Licence PC2 2005/2006

PARTIEL 1 DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

17 novembre 2005

durée 3 heures

On sera attentif à la précision de la rédaction. On donnera les énoncés des théorèmes utilisés. Les résultats devront toujours être justifiés en quelques mots.

Documents et calculettes non autorisés

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On pose $U = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \neq 0\Big\}$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$

c) Montrer que f possède des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Les calculer.

d) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

e) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ au point $(0,0)$.

f) Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(x_0, 0) \neq (0,0)$.

Exercice 2

On considère les fonctions f et φ :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^2y - xe^y \end{array} \qquad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Déterminer la matrice jacobienne de f. Déterminer la matrice jacobienne de φ. En déduire $(f \circ \varphi)'(t)$.

b) Déterminer la fonction $f \circ \varphi$. En déduire $(f \circ \varphi)'(t)$ et retrouver le résultat de a).

Exercice 3

On considère les fonctions f et g :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x^3 \\ -x - y^2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+1} \\ \frac{y}{x^2+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Déterminer l'application $h = f \circ g$.

b) Déterminer la matrice jacobienne $J_h(x, y)$. Calculer $J_h(1, 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculer les matrices jacobiennes de f et de g et retrouver le résultat de b).