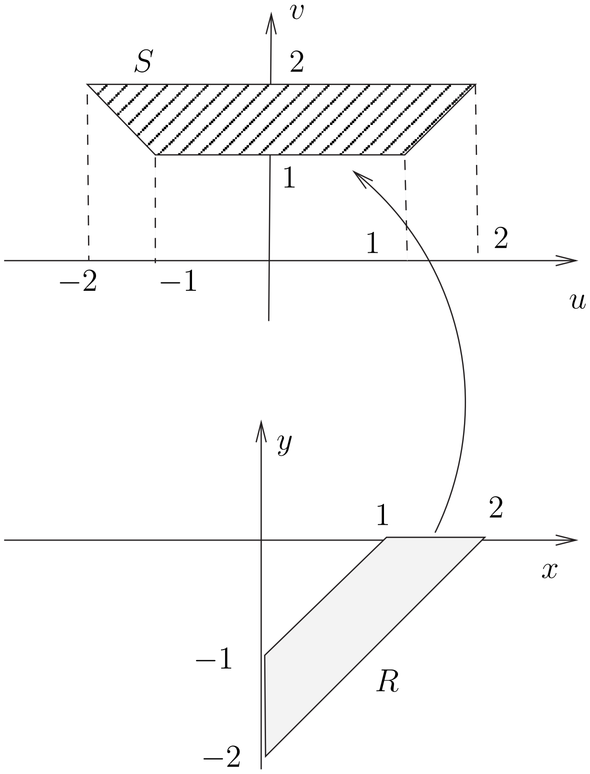


Fig. 1 – Les domaines $S$ et $R$