

Résumé du Cours de Calcul Différentiel

Partie I

LPC2 2006-2007

Daniel Barsky

Université Paris 13, Institut Galilée
LAGA, URA CNRS n°742
99, Av J.-B. Clément
F-93430 VILLETANEUSE
France ¹

20 octobre 2006

¹e.mail: barsky@math.univ-paris13.fr

Table des Matières

1	Notion de distance dans \mathbb{R}^n	3
1.1	Norme sur \mathbb{R}^n	3
2	Limite et continuité dans \mathbb{R}^n	7
2.1	Limite pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	7
2.1.1	Opérations sur les limites	9
2.1.2	Limite pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2	10
2.2	Continuité pour les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	11
2.2.1	Continuité pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	11
2.2.2	Opérations sur les fonctions continues	12
2.2.3	Continuité pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2	13
2.2.4	Propriétés des fonctions continues	14
3	Fonctions différentiables de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	16
3.1	Dérivées partielles, fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	16
3.2	Dérivées suivant un vecteur, \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	19
3.3	Fonctions de deux variables	19
3.4	Vecteur gradient pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	20
3.5	Dérivées partielles, d'ordre supérieur	20
3.6	Maxima et minima locaux	21
3.7	Maxima et minima absolus	23
3.8	Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	23
4	Formes différentielles	25
	Bibliographie	29
	Index	29

Chapitre 1

Notion de distance dans \mathbb{R}^n .

1.1 Norme et distance sur \mathbb{R}^n .

Pour étudier les limites dans \mathbb{R}^n on introduit des normes qui généralisent la notion de valeur absolue sur \mathbb{R} .

Définition 1.1.1. *Une application*

$$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les propriétés

- (N1) $\forall a \in \mathbb{R}^n : N(a) = 0 \iff a = 0$
- (N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n : N(\lambda a) = |\lambda| \cdot N(a)$
- (N3) $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall b \in \mathbb{R}^n : N(a + b) \leq N(a) + N(b)$

*est appelée une **norme** sur \mathbb{R}^n*

L'inégalité (N3) est appelée l'***inégalité triangulaire***

Norme et distance euclidienne \mathbb{R}^n .

Nous allons définir une première norme sur \mathbb{R}^n , la norme euclidienne ou norme ℓ_2 .

Proposition 1.1.2 (Proposition et Définition). *La fonction*

$$(1.1) \quad \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

appelée **norme euclidienne** ou **norme** ℓ_2 sur \mathbb{R}^n , vérifie les propriétés (N1), (N2), (N3), c'est à dire

$$(N1) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n : \quad \|a\| = 0 \iff a = 0$$

$$(N2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n : \quad \|\lambda a\|_2 = |\lambda| \cdot \|a\|_2$$

$$(N3) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n, \forall b \in \mathbb{R}^n : \quad \|a + b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$$

Lemme 1.1.3 (inégalité de Schwarz). *On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire euclidien et de la norme euclidienne définis par*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} :$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i, \quad \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

Alors

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2$$

Définition 1.1.4. *On définit la **distance euclidienne** ou **distance** ℓ_2 entre deux points, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, de \mathbb{R}^3 en posant*

$$\|AB\|_2 = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Si O est l'origine de \mathbb{R}^n alors

$$\|AB\|_2 = \|\vec{AB}\|_2 = \|\vec{OB} - \vec{OA}\|_2 = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

Exemple 1.1.1. On définit la **sphère** ℓ_2 **de dimension** n de centre $A \in \mathbb{R}$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$ comme l'ensemble des points, M , de \mathbb{R}^n tel que $\|\vec{AM}\|_2 = R$.

On définit la **boule ouverte** ℓ_2 **de dimension** n , respectivement **boule fermée** ℓ_2 **de dimension** n de centre $A \in \mathbb{R}$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$ pour la norme ℓ_2 comme l'ensemble des points, M , de \mathbb{R}^n tel que $\|\vec{AM}\|_2 < R$, respectivement $\|\vec{AM}\|_2 \leq R$.

Norme et distance infinie sur \mathbb{R}^n .

Nous allons définir maintenant une deuxième norme sur \mathbb{R}^n appelée la norme infinie et notée $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 1.1.5. *La fonction*

$$(1.2) \quad \|\cdot\|_\infty : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto \|\vec{a}\|_\infty = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$$

appelée **norme infinie** sur \mathbb{R}^n , vérifie les propriétés (N1), (N2), (N3), c'est à dire

$$\begin{aligned} (N1) \quad & \forall a \in \mathbb{R}^n : \quad \|a\|_\infty = 0 \iff a = 0 \\ (N2) \quad & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n : \quad \|\lambda a\|_\infty = |\lambda| \cdot \|a\|_\infty \\ (N3) \quad & \forall a \in \mathbb{R}^n, \forall b \in \mathbb{R}^n : \quad \|a + b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2. On définit le **circonférence** ℓ_∞ **de dimension** n et ce centre A comme l'ensemble des points, M , de \mathbb{R}^n tel que $|\vec{AM}|_\infty = R$.

On définit la **boule ouverte** ℓ_∞ **de dimension** n , respectivement **boule fermée** ℓ_∞ **de dimension** n de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$ pour la ℓ_∞ comme l'ensemble des points, M , de \mathbb{R}^n tel que $|\vec{AM}|_\infty < R$, respectivement $|\vec{AM}|_\infty \leq R$.

Norme et distance ℓ_1 sur \mathbb{R}^n .

Nous allons définir maintenant une troisième norme sur \mathbb{R}^n appelée la norme ℓ_1 et notée $\|\cdot\|_1$.

Proposition 1.1.6. *La fonction*

$$(1.3) \quad \|\cdot\|_1 : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \longmapsto \|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

appelée **norme ℓ_1** sur \mathbb{R}^n , vérifie les propriétés (N1), (N2), (N3), c'est à dire

$$\begin{aligned} (N1) \quad & \forall a \in \mathbb{R}^n : \quad \|a\|_1 = 0 \iff a = 0 \\ (N2) \quad & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n : \quad \|\lambda a\|_1 = |\lambda| \cdot \|a\|_1 \\ (N3) \quad & \forall a \in \mathbb{R}^n, \forall b \in \mathbb{R}^n : \quad \|a + b\|_1 \leq \|a\|_1 + \|b\|_1 \end{aligned}$$

Exemple 1.1.3. On définit la **circonférence** ℓ_1 **de dimension** n de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$ pour la valeur absolue comme étant l'ensemble des points, M , de \mathbb{R}^n tel que $\|\vec{AM}\|_1 = R$.

On définit la **boule ouverte** ℓ_1 **de dimension** n , respectivement **boule fermée** ℓ_1 **de dimension** n de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$ pour la valeur absolue comme étant l'ensemble des points, M , de \mathbb{R}^n tel que $\|\vec{AM}\|_1 < R$, respectivement $\|\vec{AM}\|_1 \leq R$.

On a décrit trois normes sur \mathbb{R}^n . Ces trois normes donnent des distances sur \mathbb{R}^n qui ne sont pas trop différentes. Le théorème suivant montre que la distance entre deux points de \mathbb{R}^n ne peut pas être très grande, respectivement très petite, pour l'une des normes sans l'être aussi pour les deux autres.

Théorème 1.1.7. *Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ alors on a les inégalités:*

$$(1.4) \quad \|\vec{a}\|_\infty \leq \|\vec{a}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\vec{a}\|_\infty$$

$$(1.5) \quad \|\vec{a}\|_\infty \leq \|\vec{a}\|_1 \leq n\|\vec{a}\|_\infty$$

Définition 1.1.8 (Normes équivalentes). *Soit $(N_1; \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ et $(N_2; \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ deux normes sur \mathbb{R}^n . On dit que les **deux normes** N_1 et N_2 **sont équivalentes** s'il existe deux constantes $c > 0$ et $c' > 0$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad cN_1(x) \leq N_2(x) \leq c'N_1(x)$$

Remarque 1.1.1. Si des normes sont équivalentes les notions de limite et de continuité sont les mêmes pour les deux normes.

Corollaire 1.1.9. *Les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.*

Théorème 1.1.10. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|_i$ avec $i = 1, 2, \infty$ on a les **inégalités triangulaires***

$$|\|x\|_i - \|y\|_i| \leq \|x + y\|_i \leq \|x\|_i + \|y\|_i$$

Chapitre 2

Limite et continuité dans \mathbb{R}^n .

Rappelons que toute fonction, f , de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est équivalente à la donnée de p fonctions f_i ($1 \leq i \leq p$) de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Les fonctions f_i sont appelées les **fonctions coordonnées** de la fonction f .

2.1 Limite pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Définition 2.1.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$ et soit

$$\begin{aligned} f : A \setminus \{c\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

une fonction. On dit que la fonction f admet pour limite L quand $z = (x, y)$ tend vers $c = (a, b)$ et on écrit $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = L$, si l'on peut rendre les valeurs de $f(x, y)$ aussi proches que l'on veut de L en choisissant (x, y) dans A suffisamment proche du point (a, b) , mais différent de (a, b) (pour n'importe laquelle des normes $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$); autrement dit

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) &= L \\ &\Updownarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x,y) \in A \setminus \{c\}, \| (x,y) - (a,b) \|_i \leq \alpha &\Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x,y) - L| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \infty$

Remarquer que la fonction n'a pas besoin d'être définie en $c = (a, b)$.

Pour que cette définition soit correcte il faut montrer qu'elle ne dépend pas du choix de la norme $\| \cdot \|_i$ utilisée.

Proposition 2.1.2. Notons $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)}^{(i)} f(x,y)$ la limite si elle existe de la fonction f en (a,b) suivant la norme i , alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)}^{(i)} f(x,y) = L \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)}^{(j)} f(x,y) = L$$

avec $i, j = 1, 2, \infty$.

Un corollaire important:

Corollaire 2.1.3. Si $(f; A \setminus \{(a,b)\})$ a pour limite L quand $(x,y) \rightarrow (a,b)$ alors si $\vec{z}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{z}_2 = (x_2, y_2)$ sont proches de $\vec{c} = (a,b)$, alors $f(z_1) = f(x_1, y_1)$ est proche de $f(z_2) = f(x_2, y_2)$ autrement dit si $\|z_1 - c\|$ et $\|z_2 - c\|$ sont petits il en est de même de $|f(z_1) - f(z_2)|$; de manière plus formelle

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \\ \Downarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall z_1, z_2 \in A \setminus \{c\}, \begin{cases} \|z_1 - c\| \leq \alpha \\ \|z_2 - c\| \leq \alpha \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1. La réciproque de ce corollaire est vraie.

Il faut aussi savoir écrire que f n'a aucune limite quand $z \rightarrow c$

Corollaire 2.1.4. Une condition suffisante pour que f n'ait pas de limite quand $z \rightarrow c$ est qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'on puisse trouver des vecteurs z_1 et z_2 dans $A \setminus \{c\}$ arbitrairement proche de c et tels que la distance de $f(z_1)$ à $f(z_2)$ soit supérieure à ε . De manière plus formelle

$$\begin{aligned} \text{La fonction } f \text{ n'a pas de limite quand } z \rightarrow c \\ \Updownarrow \\ \exists \varepsilon > 0 \forall \alpha > 0 \text{ tel que } \exists z_1, z_2 \in A \setminus \{c\} \text{ vérifiant } \begin{cases} \|z_1 - c\| \leq \alpha \\ \|z_2 - c\| \leq \alpha \end{cases} \\ \text{et } |f(z_1) - f(z_2)| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.5. Si $f(x,y) \mapsto L_1$ quand $(x,y) \mapsto (a,b)$ le long d'un chemin C_1 et $f(x,y) \mapsto L_2$ quand $(x,y) \mapsto (a,b)$ le long d'un chemin C_2 , avec $L_1 \neq L_2$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ n'existe pas

Proposition 2.1.6. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f ait limite L en $c = (a,b)$ est que pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{c\}$ ayant pour limite (a,b) la suite $n \mapsto u_n = f(x_n, y_n)$ ait pour limite L .

2.1.1 Opérations sur les limites.

Les deux lemmes suivants sont importants

Lemme 2.1.7. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$, soit $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ une fonction qui a une limite L quand $z = (x, y)$ tend vers c . La fonction f est alors bornée dans un voisinage de c . Autrement dit il existe une boule, V , de centre c et de rayon $\alpha > 0$ et $M < \infty$ tels que $\sup_{(x,y) \in V} |f(x, y)| \leq M$.

Lemme 2.1.8. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$, soit $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ une fonction qui a une limite $L \neq 0$ quand $z = (x, y)$ tend vers c . La fonction f est alors non nulle dans un voisinage de c . Autrement dit il existe une boule de centre c et de rayon $\alpha > 0$ et $M < \infty$ tels que $f(x, y) \neq 0$.

Proposition 2.1.9. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$, soient $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ et $(g; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ deux fonctions telles que f , respectivement g , aient une limite L , respectivement L' , quand $z = (x, y)$ tend vers c , alors

- La limite d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des limites. De manière formelle:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) = \\ \lambda \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) + \mu \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = \lambda L + \mu L' \end{aligned}$$

- La limite d'un produit est le produit des limites, de manière formelle

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \right) \cdot \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \right) = L \cdot L'$$

- Si $L' \neq 0$ alors la limite du quotient est le quotient des limites. De manière formelle:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)} = \frac{L}{L'}$$

Proposition 2.1.10. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$, soient $(f; A \setminus \{c\}, I)$ où I est l'ensemble image de f et soit $(g; I, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction f a une limite $L \in I$ quand $z = (x, y)$ tend vers c , et que g a une limite L' , quand t tend vers L , alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (g \circ f)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(f(x, y)) = L'$$

2.1.2 Limite pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Au lieu de considérer des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} on peut considérer des fonctions de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Pour toutes les questions de limites il suffit de munir l'un des espaces \mathbb{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_i$ et l'autre de la norme $\|\cdot\|_j$ avec $i, j = 1, 2, \infty$.

Toutes les définitions et propositions du paragraphe 2.1 se transposent sans difficulté, il suffit pour cela de remarquer qu'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 équivaut à la donnée d'un couple $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ de fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Il faut donc remplacer la valeur absolue sur \mathbb{R} par une norme sur \mathbb{R}^2 .

Définition 2.1.11. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$ et soit

$$f : A \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

une fonction, où f_1 , respectivement f_2 sont des fonctions de $A \setminus \{c\}$ dans \mathbb{R} .

On dit que la fonction f **admet pour limite** $L = (L_1, L_2)$ **quand** $z = (x, y)$ **tend vers** $c = (a, b)$ et on écrit $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = L$, si on peut rendre les valeurs de $f(x, y)$ aussi proches que l'on veut de L en choisissant (x, y) dans A suffisamment proche du point (a, b) , mais différent de (a, b) , pour n'importe la quelle des normes $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$, autrement dit

$$\lim_{(x, y) \rightarrow c = (a, b)} f(x, y) = L = (L_1, L_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in A \setminus \{c\}, \|(x, y) - (a, b)\|_i \leq \alpha \Rightarrow \|f(x, y) - L\|_j \leq \varepsilon$$

où $i, j = 1, 2, \infty$

Théorème 2.1.12. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$ soit

$$f : A \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

une fonction, où f_1 , respectivement f_2 sont des fonctions de $A \setminus \{c\}$ dans \mathbb{R} .

La fonction $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R}^2)$ admet une limite $L = (L_1, L_2)$ en c si et seulement si chacune des fonctions

$$f_i : A \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f_i(x, y)$$

admet pour limite L_i en c pour $i = 1, 2$

2.2 Continuité pour les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

2.2.1 Continuité pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Si la fonction f est définie en $c = (a, b)$ il peut arriver $L = f(a, b)$ dans ce cas on dit que la fonction f est continue en (a, b) d'où la définition

Définition 2.2.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et soit $(f; A, \mathbb{R})$ une fonction. On dit que la fonction f est **continue en** $c = (a, b) \in A$ si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

autrement dit si on peut rendre les valeurs de $f(x, y)$ aussi proches que l'on veut de $f(a, b)$ en choisissant (x, y) dans A suffisamment proche du point (a, b) mais différent de (a, b) , autrement dit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in A - \{(a, b)\},$$

$$\|(x, y) - (a, b)\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x, y) - f(a, b)\| \leq \varepsilon$$

On dit que f est **continue sur** A ou simplement **continue** si f est continue en tout point (a, b) de A .

Cette définition ne dépend pas du choix de la norme sur \mathbb{R}^2 car on a montré que la notion de limite n'en dépendait pas à la proposition 2.1.2.

Une fonction continue sur A sera dite de **classe** \mathcal{C}^0 . L'ensemble des fonction continues de A à valeurs dans B sera noté $\mathcal{C}^0(A, B)$ ou $\mathcal{C}(A, B)$.

Définition 2.2.2. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $c \in A$ soit $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ une fonction. On dit que la fonction f est **prolongeable par continuité en** $c = (a, b) \in A$ si f possède une limite L en c que l'on note $f(c) = f(a, b)$

$$\exists \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in A \setminus \{c\}}} f(x, y) = f(a, b)$$

La fonction ainsi prolongée est encore notée f ou encore $(f; A, \mathbb{R})$.

Cette définition est justifiée par le corollaire suivant

Corollaire 2.2.3. Si $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ est prolongeable par continuité en c , la fonction, $(f; A, \mathbb{R})$, obtenue est continue en c .

Il est important de savoir comment écrire que la fonction f n'est pas continue en $c = (a, b)$:

Corollaire 2.2.4. Une condition nécessaire et suffisante pour que $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ ne soit pas continue en $c = (a, b)$ est qu'il existe un nombre non nul ε tel que l'on puisse trouver des vecteurs $z = (x, y)$ de $A \setminus \{c\}$ aussi proches que l'on veut de c et tels que la différence $|f(z) - f(c)|$ soit supérieure à ε ; de manière plus formelle:

La fonction f n'est pas continue en c

\Updownarrow

$\exists \varepsilon > 0 \forall \alpha > 0$ tel que $\exists z \in A - \{a\}$ vérifiant $\|z - c\| \leq \alpha$ et $|f(z) - f(c)| \geq \varepsilon$

Une autre manière d'écrire que f n'est pas continue en c

Corollaire 2.2.5. Une condition suffisante pour que f ne soit pas continue en c est qu'il existe un nombre ε tel que l'on puisse trouver des vecteurs z_1 et z_2 dans $A \setminus \{c\}$ arbitrairement proche de c et tels que la distance de $f(z_1)$ à $f(z_2)$ soit supérieure à ε . De manière plus formelle

La fonction f n'est pas continue en c

\Updownarrow

$\exists \varepsilon > 0 \forall \alpha > 0$ tel que $\exists z_1, z_2 \in A \setminus \{c\}$ vérifiant $\begin{cases} \|z_1 - c\| \leq \alpha \\ \|z_2 - c\| \leq \alpha \end{cases}$
et $|f(z_1) - f(z_2)| \geq \varepsilon$

Encore une autre manière de montrer que f n'est continue en c

Corollaire 2.2.6. Si $f(x, y) \mapsto L_1$ quand $(x, y) \mapsto (a, b)$ le long d'un chemin (ou d'une courbe) C_1 et $L_1 \neq f(c)$ alors f n'est pas continue en c

2.2.2 Opérations sur les fonctions continues.

On a vu au paragraphe 2.1.1 que l'on pouvait définir des opérations sur les limites pour les fonctions de deux variables. On peut donc définir les mêmes opérations sur les fonctions continues puisque la continuité se définit en terme de limites.

Proposition 2.2.7. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$, soient $(f; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ et $(g; A \setminus \{c\}, \mathbb{R})$ deux fonctions continues en c , alors

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la fonction $(x, y) \mapsto (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y))$ est continue en c
- $f \cdot g$ est continue en c
- Si $g(c) \neq 0$ alors $(x, y) \mapsto \left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right)$ est continue en c

2.2.3 Continuité pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Au lieu de considérer des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} on peut considérer des fonctions de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Pour toutes les questions de continuité, comme pour les questions de limites, il suffit de munir l'un des espaces \mathbb{R}^2 d'une norme $\|\cdot\|_i$ et l'autre d'une norme $\|\cdot\|_j$ avec $i, j = 1, 2, \infty$.

Définition 2.2.8. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$ et soit

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

une fonction, où f_1 , respectivement f_2 sont des fonctions de A dans \mathbb{R} .

On dit que la fonction f est continue en $c = (a, b)$ si on peut rendre les valeurs de $f(x, y)$ aussi proches que l'on veut de $f(a, b) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$ en choisissant (x, y) dans A suffisamment proche du point (a, b) pour n'importe laquelle des normes $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$, autrement dit

$$\lim_{(x, y) \rightarrow c = (a, b)} f(x, y) = f(c) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in A \setminus \{c\}, \|(x, y) - (a, b)\|_i \leq \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f(x, y) - f(c)\|_j \leq \varepsilon$$

où $i, j = 1, 2, \infty$.

On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

Théorème 2.2.9. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$ soit

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

une fonction, où f_1 , respectivement f_2 sont des fonctions de A dans \mathbb{R} .

La fonction $(f; A, \mathbb{R}^2)$ est continue en c si et seulement si chacune des fonctions

$$f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f_i(x, y)$$

est continue en c pour $i = 1, 2$.

Proposition 2.2.10. Soit $A \in \mathbb{R}^2$, $c \in A$ et soient $(f = (f_1, f_2); A, \mathbb{R}^2)$ et $(g = (g_1, g_2); A, \mathbb{R}^2)$, où f_i, g_i sont des fonctions de A dans \mathbb{R} , deux fonctions telles que f , respectivement g , soient continues en c alors

- Une combinaison linéaire de fonctions continues est continue.
- Le produit scalaire de deux fonctions continues est continu.

Proposition 2.2.11. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $c = (a, b) \in A$, soient $(f = (f_1, f_2); A, \mathbb{R}^2)$, on note $I \subset \mathbb{R}^2$ l'espace image de f et soit $(g = (g_1, g_2); I, \mathbb{R}^2)$ où f_i , respectivement g_i , sont des fonctions de A dans \mathbb{R} , respectivement de I dans \mathbb{R} .

On suppose que la fonction f est continue en c , et que g est continue en $f(c)$, alors

$$(x_1, x_2) \mapsto (g \circ f)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \\ g_2(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \end{pmatrix}$$

est continue en c

2.2.4 Propriétés des fonctions continues.

Si l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est d'un type particulier alors les fonctions continues ont des propriétés très agréables. On définit pour cela les ensembles ouverts et fermés dans \mathbb{R}^n

Définition 2.2.12. On munit \mathbb{R}^n d'une des normes ℓ^1 , ℓ^2 ou ℓ^∞ .

Un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ est **un ensemble ouvert** si toute les fois que \mathcal{O} contient un point c il existe $\varepsilon_c > 0$ tel que \mathcal{O} contienne toute la boule ouverte de centre c et de rayon ε_c , autrement dit

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \text{ est un ouvert} \\ \Updownarrow \\ \forall c \in \mathcal{O} \exists \varepsilon_c > 0 \text{ tel que } \|x - c\| < \varepsilon_c \Rightarrow x \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ est **un ensemble fermé** si son complémentaire est ouvert.

Remarque 2.2.1 (Remarque importante). La définition ne dépend pas de la norme choisi pour \mathbb{R}^n . En effet d'après le théorème 1.1.7 on peut toujours, quitte à changer le rayon, inclure une boule ouverte pour la norme i dans une boule ouverte pour la norme j .

Proposition 2.2.13 (Exemple fondamental). Une boule ouverte est un ensemble ouvert.

Proposition 2.2.14 (Exemple fondamental). *Une boule fermée est un ensemble fermé.*

Définition 2.2.15. *Un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ est **connexe par arc** si étant donné*

deux points quelconques $x, y \in \mathcal{A}$ il existe une application continue $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n où γ_i est une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que

$$1. \text{ Quel que soit } t \in [0, 1] \text{ le point } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \text{ appartient à } \mathcal{A}.$$

$$2. \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$

on dit que l'on peut joindre x à y par une courbe continue contenue dans \mathcal{A} d'origine x et d'extrémité y

Théorème 2.2.16. *Soit f une fonction continue sur un ouvert $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeur dans \mathbb{R} . L'image par f d'un ensemble connexe par arc est un segment de \mathbb{R}*

Théorème 2.2.17. *Soit f une fonction continue sur un ensemble fermé borné $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeur dans \mathbb{R}^p . L'image par f de A est un ensemble fermé borné de \mathbb{R}^p*

Corollaire 2.2.18. *Une fonction continue sur un ensemble fermé borné $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeur dans \mathbb{R} possède un maximum et un minimum qui sont atteints sur A , autrement dit il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\inf_{t \in A} f(t) = m, \quad \sup_{t \in A} f(t) = M$$

et il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in A$ tels que

$$f(x) = m, \quad f(y) = M$$

Ce minimum et ce maximum sont appelés le **minimum absolu** et le **maximum absolu** de f sur A .

Chapitre 3

Fonctions différentiables de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

On vous a défini dans les années antérieures la dérivée d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La dérivée est utile pour étudier localement une fonction, pour calculer la tangente en un point, pour étudier le sens de variations d'une fonction (croissance, décroissance), les maxima et minima locaux d'une fonction, etc.

On va définir une notion analogue pour les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p qui rendra des services semblables que l'on appellera la différentielle d'une fonction et qui est basée sur la notion de dérivée partielle.

Nous allons d'abord étudier cette notion pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} puis pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et enfin pour les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

3.1 Dérivées partielles des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Définition 3.1.1. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $c = (a, b) \in \mathcal{U}$ et soit $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction. Soit r tel que le pavé ouvert $]a - r, a + r[\times]b - r, b + r[$ soit contenu dans \mathcal{U} . On notera, pour $k = 1, 2$, α_k l'application

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 :]a - r, a + r[\longrightarrow \mathbb{R} & \alpha_2 :]b - r, b + r[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (t, b) & s \longmapsto (a, s) \end{array}$$

Soit f une fonction de \mathcal{U} dans \mathbb{R}

$$\begin{array}{l} f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{array}$$

Si la fonction de t

$$f \circ \alpha_1 :]a - r, a + r[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(t, b)$$

est dérivable au point a le nombre $(f \circ \alpha_1)'(a)$ s'appelle la **dérivée partielle de f au point c par rapport à la première variable**, ou **dérivée partielle par rapport à x** , et est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(c)$.

Si la fonction de s

$$\begin{aligned} f \circ \alpha_2 :]b - r, b + r[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f(a, s) \end{aligned}$$

est dérivable au point b le nombre $(f \circ \alpha_2)'(b)$ s'appelle la **dérivée partielle de f au point c par rapport à la deuxième variable**, ou **dérivée partielle par rapport à y** , et est notée $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(c)$.

Définition 3.1.2. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction, si pour tout $z = (x, y) \in \mathcal{U}$, f possède une dérivée partielle par rapport à x , respectivement y , la fonction qui à tout $z \in \mathcal{U}$ associe le nombre $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$, respectivement $\frac{\partial f}{\partial y}(z)$ s'appelle la **fonction dérivée partielle de f par rapport à x** , respectivement y , et se note $\frac{\partial f}{\partial x}$, respectivement $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Remarquer que cette définition ne préjuge rien sur la continuité sur \mathcal{U} de la fonction f en tant que fonction de deux variables. On verra par contre que si f est de classe \mathcal{C}^1 alors elle est nécessairement continue, cf. corollaire 3.1.7.

Corollaire 3.1.3 (Corollaire important). Avec les notations de la définition 3.1.1 la définition suivante. la fonction $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ possède une dérivée partielle au point c par rapport à la première, respectivement deuxième, variable si et seulement si la limite suivante existe

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(c) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(c) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \end{aligned}$$

Parmi les fonctions qui ont des dérivées partielles par rapport à x et à y on distingue une sous-classe qui sera particulièrement intéressante, celle des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 3.1.4. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction, si pour tout $z = (x, y) \in \mathcal{U}$, f possède des fonctions dérivées partielles par rapport à x , respectivement y , qui sont continues sur \mathcal{U} on dira que la **fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U}** ou que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.5. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction, on suppose que pour tout $z = (x, y) \in \mathcal{U}$, f possède des fonctions dérivées partielles par rapport à x , respectivement y , alors la matrice

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

est appelée la **matrice jacobienne** de f

On généralise maintenant une propriété caractéristique des fonctions dérivables d'une variable:

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ et } \varepsilon(0) = 0$$

Théorème 3.1.6. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 , soit $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} et soit $c = (a, b) \in \mathcal{U}$. Alors il existe un nombre $r > 0$ et une fonction

$$\varepsilon : B(0, r) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ où } 0 = (0, 0)$$

continue en $(0, 0)$ avec $\varepsilon(0, 0) = 0$ et telle que pour tout $h = (h_1, h_2) \in B(0, r)$

$$(3.1) \quad f(c+h) = f(c) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \|h\| \varepsilon(h)$$

La formule (3.1) joue le rôle du théorème des accroissement fini pour les fonctions d'une variable. Comme première application on démontre le corollaire suivant:

Corollaire 3.1.7. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et soit $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} , alors f est continue sur \mathcal{U} .

On a aussi un analogue du théorème des accroissements finis

Rappelons que si $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont des points de \mathbb{R}^2 le segment d'extrémités a et b est

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2) \text{ avec } 0 \leq t \leq 1\}$$

il est noté $[a, b]$

Théorème 3.1.8 (théorème des accroissements finis). Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et soit $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C} de \mathcal{U} à valeurs dans \mathbb{R} . Supposons que $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont des points de \mathcal{U} tels que le segment d'extrémités a et b soit tout entier contenu dans \mathcal{U} . Alors il existe $c = (c_1, c_2) \in [a, b]$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) + (b_2 - a_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(c)$$

3.2 Dérivées suivant un vecteur, fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

La notion de dérivée partielle est un cas particulier d'une notion plus générale de **dérivée suivant un vecteur**

Définition 3.2.1. Soit \mathcal{U} un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 et $c = (a, b) \in \mathcal{U}$, soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z = (x, y) &\longmapsto f(z) = f(x, y) \end{aligned}$$

La fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(c + th) = f(a + th_1, b + th_2) \end{aligned}$$

est définie pour t assez petit tel que $c + th \in \mathcal{U}$?

Si la fonction φ est dérivable par rapport à t pour $t = 0$ on dit que f admet une **dérivée suivant le vecteur** h et on note cette dérivée $D_h f(c)$.

Proposition 3.2.2. Soit f une fonction de classe C^{scr^1} sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 , alors pour tout point $c \in \mathcal{U}$ f admet une dérivée suivant tout vecteur $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ et on a

$$D_h(f)(c) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(c) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(c)$$

3.3 Dérivation implicite pour les fonctions de deux variables.

Soit $F(x, y) = 0$ une équation, on suppose qu'elle définit y comme **fonction implicite** de x sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R} c'est à dire qu'il existe une fonction $y = \varphi(x)$ de \mathcal{U} dans \mathbb{R} telle que $F(x, \varphi(x)) = 0$ pour $x \in \mathcal{U}$. Si l'on suppose de plus que F est de classe \mathcal{C}^1 alors on peut se demander si φ est dérivable sur \mathcal{U} .

Théorème 3.3.1 (Fonctions implicites). Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ et que l'on a $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors

- Il existe $r > 0$ et il existe une fonction $\varphi(x)$ définie dans la boule ouverte $B(P_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$ telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in B(P_0, r)$.
- La fonction $(\varphi; B(P_0, r), \mathbb{R})$ est de classe \mathcal{C}^1 .

- Pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$ et

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{d\varphi}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

3.4 Vecteur gradient pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Si f est de classe \mathcal{C}^1 alors dans la formule

$$f(c+h) - f(c) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \|h\| \varepsilon(h)$$

on peut interpréter la quantité

$$h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

comme le produit scalaire dans \mathbb{R}^2 du vecteur $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ par le vecteur

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ est appelé le **vecteur gradient** associé à f , on le note $\text{grad } f$ et sa valeur au point $c = (a, b)$ est notée $\text{grad } f(c)$.

3.5 Dérivées partielles, d'ordre supérieur.

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction, si pour tout $z = (x, y) \in \mathcal{U}$, f possède une fonction dérivée partielle par rapport à x , respectivement y , on peut considérer les dérivées partielles des fonctions

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x}; \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} & & \frac{\partial f}{\partial y}; \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z) & & z \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{array}$$

on obtient ainsi les 4 dérivée partielles secondes

$$(f'_x)'_x = f''_{xx} = D_{11}(f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned}
(f'_x)'_y &= f''_{xy} = D_{12}(f) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
(f'_y)'_x &= f''_{xy} = D_{21}(f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
(f'_y)'_y &= f''_{yy} = D_{22}(f) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

Si toutes les dérivées partielles secondes sont continues sur \mathcal{U} on dit que f est de **classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U}** ou que $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

Théorème 3.5.1 (Théorème de Schwarz). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, on suppose que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est définie dans une boule ouverte, D , autour du point $((a, b))$. On suppose que les dérivées partielles secondes $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont toutes les deux continues sur D alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Théorème 3.5.2. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 , $(f; A, \mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $c = (a, b) \in \mathcal{U}$. Soit $\overset{\circ}{B}((0, 0), r)$ une boule ouverte telle que $(a + h, b + k) \in \mathcal{U}$ pour tout $(h, k) \in \overset{\circ}{B}(0, r)$. On a

$$\begin{aligned}
f(a + h, b + k) &= f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) + \|(h, k)\|^2 \varepsilon(h, k) \right)
\end{aligned}$$

où la fonction ε est une fonction continue des variables (h, k) et s'annule en $(0, 0)$

3.6 Maxima et minima locaux pour les fonctions de 2 variables.

On a vu que pour étudier les maxima et les minima d'une fonction d'une variable de classe \mathcal{C}^1 il fallait étudier le signe de sa dérivée. On a un analogue pour les fonctions de deux et plus de variables.

Rappelons que si f est une fonction d'une variable de classe \mathcal{C}^2 alors f possède un développement limité

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2}f''(c) + h^2\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0, \varepsilon(0) = 0$$

Si f a un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$. Réciproquement si $f'(c) = 0$ et si $f''(c) \neq 0$, alors quand $h \rightarrow 0$, la différence $f(c+h) - f(c)$ a le signe de $\frac{h^2}{2}f''(c)$: la fonction a un maximum local en c si $f''(c) < 0$ et un minimum local en c si $f''(c) > 0$. Si $f''(c) = 0$ on ne peut pas conclure. On va démontrer un résultat analogue pour les fonctions de 2 et plus de variables à valeurs réelles.

Définition 3.6.1. Soit un ouvert de \mathbb{R}^n , $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction et c un point de \mathcal{U} .

- On dit que f a un **maximum local** en c s'il existe une boule ouverte $B(c, r)$ contenue dans \mathcal{U} telle que $f(x) \leq f(c)$ quel que soit $x \in B(c, r)$.
- On dit que f a un **minimum local** en c s'il existe une boule ouverte $B(c, r)$ contenue dans \mathcal{U} telle que $f(x) \geq f(c)$ quel que soit $x \in B(c, r)$.

Si f a un maximum ou un minimum local en c , on dit que f a un **extremum local** en c .

Proposition 3.6.2. Soit un ouvert de \mathbb{R}^2 , $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Si f a un extremum local en $c = (a, b) \in \mathcal{U}$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Définition 3.6.3. Soit un ouvert de \mathbb{R}^2 , $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Si toutes les dérivées partielles de f sont nulles au point $c \in \mathcal{U}$ on dit que c est un **point critique** de f

Proposition 3.6.4. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 , $(f; \mathcal{U}, \mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $c = (a, b) \in \mathcal{U}$. Supposons que (a, b) soit un point critique de f et posons

$$Q_{(a,b)}(X, Y) = \left(X^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2XY \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + Y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right)$$

- Si l'on a $Q(X, Y) > 0$ quel que soit $(X, Y) \neq (0, 0)$ alors f a un minimum local en (a, b)
- Si l'on a $Q(X, Y) < 0$ quel que soit $(X, Y) \neq (0, 0)$ alors f a un maximum local en (a, b)
- S'il existe (X_1, Y_1) tel que $Q(X_1, Y_1) > 0$ et (X_2, Y_2) tel que $Q(X_2, Y_2) < 0$ alors f n'a ni maximum local ni minimum local en (a, b) , on dit que le point (a, b) est un **col** ou un **point selle**.

3.7 Maxima et minima absolus pour les fonctions de 2 variables.

On a vu, corollaire 2.2.18 page 15, que les fonctions continues sur un ensemble fermé borné A admettent un minimum et un maximum qui sont atteints et qui sont appelés le minimum absolu et le maximum absolu de f . Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur A on détermine le maximum et le minimum absolu de la manière suivante:

1. Calculer les valeurs de f aux points critiques de f dans A
2. Calculer les valeurs extrêmes de f sur la frontière de A
3. La plus grande des valeurs issues des étapes 1 et 2 est le maximum absolu de f sur A , la plus petite est le minimum absolu de f sur A .

3.8 Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

On considère une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , autrement dit f est un vecteur dont les p composantes (f_1, \dots, f_p) sont des fonctions de \mathcal{U} dans \mathbb{R} :

$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

où f_1, \dots, f_p sont des fonctions de \mathcal{U} à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 3.8.1. Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^p

$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

où les f_i sont des fonctions de \mathcal{U} à valeurs dans \mathbb{R} .

On dira que f est de classe \mathcal{C}^1 au point $a = (a_1, \dots, a_n)$ si les f_i possèdent des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ continues en c .

Définition 3.8.2. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $(f = (f_1, \dots, f_p); \mathcal{U}, \mathbb{R}^p)$ une fonction de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p , on suppose que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}$, les f_i , $1 \leq i \leq p$ possède des fonctions dérivées partielles par rapport à x_j , $1 \leq j \leq n$, alors la matrice

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée la **matrice jacobienne** de f .

Proposition 3.8.3. Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^m , \mathcal{V} un ouvert de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathcal{V} & f : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix} & (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \begin{pmatrix} f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_p(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 (c'est à dire que φ_j ($1 \leq j \leq n$) et f_k ($1 \leq k \leq p$) sont de classe \mathcal{C}^1 et telles que $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors si

$$g(x) = g(x_1, \dots, x_m) = (f \circ \varphi)(x)$$

est de classe \mathcal{C}^1 en tant que fonction de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^p et on a pour $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_m}(x) &= \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m}(x) \end{aligned}$$

ou en utilisant les matrices jacobienes

$$J_g(x) = J_f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x)$$

Chapitre 4

Formes différentielles à trois variables.

Définition 4.0.4. Une fonction $F(x, y, z)$ de classe \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ est appelée une **forme différentielle de degré 0** sur \mathcal{U}

Définition 4.0.5. Soit $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ trois fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$. L'expression

$$\omega = \omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

où dx, dy, dz sont les différentielles des fonctions x, y, z , est appelée une **forme différentielle de degré 1** et de composantes P, Q, R .

Définition 4.0.6. On définit le produit extérieur de deux formes différentielles en posant $da \wedge db$, avec $a, b = x, y, z$ soumis aux axiomes suivants

$$da \wedge db = -db \wedge da$$

et en prolongeant par linéarité, autrement dit si $\omega_1 = P_1dx + Q_1dy + R_1dz$ et $\omega_2 = P_2dx + Q_2dy + R_2dz$ alors

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 &= (P_1dx + Q_1dy + R_1dz) \wedge (P_2dx + Q_2dy + R_2dz) \\ &= (Q_1R_2 - R_1Q_2)dy \wedge dz + (P_1R_2 - R_1P_2)dx \wedge dz + \\ &\quad + (P_1Q_2 - P_2Q_1)dx \wedge dy\end{aligned}$$

On définit alors de même les formes différentielles de degré 2 et 3

Définition 4.0.7. Soit $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ trois fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$. L'expression

$$\omega = \omega(x, y, z) = A(x, y, z)dy \wedge dz + B(x, y, z)dz \wedge dx + C(x, y, z)dx \wedge dy$$

où dx, dy, dz sont les différentielles des fonctions x, y, z , est appelée une **forme différentielle de degré 2** et de composantes A, B, C .

Définition 4.0.8. Soit $D(x, y, z)$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$. L'expression

$$\omega = \omega(x, y, z) = D(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$$

où dx, dy, dz sont les différentielles des fonctions x, y, z , est appelée une **forme différentielle de degré 3** et de composantes A, B, C .

Définition 4.0.9. Si ω est une forme différentielle de degré 0, 1, 2 ou 3

$$\omega = F(x, y, z) \text{ en degré 0}$$

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \text{ en degré 1}$$

$$\omega = A(x, y, z)dy \wedge dz + B(x, y, z)dz \wedge dx + C(x, y, z)dx \wedge dy \text{ en degré 2}$$

$$\omega = D(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz \text{ en degré 3}$$

on définit sa **différentielle extérieure** notée $d\omega$ qui est une forme différentielle de degré respectivement 1, 2, 3, 4, en posant

$$d\omega = dF(x, y, z) \text{ en degré 0}$$

$$d\omega = dP(x, y, z) \wedge dx + dQ(x, y, z) \wedge dy + dR(x, y, z) \wedge dz \text{ en degré 1}$$

$$d\omega = dA(x, y, z) \wedge dy \wedge dz + dB(x, y, z) \wedge dz \wedge dx + dC(x, y, z) \wedge dx \wedge dy \\ \text{en degré 2}$$

$$d\omega = dD(x, y, z) \wedge dx \wedge dy \wedge dz \text{ en degré 3}$$

Donc la différentielle extérieure envoie l'espace des formes différentielles de degré n dans celui de degré $n + 1$.

Corollaire 4.0.10. Si ω est une forme de degré 0 on a

$$(4.1) \quad d\omega = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

Si ω est une forme de degré 1 on a

$$(4.2) \quad d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

Si ω est une forme de degré 2 on a

$$(4.3) \quad d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Si ω est une forme de degré 3 on a

$$(4.4) \quad d\omega = 0$$

Traditionnellement on associe à la forme ω de degré 0 le vecteur **gradient** de F , noté $\text{grad } F$, de composantes

$$\text{grad } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On associe à la forme $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ de degré 1 le vecteur de \mathbb{R}^3 $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ et à $d\omega$ on associe le vecteur de \mathbb{R}^3 appelé le **rotationnel** de ω , noté $\text{rot } \omega = \text{rot}(P, Q, R)$ de composantes

$$\text{rot } \omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

On associe à la forme $\omega = A(x, y, z)dy \wedge dz + B(x, y, z)dz \wedge dx + C(x, y, z)dx \wedge dy$ de degré 2 le vecteur $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 et à $d\omega$ on associe le scalaire de \mathbb{R} appelé la **divergence** de \vec{F} , notée $\text{div}(\vec{F})$ telle que

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

donc $\text{div}(\vec{F}) = d\omega$

Théorème 4.0.11. Pour toute forme différentielle ω de classe \mathcal{C}^2 de degré $n = 0, 1, 2, 3$ on a $d \circ d\omega = 0$

Définition 4.0.12. Une forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 , ω , de degré 1, 2 définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ est **fermée** ou est une **forme différentielle fermée** si $d\omega = 0$.

Une forme différentielle, ω définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, de degré 1, respectivement 2, respectivement 3, est **exacte** ou est une **forme différentielle exacte** s'il existe une forme différentielle, Ω définie sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, de classe \mathcal{C}^1 de degré 0, respectivement 1, respectivement 2, telle que

$$d\Omega = \omega$$

Corollaire 4.0.13. Une forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 , $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, de degré 1 définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ est fermée si et seulement si

$$\text{rot} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

Une forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 , $\omega = A(x, y, z)dy \wedge dz + B(x, y, z)dz \wedge dx + C(x, y, z)dx \wedge dy$, de degré 2 définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ est fermée si et seulement si

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

Démonstration: C'est évident. □

Corollaire 4.0.14. Une forme différentielle exacte de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^3 est fermée

Pour les formes de degré 1, il y a un rapport étroit entre forme exacte et formes fermée si l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ sur lequel elle sont définie est d'un certain type.

Définition 4.0.15. Un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ est **étoilé** par rapport au point $P \in \mathcal{U}$ si pour tout $M \in \mathcal{U}$ le segment PM est tout entier contenu dans \mathcal{U} .

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ est un **ouvert étoilé** s'il existe un point $P \in \mathcal{U}$ tel que \mathcal{U} soit étoilé par rapport à P

Théorème 4.0.16 (Théorème de Poincaré). Si \mathcal{U} est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^3 et si ω est une forme différentielle de degré 1 définie sur \mathcal{U} alors

La forme ω est fermée sur \mathcal{U}

\Updownarrow

La forme ω est exacte sur \mathcal{U}

Bibliographie

- [1] François LIRET & Dominique MARTINAIS *Cours de Mathématiques, Analyse 1-ère année* Dunod, Paris (**1997**).
- [2] François LIRET & Dominique MARTINAIS *Cours de Mathématiques, Analyse 2-ème année* Dunod, Paris (**1998**).
- [3] James STEWART, *Analyse Concepts et Contextes*, volume 1, DeBoeck Université, (**2001**).
- [4] James STEWART, *Analyse Concepts et Contextes*, volume 2, DeBoeck Université, (**2001**).

Index

$D_h f(c)$,p.	19	connexe par arc,p.	15
$[a, b]$,p.	18	continue sur A ,p.	11
$\mathcal{C}(A, B)$,p.	11	continuité d'une fonction,p.	13
$\mathcal{C}^0(A, B)$,p.	11	continuité en deux variables, ..p.	11
\mathcal{C}^1 ,p.	17	dérivée partielle par rapport	
$\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$,p.	17	à la deuxième variable, ..p.	17
\mathcal{C}^2 ,p.	21	dérivée partielle par rapport	
$\mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$,p.	21	à la première variable, ..p.	17
div,p.	27	dérivée partielle	
grad f ,p.	20	par rapport à x ,p.	17
grad,p.	27	dérivée partielle	
rot,p.	27	par rapport à y ,p.	17
$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$,p.	17	dérivée suivant le vecteur h , ..p.	19
$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$,p.	17	dérivée suivant un vecteur,p.	19
$d\omega$,p.	26	différentielle extérieure,p.	26
boule fermée ℓ_1		distance ℓ_2 ,p.	4
de dimension n ,p.	6	distance euclidienne,p.	4
boule fermée ℓ_2		divergence,p.	27
de dimension n ,p.	4	ensemble fermé,p.	14
boule fermée ℓ_∞		ensemble ouvert,p.	14
de dimension n ,p.	5	extremum local, 22	
boule ouverte ℓ_1		fonction coordonnée,p.	7
de dimension n ,p.	6	fonction dérivée partielle,p.	17
boule ouverte ℓ_2		fonction de classe \mathcal{C} ,p.	17
de dimension n ,p.	4	fonction de classe \mathcal{C}^2 ,p.	21
boule ouverte ℓ_∞		fonction implicite,p.	19
de dimension n ,p.	5	forme différentielle de degré 0, p.	25
circonférence ℓ_1		forme différentielle de degré 1, p.	25
de dimension n ,p.	5	forme différentielle de degré 2, p.	25
circonférence ℓ_∞ ,p.	5	forme différentielle de degré 3, p.	26
classe \mathcal{C}^0 ,p.	11	forme différentielle exacte,p.	27
col,p.	22		

forme différentielle fermée,p.	27
gradient,p.	27
inégalité de Schwarz,p.	4
inégalité triangulaire,p.	3
inégalités triangulaires,p.	6
limite d'une fonction, p. 7, p.	10
matrice jacobienne, . p. 18, . p.	24
maximum absolu,p.	15
maximum local,p.	22
minimum absolu,p.	15
minimum local,p.	22
norme ℓ_1 ,p.	5
norme ℓ_2 ,p.	4
norme euclidienne,p.	4
norme infinie,p.	5
norme sur \mathbb{R}^n ,p.	3
normes équivalentes,p.	6
ouvert étoilé,p.	28
point critique,p.	22
point selle,p.	22
prolongeable par continuité, ...p.	11
rotationnel,p.	27
sphère ℓ_2 de dimension n ,p.	4
vecteur gradient,p.	20