Licence PC2 2006/2007

Corrigé du Partiel 1,

2 novembre 2006

durée 3 heures

On sera attentif à la précision de la rédaction et à la présentation. Les résultats devront toujours être justifiés en quelques mots.

Documents et calculettes non autorisés

Exercice 1

1. Définir les formes différentielles de degré 1 de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Définir le vecteur gradient associé à la fonction $F(x, y, z)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

Solution exercice 1

Question 1 : Soit $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, la forme différentielle de degré 1 et de classe $\mathscr{C}^1$ associée est l'expression

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

(avec les régles de changement de variables).

Question 2 : Soit $F(x, y, z)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, le gradient de F est le vecteur de $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

Exercice 2

1. Calculer la matrice jacobiennne de l'application

$$\begin{aligned} g_1 :\ & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calculer la matrice jacobienne de l'application

$$\begin{aligned} g_2 :\ \mathbb{R}^3 \setminus \big(\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}\big) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &\longmapsto w^2 \arctan\frac{u}{v} \end{aligned}$$

3. En déduire la matrice jacobienne de l'application

$$f(x,y) = x^2y^2\arctan\frac{x-y}{x+y}$$

Solution exercice 2

Rappels : Si $\mathcal{U}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p$ la matrice jacobienne de la fonction de classe $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned} \varphi :\ \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1,\dots,x_p) \\ \vdots \\ \varphi_q(x_1,\dots,x_p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(où φ_i est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est la matrice (à q lignes et p colonnes)

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_q}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_q}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_q}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial\varphi_q}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Questions 1 : Donc ici

$$J_{g_1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x-y)}{\partial x} & \frac{\partial(x-y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(xy)}{\partial x} & \frac{\partial(xy)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Questions 2 : De même

$$\begin{aligned} J_{g_2}(u,v,w) &= \left(\tfrac{\partial}{\partial u}\left(w^2\arctan\tfrac{u}{v}\right),\quad \tfrac{\partial}{\partial v}\left(w^2\arctan\tfrac{u}{v}\right),\quad \tfrac{\partial}{\partial w}\left(w^2\arctan\tfrac{u}{v}\right)\right) \\ &= \left(\tfrac{w^2 v}{u^2+v^2},\quad \tfrac{-w^2 u}{u^2+v^2},\quad 2w\arctan\tfrac{u}{v} \right) \end{aligned}$$

On a clairement

$$f(x,y) = (g_2\circ g_1)(x,y)$$

Questions 3 : Et donc

$$\begin{aligned}
J_f(x,y) &= J_{g_2}(u(x,y),v(x,y),w(x,y)) \times J_{g_1}(x,y)\\
&= \left(\tfrac{(xy)^2(x+y)}{(x-y)^2+(x+y)^2}, \quad \tfrac{-(xy)^2(x-y)}{(x-y)^2+(x+y)^2}, \quad 2xy\arctan\left(\tfrac{x-y}{x+y}\right)\right) \times \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\\ y & x\end{pmatrix}\\
&= \left(\tfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} + 2xy^2\arctan\left(\tfrac{x-y}{x+y}\right), \quad \tfrac{-x^3y^2}{x^2+y^2} + 2x^2y\arctan\left(\tfrac{x-y}{x+y}\right)\right)
\end{aligned}$$

Remarque : Bien sûr on aurait pu calculer directement la matrice jacobienne de la fonction $f(x,y) = x^2y^2\arctan\frac{x-y}{x+y}$

Exercice 3

On considère la fonction $f(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. On considère le changement de variable

$$\begin{cases} u = x+t\\ v = x-t\end{cases}$$

et la fonction F telle que

$$f(x,t) = F(u,v) = F(x+t, x-t)$$

1. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en fonction de celles de la fonction F

On suppose que cette fonction satisfait l'équation aux dérivées partielles (de propagation) suivante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

2. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par F.

3. Résoudre cette équation et en déduire les solutions de l'équation initiale.

Solution exercice 3

Questions 1 : Pour calculer les dérivées partielles premières de f et en fonction de celles de F on utilise la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(x+t,x-t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(x+t,x-t)\frac{\partial v}{\partial x}\\
\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(x+t,x-t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}(x+t,x-t)\frac{\partial v}{\partial t}
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 1, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 1, \;\; \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 1, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -1$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(x+t,x-t) + \frac{\partial F}{\partial v}(x+t,x-t)\\
\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(x+t,x-t) - \frac{\partial F}{\partial v}(x+t,x-t)
\end{aligned}$$

Pour calculer les dérivées partielles secondes on utilise leur définition

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &:= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) &:= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}(x+t,x-t)+\frac{\partial F}{\partial v}(x+t,x-t)\Big)\\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x+t,x-t)+\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(x+t,x-t)+\\ &\qquad \frac{\partial F^2}{\partial v\partial u}(x+t,x-t)+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x+t,x-t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}(x+t,x-t)-\frac{\partial F}{\partial v}(x+t,x-t)\Big)\\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x+t,x-t)-\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(x+t,x-t)-\\ &\qquad -\frac{\partial F^2}{\partial v\partial u}(x+t,x-t)+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x+t,x-t)\end{aligned}$$

Finalement en utilisant le théorème de Schwarz $\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(x+t,x-t) = \frac{\partial F^2}{\partial v\partial u}(x+t,x-t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x+t,x-t)+2\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(x+t,x-t)+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x+t,x-t)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x+t,x-t)-2\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(x+t,x-t)+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x+t,x-t)\end{aligned}$$

Questions 2 : Donc l'équation au dérivées partielles satisfaite par la fonction F est :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(x+t,x-t) = 0$$

Donc résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$ revient à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$$

Questions 3 : Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$, on intégre d'abord en u. Il vient puisque la primitive de 0 est une constante en u, donc une fonction en v seulement,

$$\int \frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(u,v)du = \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = G(v)$$

puis on intègre le résultat en v et il vient

$$\int\Big(\int \frac{\partial F^2}{\partial u\partial v}(u,v)du\Big)dv = \int G(v)dv = H(v)+K(u)$$

où $H(v)$ est une primitive de $G(v)$ est $K(u)$ est la constante d'intégration en v donc une fonction de u seulement.

Finalement en revenant en variables x, t il vient

$$f(x,t) = h(x+t) + k(x-t)$$

Exercice 4

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(u,v) = uv\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$$

1. La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en $(0,0)$
2. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(0,0)$.
4. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Solution exercice 4

Question 1 : Passons en coordonnées polaires $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$ alors

$$f(u,v) = g(\rho,\theta) = \rho^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

par conséquent comme $-2 \leq \cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \leq 2$ on a

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v) = \lim_{\rho\to 0} g(\rho,\theta) = 0$$

On peut donc prolonger par continuité $f(u,v)$ en $(0,0)$ en posant

$$f(u,v) = \begin{cases} uv\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} & \text{si } (u,v) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

Question 2 : Si $(u,v) \neq (0,0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{-v^5 + 4u^2v^3 + vu^4}{(u^2+v^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{u^5 - 4u^3v^2 - vu^4}{(u^2+v^2)^2}$$

On a directement à partir de la définition de f

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Par ailleurs on montre sans difficulté comme à la question 1 que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \lim_{\rho\to 0} \rho(-\sin^5\theta + 4\cos^2\theta\sin^3\theta + \cos^4\theta\sin\theta) = 0$$
$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^5\theta - 4\cos^3\theta\sin^2\theta - \cos\theta\sin^4\theta) = 0$$

car les fonctions $(-\sin^5\theta+4\cos^2\theta\sin^3\theta+\cos^4\theta\sin\theta)$ et $(\cos^5\theta-4\cos^3\theta\sin^2\theta-\cos\theta\sin^4\theta)$ sont bornées.

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Question 3 : On a par définition

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big)(u,v)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)(u,v)$$

Donc en utilisant la définition de la dérivée partielle par rapport à la variable u de la fonction $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$, il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{\partial f}{\partial v}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\Big)$$
$$\frac{1}{h}\Big(\frac{h^5}{h^4} - 0\Big) = 1$$

De même en utilisant la définition de la dérivée partielle par rapport à la variable v de la fonction $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$, il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{\partial f}{\partial u}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)\Big)$$
$$\frac{1}{h}\Big(\frac{-h^5}{h^4} - 0\Big) = -1$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(0,0)$$

Question 4 : le théorème de Schwarz n'est pas vérifié par f qui ne peut donc pas être de classe $\mathscr{C}^2$. Par contre la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 5

On munit $\mathbb{R}^3$ de la distance euclidienne ℓ_2, c'est à dire que la distance du point $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ au point $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ est donnée par

$$\|P_1P_2\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation

$$x + 2y + z = 4$$

Quelle est la plus courte distance du point de coordonnées $(1, 0, -2)$ au plan $\mathscr{P}$?

Indication : on pourra remarquer que la question revient à minimiser

$$d^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2, \text{ avec } z = 4 - x - 2y$$

Solution exercice 5 La distance, d, du point $P = (1, 0, -2)$ à un point $M = (x, y, 4 - 2y - x$ du plan $\mathscr{P}$ est donnée par

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - 2y - x)^2}$$

Minimiser d revient à minimiser $D(x, y) = d^2 = (x-1)^2 + y^2 + (6 - 2y - x)^2$. on recherche tout d'abord un minimum local. pour cela on recherche les points critiques donnés par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial x}((x-1)^2 + y^2 + (6 - 2y - x)^2) = 4x + 4y - 14 = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial y}((x-1)^2 + y^2 + (6 - 2y - x)^2) = 4x + 10y - 24 = 0 \end{cases}$$

On résoud le système obtenu et on trouve la solution unique

$$x = \frac{11}{6}, \ y = \frac{5}{3}$$

Pour vérifier que le point $M = (\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ est un minimum local on utilise la formule de Taylor à l'ordre 2 pour D au voisinage du point M, il vient :

$$\begin{gathered} D(x,y) = D(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}) + \left(x - \frac{11}{6}\right)\frac{\partial D}{\partial x}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) + \left(y - \frac{5}{3}\right)\frac{\partial D}{\partial y}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) + \right. \\ \left. + \left(x - \frac{11}{6}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right)\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)\right) + \|PM\|^2 \varepsilon(\|PM\|) \end{gathered} \tag{1}$$

avec $\lim_{M \to P} \varepsilon(\|PM\|) = \varepsilon(0) = 0$.

Par hypothèse $\frac{\partial D}{\partial x}(M) = \frac{\partial D}{\partial y}(M) = 0$.

On calcule

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(M) = p = 4 \\ \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}(M) = q = 4 \\ \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(M) = r = 10 \end{gathered}$$

La forme quadratique $Q(X, Y) = pX^2 + 2rXY + q^2Y^2$ a pour discriminant -24 donc elle est de signe constant > 0 sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent le point $M = (\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ est un minimum local pour D. Pour montrer que c'est un minimum global il suffit de remarquer que dans notre cas $\varepsilon(\|PM\|)$ est identiquement nulle et donc la formule (1) se réduit à

$$D(x,y) = D(M) + \frac{1}{2!}\bigg(\Big(x - \frac{11}{6}\Big)^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(M) + \\ + \Big(x - \frac{11}{6}\Big)\Big(y - \frac{5}{3}\Big)\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}(M) + \Big(y - \frac{5}{3}\Big)^2 \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(M)\bigg)$$

Donc pour tout $M = (x, y, z) \in \mathscr{P}$ on a $D(x,y) \geq D(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$.

Reamarque : Si on sait que la distance la plus courte entre le point P et les points du plan $\mathscr{P}$ est donnée par la longueur du segment joignant P à sa projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$, on peut obtenir le même résultat par une méthode différente.