Séminaire BOURBAKI Mars 2010
62ème année, 2009-2010, n$^{\text{o}}$ 1020

# LA CLASSIFICATION DES GROUPES $p$-COMPACTS [d'après Andersen, Grodal, Møller, et Viruel]

par **Bob OLIVER**

## INTRODUCTION

A chaque groupe topologique $G$ on associe un classifiant $BG$, originellement construit par Milnor, dont l'une des propriétés est que son espace de lacets $\Omega BG$ a le type d'homotopie de $G$. Réciproquement, pour tout espace $Y$, l'espace de lacets $\Omega Y$ admet une multiplication (composition des lacets) qui vérifie à homotopie près les axiomes de groupe.

Un *espace de lacets finis* est un complexe cellulaire $X$ fini auquel on peut associer un «classifiant» $BX$ : un espace topologique dont l'espace de lacets $\Omega(BX)$ a le type d'homotopie de $X$. Le prototype d'un espace de lacets fini est un groupe de Lie compact $G$, auquel on associe son classifiant $BG$ dans le sens de Milnor. D'autres exemples ont été construits dans les années 60 (voir par exemple [St]), mais ils avaient tous la propriété que pour tout nombre premier $p$, la cohomologie mod $p$ de l'espace était isomorphe à la cohomologie mod $p$ d'un groupe de Lie compact.

La résolution de la conjecture de Sullivan, et surtout les travaux de Lannes [La], ont permis d'étudier ces espaces de manière plus approfondie. Dwyer et Wilkerson [DW2] ont eu l'idée de regarder des versions locales des espaces de lacets finis, et d'y associer des structures déjà connues pour les groupes de Lie compacts. Pour un nombre premier $p$ fixé, ils ont défini un *groupe $p$-compact* comme un triplet $(X, BX, i)$, où $X$ et $BX$ sont des espaces, la cohomologie de $X$ modulo $p$ est finie, $BX$ est «$p$-complet», et $i$ est une équivalence d'homotopie entre $X$ et l'espace des lacets $\Omega(BX)$ sur $BX$. On considère $BX$ comme «classifiant» de $X$. Deux groupes $p$-compacts $(X, BX, i)$ et $(Y, BY, j)$ sont *isomorphes* si $BX$ et $BY$ ont même type d'homotopie. Dwyer et Wilkerson ont démontré que ces objets admettent des tores maximaux et des groupes de Weyl d'une façon qui généralise ces structures dans le cas d'un groupe de Lie.

Une *pseudo-réflexion $p$-adique* est un automorphisme d'un $\mathbb{Z}_p$-module $L$ libre de type fini qui agit par l'identité sur un sous-module de corang 1. Un *groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques* est un couple $(\Gamma, L)$, où $L$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini et $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(L)$ est un sous-groupe fini engendré par des pseudo-réflexions. Dwyer et Wilkerson ont démontré que le groupe de Weyl d'un groupe $p$-compact connexe $(X, BX, i)$, avec son action sur l'homotopie de $BT_p^\wedge$ (le «$p$-complété» de $BT$), est un groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques.

Depuis les travaux de Dwyer et Wilkerson, ces groupes de pseudo-réflexions $p$-adiques sont le point de départ pour toute tentative de classifier les groupes $p$-compacts. Le résultat principal sur lequel je vais rapporter ici, démontré par Andersen, Grodal, Møller et Viruel, est que pour un nombre premier $p$ impair, cette correspondance est bijective : à tout groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques on peut associer un groupe $p$-compact connexe, unique à isomorphisme près, dont le groupe de Weyl est le groupe donné. Quand $p = 2$, cette correspondance n'est pas bijective : les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$ donnent un contre-exemple. Mais dans ce cas aussi, Andersen et Grodal d'un côté, et Møller de l'autre, ont réussi à classifier les groupes 2-compacts connexes (et même les groupes $p$-compacts non connexes), en fonction des groupes de pseudo-réflexions 2-adiques munis de certaines structures supplémentaires.

La terminologie générale de Dwyer et Wilkerson pour étudier les groupes $p$-compacts est résumée en Section 1. La classification des groupes de pseudo-réflexions $p$-adiques est expliquée en Section 2. Les énoncés des principaux théorèmes de la classification sont présentés en Section 3, et quelques éléments des démonstrations résumés en Sections 4–6. Après, nous décrivons certaines applications en Sections 7–8.

## 1. LA STRUCTURE DES GROUPES $p$-COMPACTS

Avant d'énoncer ces résultats de manière plus détaillée, il faut expliquer la terminologie.

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Notons $\mathrm{appl}(X,Y)$ l'espace de toutes les applications (continues) de $X$ vers $Y$. Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est une application, $\mathrm{appl}(X,Y)_f$ est l'espace des applications homotopes à $f$ : la composante connexe dans $\mathrm{appl}(X,Y)$ qui contient $f$. Si $X$ et $Y$ sont munis de points de base $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, une application $f\colon X \longrightarrow Y$ est *pointé* si $f(x_0) = y_0$. Notons $\mathrm{Aut}(X) \subseteq \mathrm{appl}(X,X)$ le monoïde topologique des équivalences d'homomtopie $X \xrightarrow{\simeq} X$, et $\mathrm{Out}(X) = \pi_0(\mathrm{Aut}(X))$ le groupe des classes d'homotopie d'éléments de $\mathrm{Aut}(X)$.

Par la *$p$-complétion* $X_p^\wedge$ d'un espace $X$ nous voulons toujours dire la complétion dans le sens de Bousfield et Kan. On dira qu'une application $f\colon X \longrightarrow Y$ est une *$p$-équivalence* si elle induit un isomorphisme en homologie mod $p$. Quand le groupe $\pi_1(X)$ est fini (fini dans chaque composante si $X$ n'est pas connexe par arcs), l'application naturelle $X \xrightarrow{\iota_X} X_p^\wedge$ est universelle parmi toutes les $p$-équivalences $f\colon X \longrightarrow Y$. Plus précisément, pour toute $p$-équivalence $f\colon X \longrightarrow Y$ il existe $j\colon Y \longrightarrow X_p^\wedge$, unique à homotopie près, telle que $j \circ f \simeq \iota_X$. L'espace $X$ est *$p$-complet* si $\iota_X$ est une équivalence d'homotopie. En général, une application continue $f\colon X \longrightarrow Y$ induit une équivalence $X_p^\wedge \xrightarrow{\simeq} Y_p^\wedge$ si et seulement si $f$ est une $p$-équivalence.

Pour tout groupe $p$-compact $X$ de classifiant $BX$, $\pi_1(BX) \cong \pi_0(X)$ est fini (puisque $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ est finie par définition), et $\pi_1(BX)$ est donc un $p$-groupe puisque $BX$ est $p$-complet. Le groupe des composantes connexes de $X$ est donc toujours un $p$-groupe.

Pour tout groupe de Lie compact $G$ dont $\pi_0(G)$ est un $p$-groupe, $G^\wedge_p \simeq \Omega(BG^\wedge_p)$, et donc $G^\wedge_p$ est un groupe $p$-compact avec le classifiant $BG^\wedge_p$.

Un *groupe $p$-torique* est un groupe de Lie compact dont la composante connexe est un tore et le groupe des composantes un $p$-groupe. Si $X$ est un groupe $p$-compact, et $BX$ son classifiant, un *sous-groupe $p$-torique* de $X$ est un couple $(P, f)$ où $P$ est un groupe $p$-torique et $f\colon BP \longrightarrow BX$ est une application pointé, qui est un «monomorphisme» dans le sens qu'il n'y a pas de $p$-sous-groupe $1 \neq Q \trianglelefteq P$ tel que $f$ se factorise par $B(P/Q)$.

L'espace de toutes les applications $BP \longrightarrow BX$ homotopes à $f$ est lui-même le classifiant d'un groupe $p$-compact, qu'on appelle le *centralisateur* de $P$ dans $X$ :

$$B\mathcal{C}_X(P, f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{appl}(BP, BX)_f.$$

L'évaluation en un point de base de $BP$ définit une application de $B\mathcal{C}_X(P, f)$ vers $BX$, qu'on considère comme l'inclusion du centralisateur dans $X$. Si $G$ est un groupe de Lie connexe (ou tel que $\pi_0(G)$ est un $p$-groupe), et $X$ est le groupe $p$-compact correspondant avec $BX = BG^\wedge_p$, alors pour tout sous-groupe $p$-torique $P \leq G$, $B\mathcal{C}_X(P) \cong BC_G(P)^\wedge_p$ (comme conséquence de la conjecture de Sullivan et des résultats de Lannes), et $\mathcal{C}_X(P)$ est donc le centralisateur de $P$ dans le sens usuel.

Un tore maximal de $X$ est un sous-groupe qui est un tore, et qui est maximal dans le sens usuel. Un des résultats principaux de [DW2] est que chaque groupe $p$-compact admet un tore maximal $f\colon BT^\wedge_p \longrightarrow BX$, unique à homotopie près, et que la composée

$$BT^\wedge_p \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathrm{appl}(BT^\wedge_p, BT^\wedge_p)_{\mathrm{Id}} = B\mathcal{C}_{T^\wedge_p}(T) \xrightarrow{\ f\circ -\ } \mathrm{appl}(BT^\wedge_p, BX)_f = B\mathcal{C}_X(T)$$

est un revêtement fini à homotopie près. (Autrement dit, $T$ est d'indice fini dans son centralisateur.)

Si $T$ est un tore de rang $n$, le $p$-complété $BT^\wedge_p$ de $BT$ est un espace d'Eilenberg-MacLane du type $K({\mathbb{Z}_p}^n, 2)$ : $\pi_2(BT^\wedge_p) \cong {\mathbb{Z}_p}^n$ et tous les autres groupes d'homotopie sont triviaux. Le groupe $\mathrm{Out}(BT^\wedge_p)$ de ses automorphismes à homotopie près est donc isomorphe à $GL_n(\mathbb{Z}_p)$, et non à $\mathrm{Aut}(T) \cong GL_n(\mathbb{Z})$. Si $(T, f)$ est un tore maximal de $X$, le *groupe de Weyl* de $X$ est le sous-groupe $W \leq \mathrm{Out}(BT^\wedge_p)$ de tous les $\alpha\colon BT^\wedge_p \xrightarrow{\ \simeq\ } BT^\wedge_p$ tels que $f \circ \alpha \simeq f$. Un des théorèmes principaux de Dwyer et Wilkerson [DW2, Theorem 9.7] est que pour $X$ connexe, $W$ est fini, et son action sur le $\mathbb{Z}_p$-module $L = \pi_2(BT^\wedge_p)$ est engendré par des pseudo-réflexions : des éléments qui fixent un sous-module de corang 1 dans $L$.

Dans leur article [DW2], Dwyer et Wilkerson définissent aussi le *normalisateur* $\mathcal{N}$ du tore maximal $(T, f)$ d'un groupe $p$-compact $X$. Le normalisateur admet un classifiant $B\mathcal{N}$ dont le revêtement universel est $BT^\wedge_p$, et tel que $\pi_1(B\mathcal{N})$ est le groupe de Weyl de $X$. On peut donc considérer $\mathcal{N}$ comme une extension du tore $T$ par le groupe de Weyl. Quand $X$ est le $p$-complété d'un groupe de Lie compact $G$, et $T$ est un tore maximal de $G$, $B\mathcal{N}$ est un «$p$-complété partiel» de $BN_G(T)$ (on complète le revêtement universel mais pas le groupe fondamental). En général, $\mathcal{N}$ n'est pas un groupe $p$-compact puisque $\pi_0(\mathcal{N}) = \pi_1(B\mathcal{N})$ n'est pas un $p$-groupe, mais $\mathcal{N} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(B\mathcal{N})$ est un espace de lacets fini.

Un sous-groupe $p$-torique $(P, f)$ d'un groupe $p$-compact est *central* si son centralisateur $\mathcal{C}_X(P, f)$ est isomorphe à $X$ en tant que groupe $p$-compact ; c'est-à-dire si l'inclusion $B\mathcal{C}_X(P, f) \longrightarrow BX$ est une équivalence d'homotopie. Par [DW3, Theorem 1.2], tout groupe $p$-compact $X$ admet un sous-groupe central maximal (unique à homotopie près), qu'ils appellent le *centre* $Z(X)$ de $X$.

En général, quand $X$ est un groupe $p$-compact, et $BX$ est son classifiant, nous noterons $T_X$ son tore maximal, $\mathcal{N}_X$ le normalisateur de $T_X$ (en tant qu'espace de lacets fini), $L_X = \pi_2(BT_X{}_p^\wedge)$, et $W_X$ le groupe de Weyl de $X$. En particulier, $L_X$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre, et $(W_X, L_X)$ est un groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques. Toutes ces structures jouent un rôle central dans la classification des groupes $p$-compacts.

## 2. LA CLASSIFICATION DES GROUPES DE PSEUDO-RÉFLEXIONS

Un *groupe de pseudo-réflexions* sur un corps $K$ est un couple $(\Gamma, V)$, où $\Gamma$ est un groupe fini, $V$ est un $K$-espace vectoriel de dimension fini, et $\Gamma \leq \mathrm{Aut}_K(V)$ est un sous-groupe fini engendré par des pseudo-réflexions : des éléments qui laissent fixe un sous-espace de codimension 1 dans $V$. Un *groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques* est un couple $(\Gamma, L)$ où $L$ est un $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-module de type fini sans torsion, et $(\Gamma, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L)$ est un groupe de pseudo-réflexions sur $\mathbb{Q}_p$.

Pour chaque nombre premier $p$, on souhaite classifier les groupes $p$-compacts connexes en les comparant avec la liste de tous les groupes de pseudo-réflexions $p$-adiques. Pour commencer donc, il faut classifier les groupes de pseudo-réflexions $p$-adiques.

Les groupes de pseudo-réflexions irréductibles sur le corps $\mathbb{C}$ ont été classifiés par Shephard et Todd [ST]. Vingt ans plus tard, motivés par le problème de Steenrod (voir § 7), Clark et Ewing [CE] ont déterminé, pour chaque nombre premier $p$, lesquels de ces représentations peuvent se réaliser sur le corps $p$-adique $\mathbb{Q}_p$.

Nous présentons une version de cette liste dans la Table 1. Pour $m, n > 1$ et $k|m$, $G(m, 1, n) \cong C_m \wr \Sigma_n$ est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices diagonales d'ordre $m$ et les matrices de permutation, et $G(m, k, n) \trianglelefteq G(m, 1, n)$ est le sous-groupe d'indice $k$ qui contient les matrices de permutation. Les groupes diédraux de type (2b) sont les groupes $G(m, m, 2)$. Pour les autres groupes de rang deux (les types 4–22), $H(m, \mathbf{X})$ note le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par $e^{2\pi i/m} \cdot \mathrm{Id}$, et le groupe binaire du tetraèdre ($\mathbf{X} = \mathbf{T}$), de l'octaèdre ($\mathbf{X} = \mathbf{O}$) ou de l'icosaèdre ($\mathbf{X} = \mathbf{I}$) ; et $\frac{1}{k}H(m, \mathbf{X}) \leq H(m, \mathbf{X})$ est un sous-groupe d'indice $k$. Les *degrés* d'un groupe de pseudo-réflexions complexe $(\Gamma, V)$ est la suite des degrés des générateurs de l'algèbre des invariants $S_{\mathbb{C}}(V)^\Gamma$ (une algèbre polynomiale par [ST, 5.1]), quand les éléments de $V$ sont en degré un. Le corps minimal $\mathbb{Q}(\chi_V)$ de réalisation de $(\Gamma, V)$ est donné, où $\mu_m = e^{2\pi i/m}$ (par [CE, p.429], l'indice de Schur d'un groupe de pseudo-réflexions complexes est toujours un.) Les deux dernières colonnes montrent l'ensemble des nombres premiers

$p$ pour lesquels $(\Gamma, V)$ se réalise sur $\mathbb{Q}_p$, et parmi ceux-ci, lesquels divisent $|\Gamma|$. (Pour les groupes marqués par une étoile, il n'y a pas de restrictions sur $p$ si $\mathbb{Q}(\chi_V) = \mathbb{Q}$. Il s'agit des groupes de Weyl de $SO(n)$, $Sp(n)$, et $G_2$. Un $\bullet$ dans la dernière colonne indique que les informations ne sont pas complètes.) Dans la dernière colonne, nous donnons aussi des références à la première construction d'un groupe $p$-compact qui réalise le groupe de pseudo-réflexions en question.

| type | rg | $\Gamma$ | $\lvert\Gamma\rvert$ | degrés | $\mathbb{Q}(\chi_V)$ | $p$ | $p \mid \lvert\Gamma\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | $\Sigma_{n+1}$ | $(n+1)!$ | $2, 3, \ldots, n+1$ | $\mathbb{Q}$ | tous | $p \leq n+1$ |
| 2a | $n$ | $G(m,k,n)$ | $\frac{m}{k} m^{n-1} n!$ | $m, \ldots, (n-1)m, \frac{nm}{k}$ | $\mathbb{Q}(\mu_m)$ | $p \equiv 1\ (m) *$ | $\bullet$ [Q, N1] |
| 2b | 2 | $D_{2m}$ | $2m$ | $2, m$ | $\mathbb{Q}(\mu_m + \mu_m^{-1})$ | $p \equiv \pm 1\ (m) *$ | $\bullet$ |
| 3 | 1 | $C_m$ | $m$ | $m$ | $\mathbb{Q}(\mu_m)$ | $p \equiv 1\ (m) *$ | $\bullet$ |
| 4 | 2 | $\frac{1}{3}H(6, \mathbf{T})$ | 24 | $4, 6$ | $\mathbb{Q}(\mu_3)$ | $p \equiv 1\ (3)$ | |
| 5 | 2 | $H(6, \mathbf{T})$ | 72 | $6, 12$ | $\mathbb{Q}(\mu_3)$ | $p \equiv 1\ (3)$ | |
| 6 | 2 | $\frac{1}{3}H(12, \mathbf{T})$ | 48 | $4, 12$ | $\mathbb{Q}(\mu_{12})$ | $p \equiv 1\ (12)$ | |
| 7 | 2 | $H(12, \mathbf{T})$ | 144 | $12, 12$ | $\mathbb{Q}(\mu_{12})$ | $p \equiv 1\ (12)$ | |
| 8 | 2 | $\frac{1}{2}H(8, \mathbf{O})$ | 96 | $8, 12$ | $\mathbb{Q}(i)$ | $p \equiv 1\ (4)$ | |
| 9 | 2 | $H(8, \mathbf{O})$ | 192 | $8, 24$ | $\mathbb{Q}(\mu_8)$ | $p \equiv 1\ (8)$ | |
| 10 | 2 | $\frac{1}{2}H(24, \mathbf{O})$ | 288 | $12, 24$ | $\mathbb{Q}(\mu_{12})$ | $p \equiv 1\ (12)$ | |
| 11 | 2 | $H(24, \mathbf{O})$ | 576 | $24, 24$ | $\mathbb{Q}(\mu_{24})$ | $p \equiv 1\ (24)$ | |
| 12 | 2 | $\frac{1}{2}H(4, \mathbf{O})$ | 48 | $6, 8$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ | $p \equiv 1, 3\ (8)$ | 3 [Z, Ag] |
| 13 | 2 | $H(4, \mathbf{O})$ | 96 | $8, 12$ | $\mathbb{Q}(\mu_8)$ | $p \equiv 1\ (8)$ | |
| 14 | 2 | $\frac{1}{2}H(12, \mathbf{O})$ | 144 | $6, 24$ | $\mathbb{Q}(\mu_3, \sqrt{-2})$ | $p \equiv 1, 19\ (24)$ | |
| 15 | 2 | $H(12, \mathbf{O})$ | 288 | $12, 24$ | $\mathbb{Q}(\mu_{24})$ | $p \equiv 1\ (24)$ | |
| 16 | 2 | $H(10, \mathbf{I})$ | 600 | $20, 30$ | $\mathbb{Q}(\mu_5)$ | $p \equiv 1\ (5)$ | |
| 17 | 2 | $H(20, \mathbf{I})$ | 1200 | $20, 60$ | $\mathbb{Q}(\mu_{20})$ | $p \equiv 1\ (20)$ | |
| 18 | 2 | $H(30, \mathbf{I})$ | 1800 | $30, 60$ | $\mathbb{Q}(\mu_{15})$ | $p \equiv 1\ (15)$ | |
| 19 | 2 | $H(60, \mathbf{I})$ | 3600 | $60, 60$ | $\mathbb{Q}(\mu_{60})$ | $p \equiv 1\ (60)$ | |
| 20 | 2 | $H(6, \mathbf{I})$ | 360 | $12, 30$ | $\mathbb{Q}(\mu_3, \sqrt{5})$ | $p \equiv 1, 4\ (15)$ | |
| 21 | 2 | $H(12, \mathbf{I})$ | 720 | $12, 60$ | $\mathbb{Q}(\mu_{12}, \sqrt{5})$ | $p \equiv 1, 49\ (60)$ | |
| 22 | 2 | $H(4, \mathbf{I})$ | 240 | $12, 20$ | $\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$ | $p \equiv 1, 9\ (20)$ | |
| 23 | 3 | $C_2 \times A_5$ | 120 | $2, 6, 10$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ | $p \equiv 1, 4\ (5)$ | |
| 24 | 3 | $C_2 \times GL_3(2)$ | 336 | $4, 6, 14$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ | $p \equiv 1, 2, 4\ (7)$ | 2 [DW1] |
| 25 | 3 | | 648 | $6, 9, 12$ | $\mathbb{Q}(\mu_3)$ | $p \equiv 1\ (3)$ | |
| 26 | 3 | | 1296 | $6, 12, 18$ | $\mathbb{Q}(\mu_3)$ | $p \equiv 1\ (3)$ | |
| 27 | 3 | | 2160 | $6, 12, 30$ | $\mathbb{Q}(\mu_3, \sqrt{5})$ | $p \equiv 1, 4\ (15)$ | |
| 28 | 4 | $W(F_4)$ | 1152 | $2, 6, 8, 12$ | $\mathbb{Q}$ | tous | $2, 3$ |
| 29 | 4 | | 7680 | $4, 8, 12, 20$ | $\mathbb{Q}(i)$ | $p \equiv 1\ (4)$ | 5 [Ag] |
| 30 | 4 | | 14400 | $2, 12, 20, 30$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ | $p \equiv 1, 4\ (5)$ | |
| 31 | 4 | | $64.6!$ | $8, 12, 20, 24$ | $\mathbb{Q}(i)$ | $p \equiv 1\ (4)$ | 5 [Z, Ag] |
| 32 | 4 | | $216.6!$ | $12, 18, 24, 30$ | $\mathbb{Q}(\mu_3)$ | $p \equiv 1\ (3)$ | |
| 33 | 5 | | $72.6!$ | $4, 6, 10, 12, 18$ | $\mathbb{Q}(\mu_3)$ | $p \equiv 1\ (3)$ | |
| 34 | 6 | | $108.9!$ | $6, 12, 18, 24, 30, 42$ | $\mathbb{Q}(\mu_3)$ | $p \equiv 1\ (3)$ | 7 [Ag] |
| 35 | 6 | $W(E_6)$ | $72.6!$ | $2, 5, 6, 8, 9, 12$ | $\mathbb{Q}$ | tous | $2, 3, 5$ |
| 36 | 7 | $W(E_7)$ | $8.9!$ | $2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$ | $\mathbb{Q}$ | tous | $2, 3, 5, 7$ |
| 37 | 8 | $W(E_8)$ | $192.10!$ | 2,8,12,14,18,20,24,30 | $\mathbb{Q}$ | tous | $2, 3, 5, 7$ |

Table 1

Avec la liste de Clark et Ewing comme point de départ, le théorème suivant explique comment déterminer tous les groupes de pseudo-réflexions $p$-adiques (irréductibles ou non). Pour un groupe de Lie compact connexe $G$, notons $T_G$ un tore maximal de $G$, $L_G = \pi_2(BT_G) \cong \pi_1(T_G)$, et $W_G$ le groupe de Weyl muni de son action sur $T_G$ et sur $L_G$. Un groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques est *exotique* s'il n'est pas de la forme $(W_G, \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L_G)$ pour un groupe de Lie compact connexe $G$.

THÉORÈME 2.1 ([AGMV, Theorem 11.1]). — *Pour tout groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques $(\Gamma, L)$, il existe un groupe de Lie compact connexe $G$, et des groupes de pseudo-réflexions $p$-adiques, irréductibles et exotiques $(\Gamma_i, L_i)$ $(1 \leq i \leq k,\ k \geq 0)$, tels que*
- $(\Gamma, L) \cong (W_G, \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L_G) \times (\Gamma_1, L_1) \times \cdots \times (\Gamma_k, L_k)$, *et*
- $(\Gamma_i, \mathbb{Q}_p \otimes L_i)$ *est* $\mathbb{Q}_p[\Gamma_i]$*-irréductible et* $(\Gamma_i, \mathbb{F}_p \otimes L_i)$ *est* $\mathbb{F}_p[\Gamma_i]$*-irréductible pour chaque* $i = 1, \dots, k$.

*En outre, pour chaque $i$, le $\mathbb{Z}_p[\Gamma_i]$-module $L_i$ est uniquement déterminé par le $\mathbb{Q}_p[\Gamma_i]$-module $\mathbb{Q}_p \otimes L_i$.*

Nous résumons rapidement la démonstration du Théorème 2.1. On remarque d'abord, pour tout groupe de pseudo-réflexions $(\Gamma, V)$ sur $\mathbb{Q}_p$ tel que $V = V_1 \times V_2$ et les $V_i$ sont $\Gamma$-invariants, que le groupe se factorise aussi : $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ où $\Gamma_i$ est un groupe de pseudo-réflexions sur $V_i$ et agit trivialement sur $V_{3-i}$. Ceci est une conséquence immédiate du fait que chaque pseudo-réflexion dans $\Gamma$ opère non-trivialement sur un des $V_i$ et trivialement sur l'autre. Soit $\Gamma_i \trianglelefteq \Gamma$ le sous-groupe engendré par les pseudo-réflexions qui agissent non-trivialement sur $V_i$. Alors $\Gamma_i$ agit trivialement sur $V_{3-i}$, $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ puisque $\Gamma$ est engendré par ses pseudo-réflexions, et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 1$ puisque tout élément dans l'intersection agit trivialement sur $V$.

Soit $(\Gamma, V)$ un groupe de pseudo-réflexions exotique et irréductible sur $\mathbb{Q}_p$. On démontre, au cas-par-cas, qu'il existe un $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-réseau $L \subseteq V$ tel que $L/pL$ est $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-irréductible. En particulier, si $L' \subseteq V$ est un autre $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-réseau, alors $L/pL \cong L'/pL'$ (en tant que $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-modules) par la théorie des représentations modulaires (voir par exemple [Se, p. 138]), ce qui entraîne que $L \cong L'$. Le réseau $L$ est donc unique à isomorphisme près.

Soit maintenant $(\Gamma, L)$ un groupe de pseudo-réflexions $p$-adique. Soit $V = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$. Supposons que $V$ contient une composante exotique : soit $(\Gamma, V) = (\Gamma_1, V_1) \times (\Gamma_2, V_2)$ où $V_2$ est $\mathbb{Q}_p[\Gamma_2]$-irréductible, et $(\Gamma_2, V_2)$ n'est pas le groupe de Weyl d'un groupe de Lie. Soit $L_i = L \cap V_i$ $(i = 1, 2)$. A l'aide du fait que $L_2/pL_2$ est irréductible et chaque pseudo-réflexion dans $\Gamma$ opère non-trivialement là-dessus, on démontre que $L = L_1 \times L_2$, et donc que $(\Gamma, L)$ se décompose en somme directe.

Maintenant, supposons que $(\Gamma, L)$ et $V = \mathbb{Q} \otimes L$ sont tels qu'aucune composante irréductible de $V$ n'est exotique. Il reste à montrer que dans cette situation, il existe un groupe de Lie compact $G$ tel que $(\Gamma, L) \cong (W_G, \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L_G)$. On montre d'abord que le caractère de $V$ est à valeurs rationnelles, et que l'indice de Schur de chaque composante est égal à 1. Il existe donc un $\mathbb{Q}[\Gamma]$-module $V'$ tel que $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} V'$. Ensuite, on démontre qu'il existe un $\mathbb{Z}_{(p)}[\Gamma]$-réseau $L' \subseteq L$, puis un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-réseau $L'' \subseteq L'$, tels que $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L'' \cong L$.

Il reste donc de démontrer que le groupe de pseudo-réflexions $(\Gamma, L'')$ peut se réaliser comme groupe de Weyl d'un groupe de Lie compact connexe. On construit d'abord un système de racines sur $(\Gamma, L'')$ d'une façon explicite. Puisque tout système de racines est le système de racines d'un groupe de Lie compact connexe (voir, par exemple, [B9, § 4.8–9]), on conclut que $(\Gamma, L'')$ (et donc $(\Gamma, L)$) se réalise par un groupe de Lie compact connexe.

## 3. LA CLASSIFICATION DES GROUPES $p$-COMPACTS

Nous sommes maintenant prêts à énoncer quelques-uns des théorèmes principaux de classification. Commençons avec le cas où $p$ est impair ; cela nous permet d'éviter certaines complications. Le théorème suivant, dû à Andersen, Grodal, Møller, et Viruel, classifie d'une façon précise et explicite les groupes $p$-compacts connexes dans ce cas :

Théorème 3.1 ([AGMV, Theorem 1.1]). — *Soit $p$ un nombre premier impair. Il existe une bijection de l'ensemble des groupes $p$-compacts connexes à isomorphisme près vers l'ensemble des groupes de pseudo-réflexions $p$-adiques à isomorphisme près : une bijection qui envoie un groupe $p$-compact $X$ vers le couple $(W_X, L_X)$.*

Plus généralement, [AGMV, Theorem 1.4] démontre, pour toute paire de groupes $p$-compacts $X$ et $X'$ (connexe ou non), que $X \cong X'$ si et seulement si $\mathcal{N}_X \cong \mathcal{N}_{X'}$. En plus, la restriction à $\mathcal{N}$ définit une équivalence d'homotopie de $\mathrm{Aut}(BX)$ — l'espace des équivalences d'homotopie $BX \xrightarrow{\simeq} BX$ — vers $\mathrm{Aut}(B\mathcal{N})$. En particulier, toute équivalence entre les normalisateurs des tores maximaux se prolonge à une équivalence entre les groupes, unique à homotopie près. Comme on verra plus tard, cette formulation plus générale joue un rôle crucial dans la démonstration inductive du Théorème 3.1.

Pour $p = 2$, les deux articles [AG2] et [M1] présentent plusieurs versions d'une classification des groupes 2-compacts. La plus simple (valable seulement pour des groupes connexes) fait intervenir une comparaison directe avec les groupes de Lie compacts. Notons $DI(4)$ le groupe 2-compact connexe construit par Dwyer et Wilkerson [DW1], qui réalise le groupe de pseudo-réflexions 2-adiques de type 24 dans la liste de Clark et Ewing (Table 1). Il est le seul groupe 2-compact connexe et irréductible qui est exotique.

Théorème 3.2 ([AG2, Theorem 1.1], [M1, Corollary 1.2]). — *Soit $X$ un groupe 2-compact connexe. Alors il existe un groupe de Lie compact connexe $G$, et $s \geq 0$, tels que $BX \simeq BG_2^\wedge \times BDI(4)^s$.*

Ce théorème a été conjecturé par Dwyer, et démontré indépendamment par Andersen–Grodal et par Møller. Dans chacun des articles [AG2] et [M1], le Théorème 3.2 est un cas particulier de résultats plus généraux de classification des groupes 2-compacts.

Comme nous avons déjà remarqué, le groupe de Weyl $(W_X, L_X)$ ne suffit pas pour classifier les groupes 2-compacts connexes. Dans [AG2], Andersen et Grodal considèrent la *donnée radicielle p-adique* («$\mathbb{Z}_p$-root datum») d'un groupe $p$-compact. Une donnée radicielle $p$-adique est un triplet $\mathbf{D} = (\Gamma, L, \{\mathbb{Z}_p b_\sigma\})$, où $(\Gamma, L)$ est un groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques, et pour toute pseudo-réflexion $\sigma \in \Gamma$, $\mathbb{Z}_p b_\sigma \subseteq L$ est un sous-module de rang une qui contient $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \sigma)$, et $g(\mathbb{Z}_p b_\sigma) = \mathbb{Z}_p b_{g\sigma g^{-1}}$ pour tout $g \in \Gamma$. Ils associent à tout groupe $p$-compact connexe $X$ la donnée radicielle $\mathbf{D}_X = (W_X, L_X, \{\mathbb{Z}_p b_\sigma\})$, où pour chaque pseudo-réflexion $\sigma$, on définit $\mathbb{Z}_p b_\sigma = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \sigma) \subseteq L_X$ si une certaine extension par $\langle\sigma\rangle$ est scindée, et $\mathbb{Z}_p b_\sigma = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} + \sigma) \subseteq L_X$ sinon.

Théorème 3.3 ([AG2, Theorem 1.2]). — *Soit $p$ un nombre premier quelconque. Il existe une bijection de l'ensemble des groupes $p$-compacts connexes à isomorphisme près vers l'ensemble des données radicielles $p$-adiques à isomorphisme près : une bijection qui envoie un groupe $p$-compact $X$ vers le triplet $(W_X, L_X, \{\mathbb{Z}_p b_\sigma\})$.*

Par contraste, Møller [M1] a formulé ses résultats en regardant comment $X$ et ses automorphismes sont déterminés (à isomorphisme près) par ceux de $\mathcal{N}_X$. Pour éviter des définitions compliquées, nous donnons une version un peu affaiblie de son théorème principal.

Théorème 3.4 ([M1, Theorem 1.1(1)]). — *Tout groupe 2-compact connexe $X$ est* $N$-déterminé*, dans le sens qu'il satisfait aux deux conditions suivantes.*

– *Si $Y$ est un autre groupe 2-compact connexe tel que $\mathcal{N}_Y \cong \mathcal{N}_X$, alors $Y \cong X$.*
– *L'application* $\mathrm{Out}(BX) \longrightarrow \mathrm{Out}(B\mathcal{N}_X)$ *induit par la restriction est injective.*

Plus généralement, chacun de ces deux articles [AG2] et [M1] contient des résultats de classification valables pour tous les groupes 2-compacts, connexes ou non. La différence principale avec le cas $p$ impair est que la classe d'isomorphisme de $\mathcal{N}_X$ seule ne suffit pas pour déterminer $X$ à isomorphisme près ; au moins, pas pour des groupes 2-compacts non connexes. Par exemple, les normalisateurs des tores maximaux des deux groupes $O(2n)$ et $SO(2n{+}1)$ sont isomorphes, mais les groupes 2-compacts qu'ils définissent ne sont pas isomorphes (puisque $BO(2n)^\wedge_2$ et $BSO(2n{+}1)^\wedge_2$ n'ont pas le même type d'homotopie).

Dans [AG2, Theorem 1.6], Andersen et Grodal construisent une bijection (pour n'importe quel nombre premier $p$) entre les groupes $p$-compacts à isomorphisme près, et un certain ensemble de données qui consistent en une donnée radicielle $\mathbf{D}$, un $p$-groupe $\pi$ et une «extension» de $\mathbf{D}$ par $\pi$. A chaque groupe $p$-compact $X$ à composante connexe $X_0$, ils associent les données $\mathbf{D}_{X_0}$, $\pi_0(X) = X/X_0$, et l'extension de $\mathbf{D}_{X_0}$ par $\pi_0(X)$ induite par $X$. En outre, ils décrivent $\mathrm{Aut}(BX)$, pour un groupe $p$-compact $X$, en fonction de ces données et de leurs automorphismes.

Dans [M1, Theorem 1.1(2)], Møller montre, pour tout groupe 2-compact $X$ à composante connexe $X_0$, que $X$ et ses automorphismes sont «détectés» par le couple $(\mathcal{N}_X, \mathcal{N}_{X_0})$. Les conditions précises d'être «totalement $N$-détecté» sont trop compliquées pour les répéter ici ; nous référons à [M1, § 1].

## 4. DÉCOMPOSITIONS HOMOTOPIQUES

Pour démontrer ces théorèmes de classification, la difficulté principale est de construire des équivalences d'homotopie $BX \xrightarrow{\simeq} BX'$ quand $X$ et $X'$ sont deux groupes $p$-compacts avec le même groupe de Weyl ou le même normalisateur. Une façon de le faire est de décomposer l'espace $BX$ comme une colimite d'espaces plus simples, puis de définir des applications vers $BX'$ sur chacun de ces morceaux. Ceci est le bût des *décompositions homotopiques* de ces classifiants.

Soit $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Top}$ un foncteur d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des espaces topologique. La *colimite homotopique* de $F$ est l'espace

$$\operatorname*{hocolim}_{\mathcal{C}}(F) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\coprod_{n\geq 1}\ \coprod_{c_0\to\cdots\to c_n} F(c_0)\times\Delta^n\Big)\Big/\!\sim.$$

Pour chaque $0 \leq i \leq n$, soit $d^i\Delta^n$ la face de $\Delta^n$ qui contient tous les sommets de $\Delta^n$ sauf le $i$-ième. Pour toute suite de morphismes $\sigma = (c_0 \to \cdots \to c_n)$, soit $d_i\sigma$ la suite construite en enlevant l'objet $c_i$ de $\sigma$. On identifie la face $F(c_0)\times d^i\Delta^n$ de la composante $(F(c_0)\times\Delta^n)_\sigma$ avec la composante $(F(c_0)\times\Delta^{n-1})_{d_i\sigma}$ (ou avec $(F(c_1)\times\Delta^{n-1})_{d_i\sigma}$ si $i=0$) de la façon évidente. En plus, si la suite $\sigma$ contient un morphisme identique ($\sigma$ est «dégénéré»), et $\sigma'$ est la même suite sans ce morphisme, on identifie $(F(c_0)\times\Delta^n)_\sigma$ avec la composante $(F(c_0)\times\Delta^{n-1})_{\sigma'}$.

Autrement dit, on commence avec la réunion disjointe des espaces $F(c)$, pour tout $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Ensuite, pour tout morphisme $\varphi\colon c \to d$ dans $\mathcal{C}$, différent de l'identité, on attache une copie de $F(c)\times[0,1]$, en identifiant $F(c)\times 0$ avec $F(c)$, et en attachant $F(c)\times 1$ à $F(d)$ par $F(\varphi)\colon F(c) \longrightarrow F(d)$. Le résultat de cette construction est le «1-squelette» de $\operatorname{hocolim}(F)$. Après, on attache des simplexes en dimension $\geq 2$, correspondants à chaque suite de morphismes composables dans $\mathcal{C}$.

Une *décomposition homotopique* d'un groupe $p$-compact $X$ consiste en une petite catégorie $\mathcal{C}$, un foncteur $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Top}$ et une équivalence d'homotopie (ou une $p$-équivalence) de $\operatorname{hocolim}(F)$ vers $BX$. Pour les constructions que nous allons décrire, l'exemple le plus important d'une décomposition homotopique est la décomposition par centralisateurs des $p$-sous-groupes élémentaires abéliens. L'idée originale de ces décompositions, dans le contexte du classifiant d'un groupe de Lie compact, est due à Jackowski et McClure [JM]. La décomposition par centralisateurs d'un groupe $p$-compact a été construite par Dwyer et Wilkerson [DW3].

Pour un groupe $p$-compact $X$, soit $\mathcal{A}_p(X)$ la catégorie dont les objets sont les couples $(V,\varphi)$, où $V \neq 1$ est un $p$-groupe élémentaire abélien et $\varphi\colon BV \longrightarrow BX$ est un «monomorphisme» : dans le sens que $W \leq V$ et $\varphi|_{BW} \simeq *$ (homotope à une application constante) entraînent $W = 1$. (On ajoute des contraintes supplémentaires pour assurer que la catégorie soit petite.) Un morphisme de $(V,\varphi)$ vers $(W,\psi)$ est un monomorphisme de groupes $\alpha\colon V \longrightarrow W$ tel que $\psi\circ B\alpha \simeq \varphi$. Si $G$ est un groupe de Lie compact, alors $\mathcal{A}_p(G)$ est équivalente à la catégorie dont les objets sont les $p$-sous-groupes élémentaires abéliens de $G$, et les morphismes sont les homomorphismes induits par conjugaison dans $G$.

Dans [DW3, § 10], Dwyer et Wilkerson construisent un foncteur $\alpha_X\colon \mathcal{A}_p(X) \longrightarrow \mathsf{Top}$ qui envoie $(V,\varphi)$ vers $B\mathcal{C}_X(V,\varphi) = \mathrm{appl}(BV,BX)_\varphi$ : le classifiant du centralisateur dans $X$ de $(V,\varphi)$. L'évaluation en un point de base de $BV$ définit une application de $\alpha_X(V,\varphi)$ vers $BX$ pour tout $(V,\varphi)$, et une application

$$a_X\colon \operatorname*{hocolim}_{\mathcal{A}_p(X)}(\alpha_X) \longrightarrow BX.$$

Par [DW3, Theorem 8.1], $a_X$ induit un isomorphisme en cohomologie modulo $p$, et donc une équivalence d'homotopie de la $p$-complétion $\big(\mathrm{hocolim}(\alpha_X)\big)^\wedge_p$ vers $BX$. C'est cette décomposition qu'on appelle la décomposition homotopique de $BX$ par centralisateurs.

Quand $X$ est le groupe $p$-compact défini par un groupe de Lie compact $G$, $\alpha_X$ est équivalent (à $p$-complétion près) au foncteur qui envoie un $p$-sous-groupe élémentaire abélien $V \le G$ vers $BC_G(V)$. Cette décomposition de $BG^\wedge_p$ en tant que colimite homotopique des classifiants $BC_G(V)$, due à Jackowski et McClure [JM], était la décomposition originale d'un classifiant par centralisateurs. Le fait que ces deux constructions sont équivalentes quand $BX = BG^\wedge_p$ est encore une conséquence des théorèmes de Lannes [La] sur les applications de source $BV$.

Supposons maintenant qu'on souhaite construire une application $f$ de $BX$ vers un espace $p$-complet $Y$ (par exemple, une application dont la restriction à $BT_X$ ou à $B\mathcal{N}_X$ est homotope à une application donnée). Supposons en plus qu'on sait construire une application $f_{V,\varphi}\colon \alpha_X(V,\varphi) \longrightarrow Y$ pour chaque objet $(V,\varphi)$ dans $\mathcal{A}_p(X)$, d'une telle façon que les $f_{V,\varphi}$ commutent à homotopie près avec les applications induites par $\alpha_X$. Dans cette situation, Wojtkowiak [Wo] a décrit explicitement les obstructions à l'existence d'une application $f$ qui prolonge toutes les applications $f_{V,\varphi}$. Ces obstructions appartiennent aux groupes de foncteurs dérivés de certaines limites (prises sur la même catégorie $\mathcal{A}_p(X)$), et c'est la détermination de ces groupes (la démonstration qu'ils sont tous triviaux) qui est la partie la plus difficile et la plus technique de la classification des groupes $p$-compacts.

## 5. ÉLÉMENTS DE LA DÉMONSTRATION POUR $p$ IMPAIR

Par le Théorème 2.1, pour démontrer l'existence d'un groupe $p$-compact connexe qui réalise n'importe quel groupe de pseudo-réflexions $p$-adiques (aussi pour $p = 2$), il suffit de montrer, pour chaque groupe $(\Gamma,V)$ de pseudo-réflexions irréductible sur $\mathbb{Q}_p$ et exotique (voir la Table 1), qu'il existe un groupe $p$-compact connexe $X$ tel que $(W_X, \mathbb{Q}\otimes L_X) \cong (\Gamma,V)$. C'est ce que Clark et Ewing on fait dans tous les cas où $p \nmid |\Gamma|$ ; et les autres cas ont été faits par Aguadé [Ag], Zabrodsky [Z], Dwyer et Wilkerson [DW1], et Notbohm [N1] en utilisant de différentes constructions. Une construction un peu plus uniforme est présentée dans [AGMV], où ils profitent du fait que pour chaque $(\Gamma,L)$ exotique, l'algèbre des invariants $S_{\mathbb{Z}_p}(L)^\Gamma$ est polynomiale [AGMV, Theorem 7.3].

Considérons maintenant le problème de l'unicité. Supposons que $X$ et $X'$ soient deux groupes $p$-compacts tels que $(W_X, L_X) \cong (W_{X'}, L_{X'})$. On peut supposer que $X$ est construit d'une façon «canonique» : le produit d'un groupe de Lie compact et d'un groupe $p$-compact exotique construit avec la procédure décrite en [AGMV]. Il faut construire une équivalence d'homotopie $BX \xrightarrow{\simeq} BX'$.

Soit $\mathcal{N}$ le normalisateur d'un tore maximal de $X$. Puisque $p$ est impair, on a $B\mathcal{N} \simeq BT \times_{W_X} EW_X$ (la construction de Borel) par un résultat d'Andersen [An]. Ceci correspond au fait que dans un groupe de Lie compact connexe $G$ avec tore maximal $T$ et groupe de Weyl $W$, l'élément de $H^2(W;T)$ qui décrit $N_G(T)$ en tant qu'extension est toujours d'ordre $\leq 2$. Par conséquent, $\mathcal{N}_X$ ne dépend que de $(W_X, L_X)$, et est équivalent au normalisateur d'un tore maximal de $X'$. Soient $\mathcal{N} = \mathcal{N}_X \simeq \mathcal{N}_{X'}$, et $j\colon \mathcal{N} \longrightarrow X$ et $j'\colon \mathcal{N} \longrightarrow X'$ les inclusions.

On démontre $BX \simeq BX'$ par récurrence sur la «dimension» de $X$ et sur le nombre de composantes connexes. Pour faire fonctionner cette récurrence, il faut démontrer pour chaque $X$ un résultat plus général.

Soit $X$ un groupe $p$-compact (connexe ou non). On dit que «$X$ est déterminé par $\mathcal{N}$» si pour tout $X'$, $BX' \simeq BX$ implique $B\mathcal{N}_{X'} \simeq B\mathcal{N}_X$. On dit que $\mathrm{Aut}(BX)$ est déterminé par $\mathcal{N}$ si les applications

$$\mathrm{Aut}(BX) \xrightarrow[\simeq]{-\circ i} \mathrm{appl}(B\mathcal{N}, BX)_i \xleftarrow[\simeq]{i\circ -} \mathrm{Aut}(B\mathcal{N})$$

sont des équivalences d'homotopie, où $i\colon B\mathcal{N} \longrightarrow BX$ est l'inclusion, et $\mathrm{Aut}(-)$ est l'espace des équivalences d'homotopie.

Les auteurs de [AGMV] démontrent, pour tout groupe $p$-compact $X$, que $X$ et $\mathrm{Aut}(BX)$ sont déterminés par $\mathcal{N}$. Nous décrivons la façon dont ils procèdent en quatre étapes.

**(I) :** Soit $X_1$ la composante connexe de $X$. On démontre que $X$ et $\mathrm{Aut}(BX)$ sont déterminés par $\mathcal{N}$ si $X_1/Z(X_1)$ et $\mathrm{Aut}(B(X_1/Z(X_1)))$ sont déterminés par $\mathcal{N}_{X_1}/Z(X_1)$ [AGMV, Lemma 6.6 & 6.8]. De cette façon, on est réduit au cas $X$ connexe et $Z(X) = 1$.

**(II) :** Quand $X$ et $X'$ sont connexes et de centre trivial, $X$ et $X'$ se factorisent en produits de groupes $p$-compacts simples. Ceci a été démontré par Dwyer et Wilkerson [DW4, Theorems 1.1, 1.4], qui ont montré en même temps que la décomposition de $X$ est déterminé par $(W_X, L_X)$, donc par $\mathcal{N}_X$. En particulier, $X$ est déterminé par $\mathcal{N}_X$ si chaque facteur simple $X_i$ est déterminé par $\mathcal{N}_{X_i}$.

Quand $X = X_1 \times \cdots \times X_k$, et chaque $X_i$ est simple et déterminé par $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{X_i}$ (et $p$ est impair), on décrit [AGMV, Lemma 6.1] une relation entre $\mathrm{Aut}(BX)$ et les $\mathrm{Aut}(BX_i)$ qui est assez précise pour conclure que $\mathrm{Aut}(BX)$ est déterminé par $\mathcal{N}$ si $\mathrm{Aut}(BX_i)$ est déterminé par $\mathcal{N}_i$ pour chaque $i$. Il reste donc à considérer le cas où $X$ est simple (et de centre trivial).

**(III) :** Supposons maintenant $X$ et $X'$ connexes et simples, et $Z(X) = Z(X') = 1$. Puisque $Z(X) = 1$, pour tout $(V, \varphi)$ dans $\mathcal{A}_p(X)$, $\mathcal{C}_X(V, \varphi)$ est strictement contenu dans

$X$. Nous pouvons donc supposer par récurrence que $\mathcal{C}_X(V,\varphi)$ et $\mathrm{Aut}(B\mathcal{C}_X(V,\varphi))$ sont déterminés par $\mathcal{N}_{\mathcal{C}_X(V,\varphi)}$ pour tout $(V,\varphi)$.

Supposons d'abord que $\varphi\colon BV \longrightarrow BX$ se factorise, à homotopie près, par $BT_X$. En particulier, ceci est toujours le cas si $\mathrm{rg}(V)=1$ (de la même façon que dans un groupe de Lie compact connexe, tout sous-groupe cyclique est contenu dans un tore maximal). L'inclusion de $V$ dans $T$ est déterminée par $\varphi$ modulo l'action du groupe de Weyl $W_X$, et sa restriction à $\mu\colon V \longrightarrow \mathcal{N}$ est donc unique à homotopie («conjugaison») près. Par l'hypothèse de récurrence, les deux centralisateurs $\mathcal{C}_X(V,\varphi)=\mathcal{C}_X(V,j\mu)$ et $\mathcal{C}_{X'}(V,j'\mu)$ sont isomorphes. Puisque $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_X(V,\varphi)) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{N}_{\mathcal{C}_X(V,\varphi)})$, il existe une application

$$h_\varphi\colon \mathcal{C}_X(V,\varphi) \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathcal{C}_{X'}(V,j'\mu),$$

unique à homotopie près, qui commute avec les inclusions de $\mathcal{N}_{\mathcal{C}_X(V,\varphi)}$. Ceci mène au théorème suivant :

Théorème 5.1 ([AGMV, Theorem 2.2]). — *Soient $X$ et $X'$ deux groupes $p$-compacts connexes avec le même normalisateur $\mathcal{N}$ du tore maximal. Supposons que $X$ satisfait à la condition : pour tout $p$-sous-groupe élémentaire abélien $\nu\colon E \longrightarrow X$, le centralisateur $\mathcal{C}_X(\nu)$ est déterminé par $\mathcal{N}_{\mathcal{C}_X(\nu)}$ si $\mathrm{rg}(E)=1$, et $\mathrm{Aut}(B\mathcal{C}_X(\nu)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(B\mathcal{N}_{\mathcal{C}_X(\nu)})$ est un isomorphisme si $\mathrm{rg}(E)\le 2$. Supposons, pour tout $\nu\colon E \longrightarrow X$ où $\mathrm{rg}(E)=2$, et tout $V \le E$ de rang un, que la composée*

$$\mathcal{C}_X(\nu) \longrightarrow \mathcal{C}_X(\nu|_V) \xrightarrow[\cong]{h_{\nu|V}} \mathcal{C}_{X'}(j'\mu) \longrightarrow X'$$

*est indépendante du choix de $V$. Alors il existe une application à homotopie près de la décomposition par centralisateurs de $BX$ vers $BX'$.*

Après, les auteurs vérifient les hypothèses du Théorème 5.1 dans tous les cas en question. De cette façon, ils construisent des applications à homotopie près de la décomposition de $BX$ vers $BX'$.

**(IV) :** Il reste à démontrer que tous les groupes d'obstructions de Wojtkowiak [Wo] sont triviaux, et donc que le système d'applications à homotopie près construit dans l'étape (III) peut se rigidifier en une application

$$BX \simeq \Big(\operatorname*{hocolim}_{\mathcal{A}_p(X)}(\alpha_X)\Big)^\wedge_p \longrightarrow BX'.$$

Après avoir réussi à faire cela, il n'est pas difficile de voir que cette application est une équivalence d'homotopie $BX \simeq BX'$. Le calcul des groupes d'obstructions se fait essentiellement au cas-par-cas, à l'aide des techniques développées par Jackowski et McClure [JM] et Oliver [Ol].

Le calcul de ces groupes d'obstructions est relativement simple si tous les $p$-sous-groupes abéliens élémentaires de $X$ sont toriques (si toute application $BV \longrightarrow BX$ est homotope à une qui se factorise par $BT_X$). Dans ce cas, les foncteurs $F$ dont il faut calculer $\lim{}^*(F)$ sont des «foncteurs de Mackey» (des couples de foncteurs covariants et contravariants avec une certaine condition de compatibilité), et $\lim{}^i(F)=0$ pour

$i > 0$ par [JM, § 5]. Une conséquence des travaux de Lannes [La] sur les applications $BV \longrightarrow X$ est que ceci est toujours le cas quand l'algèbre des invariants de $W_X$ est polynomiale ; en particulier, dans tous les cas où $X$ est simple et exotique. Il ne reste que certains groupes de Lie simples à considérer, où il faut étudier individuellement les $p$-sous-groupes élémentaires abéliens non toriques de rang $\leq 4$. Dans un des cas, $X = E_8$ et $p = 3$, les auteurs ont fait certains calculs à l'aide d'un ordinateur, et ils affirment disposer d'un argument «à la main».

La démonstration que $\mathrm{Aut}(BX)$ est déterminé par $\mathcal{N}$ se fait essentiellement de la même façon, en construisant des équivalences d'homotopie $BX \longrightarrow BX$ à l'aide de la décomposition homotopique.

## 6. LES DÉMONSTRATIONS DANS LE CAS $p = 2$

Les articles [M1, M2] de Møller utilisent essentiellement les mêmes méthodes que dans le cas où $p$ est impair, mais avec beaucoup plus de complications. Par exemple, les calculs des groupes d'obstructions sont beaucoup plus compliqués, et plusieurs de ces calculs ont été faits par ordinateur.

Dans [AG1, AG2], Andersen et Grodal définissent, pour chaque pseudo-réflexion $\sigma \in W_X$, un certain sous-groupe $\mathcal{N}_\sigma \leq \mathcal{N}$. Grossièrement, $\mathcal{N}_\sigma$ est une extension de $T_0^-(\sigma)$ — la composante connexe du sous-groupe de $T$ où $\sigma$ opère par $(g \mapsto g^{-1})$ — par $\langle\sigma\rangle$. Ils montrent que la classe d'isomorphisme de $X$ est déterminée par la classe du couple $(\mathcal{N}_X, \{\mathcal{N}_\sigma\})$, et que l'espace $\mathrm{Aut}(BX)$ est déterminé par les automorphismes de $(\mathcal{N}_X, \{\mathcal{N}_\sigma\})$. La réduction au cas où $X$ est connexe, de centre trivial, et simple se fait par des méthodes semblables à celles qu'ils ont utilisées pour $p$ impair. Mais après cette première reduction, ils ont simplifié les dernières étapes de la démonstration en ramenant les calculs des groupes d'obstructions à ceux déjà faits par Jackowski, McClure, et Oliver dans [JMO].

## 7. QUELQUES APPLICATIONS DE LA CLASSIFICATION

Nous décrivons maintenant trois applications de la classification des groupes $p$-compacts.

**(I) : La conjecture du tore maximal.** Soit $X$ un espace de lacets connexe et fini : un espace qui a le type d'homotopie d'un complexe cellulaire fini, et qui admet un «classifiant» $BX$ dont l'espace des lacets $\Omega(BX)$ a le type d'homotopie de $X$. Un *tore maximal* de $X$ consiste en un tore $T$ et une application $BT \longrightarrow BX$ dont la fibre homotopique est homologiquement finie et de caractéristique d'Euler $\neq 0$. Cette définition est motivée par l'observation que si $G$ est un groupe de Lie compact et $T \subseteq G$ est un sous-groupe torique de $G$, alors $G/T$ est la fibre homotopique de l'inclusion $BT \longrightarrow BG$, et $\chi(G/T) \neq 0$ si et seulement si $T$ est maximal.

La conjecture du tore maximal dit que pour tout espace de lacets $X$ connexe et fini qui admet un tore maximal, il existe un groupe de Lie compact $G$ tel que $BX \simeq BG$. C'est démontré dans [AGMV, Theorem 1.10] et [AG2, Theorem 1.3], comme conséquence des théorèmes de classification.

**(II) : Le problème de Steenrod.** Steenrod, aux début des années 60, a posé la question suivante : quelles algèbres polynomiales graduées de type fini sur $\mathbb{F}_p$ peuvent se réaliser comme anneau de cohomologie d'un espace connexe ? Il fallait donc déterminer quelles suites finies d'entiers positifs sont possibles comme degrés des générateurs d'une algèbre topologiquement réalisable. A l'aide d'une suite spectrale, on démontre pour tout espace $B$ dont la cohomologie mod $p$ est polynomiale de type fini, que $H^*(B^\wedge_p; \mathbb{F}_p) \cong H^*(B; \mathbb{F}_p)$, et que $\Omega(B^\wedge_p)$ est de cohomologie finie. L'espace $B^\wedge_p$ est donc le classifiant d'un groupe $p$-compact. De cette manière, le problème de Steenrod est étroitement lié aux groupes $p$-compacts et à leur classification.

Pour $p$ impair, la liste des algèbres polynomiales graduées réalisables a été établi par Notbohm [N2], sans connaître la classification complète des groupes $p$-compacts. (Ce cas est un peu plus facile parce que tous les générateurs sont en degrés pairs.) Pour $p = 2$, la classification des groupes 2-compacts a mené à la solution par Andersen et Grodal [AG2, Theorem 1.4]. Plus précisément, ils ont montré que toute algèbre polynomiale graduée réalisable est le produit tensoriel de $H^*(BG; \mathbb{F}_2)$, pour un certain groupe de Lie compact, connexe, et semi-simple, avec des algèbres isomorphes à $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{F}_2)$, $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{F}_2)$, et $H^*(BDI(4); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x_8, x_{12}, x_{14}, x_{15}]$. Ce dernier espace est le classifiant du groupe 2-compact qui réalise le groupe de pseudo-réflexions de type 24 dans la liste de Clark et Ewing (Table 1).

**(III) : L'unicité d'un espace à cohomologie polynomiale.** Supposons que $X$ et $Y$ sont deux espaces $p$-complets, tels que $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ et $H^*(Y; \mathbb{F}_p)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres graduées. Est-ce que $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie ? La réponse est «oui», si on suppose en plus que l'isomorphisme commute avec les opérations de Steenrod sur les deux algèbres, et que les générateurs des algèbres sont tous en degrés $\geq 3$. Sans ces hypothèses supplémentaires, il existe au plus un nombre fini de types d'homotopie d'espaces $p$-complets qui réalisent une certaine algèbre polynomiale sur $\mathbb{F}_p$.

Ces résultats ont été démontrés par Notbohm [N2, Corollary 1.7 & 1.8] pour $p$ impair. Pour $p = 2$, Andersen et Grodal [AG2, Theorem 1.5] les ont démontrés comme conséquence de la classification des groupes 2-compacts connexes.

## 8. ESPACES DE LACETS FINIS RATIONNELLEMENT EXOTIQUES

Comme nous l'avons déjà remarqué, la définition et l'étude des groupes $p$-compacts étaient en grande partie motivées par des questions sur les espaces de lacets finis. Une des conséquences de l'ensemble des travaux sur les groupes $p$-compacts (mais qui ne dépend pas de la classification elle-même) est la construction des premiers exemples d'espaces de lacets finis qui n'ont pas la cohomologie rationnelle d'un groupe de Lie.

Dans l'article [ABGP], Andersen et Grodal, en collaboration avec Bauer et Pedersen, ont réussi à construire un espace de lacets fini qui est rationnellement exotique dans ce sens. Pour construire un tel espace $X$, ou plutôt pour construire son classifiant $BX$, ils ont commencé par trouver une famille $\{X_p\}$ de groupes $p$-compacts, un pour chaque nombre premier $p$, dont les classifiants $BX_p$ ont tous même cohomologie rationnelle «exotique». Plus précisément, l'algèbre $H^*(BX_p;\mathbb{Z}_p)\otimes\mathbb{Q}$ est polynomiale sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout $p$, elles ont toutes des générateurs en mêmes degrés pairs, et ces degrés ne sont pas réalisables par $H^*(BG;\mathbb{Q})$ pour un groupe de Lie compact $G$. Soit $BY$ le produit fini d'espaces d'Eilenberg-MacLane du type $K(\mathbb{Q},2k)$ dont la cohomologie rationnelle est polynomiale dans ces degrés. On construit l'espace $BX$ comme un certain produit cartésien de $BY$ et $\prod_p BX_p$. Alors $BX_p^\wedge \simeq BX_p$ pour chaque $p$, et $H^*(BX;\mathbb{Q}) \cong H^*(BY;\mathbb{Q})$. L'espace $\Omega(BX)$ des lacets sur $BX$ a le type d'homotopie d'un CW complexe fini, mais il n'existe pas de groupe de Lie compact $G$ dont la cohomologie rationnelle est isomorphe à $H^*(BG;\mathbb{Q})$.

Plus concrètement, pour un de leurs exemples, ils prennent comme $X_p$ les groupes $p$-compacts :

$$\begin{array}{rl}
A_4{\times}B_4{\times}B_5{\times}B_8{\times}B_8{\times}E_8{\times}A_{12}{\times}B_{14}\times\mathbb{G}_{24} & \text{si } p=2\\
A_4{\times}D_4{\times}B_5{\times}B_8{\times}B_8{\times}E_8{\times}A_{13}{\times}B_{14}\times\mathbb{G}_{12} & \text{si } p\equiv 1,3 \pmod 8\\
G_2{\times}A_4{\times}B_4{\times}B_4{\times}B_7{\times}D_{10}{\times}A_{13}{\times}B_{15}\times\mathbb{G}(4,2,7) & \text{si } p\equiv 5 \pmod 8\\
A_4{\times}B_4{\times}B_5{\times}B_8{\times}B_8{\times}E_8{\times}A_{13}{\times}B_{14}\times\mathbb{G}(6,3,2) & \text{si } p\equiv 7 \pmod{24}\\
D_4{\times}A_5{\times}D_8{\times}D_8{\times}B_{10}{\times}A_{13}{\times}D_{16}\times\mathbb{G}(24,24,2) & \text{si } p\equiv 23 \pmod{24}
\end{array}$$

Dans cette liste, $A_n, B_n, \ldots, E_8$ notent les groupes de Lie du type donné, $\mathbb{G}_n$ est un groupe $p$-compact dont le groupe de Weyl est du type $n$ dans la Table 1, et $\mathbb{G}(m,k,n)$ est un groupe $p$-compact dont le groupe de Weyl est du type 2 dans cette table. Tous ces groupes $X_p$ sont de rang 66.

Cet exemple a été trouvé après une longue recherche par ordinateur. Mais en fait, dès qu'ils l'ont eu trouvé, il ne leur a pas été difficile de vérifier à la main qu'il possédait toutes les propriétés nécessaires.

De plus, dans cette situation, $\Omega(BX)$ a toujours le type d'homotopie d'une variété compacte sans bord, lisse et parallélisable (dans ce cas, de dimension 1254 !). Ceci est une conséquence d'un théorème général de Bauer, Kitchloo, Notbohm, et Pedersen [BKNP].

## RÉFÉRENCES


[Ag] J. AGUADÉ, Constructing modular classifying spaces, Israel J. Math. 66 (1989), 23–40

[An] K. ANDERSEN, The normalizer splitting conjecture for $p$-compact groups, Fund. math. 161 (1999), 1–16

[ABGP] K. ANDERSEN, T. BAUER, J. GRODAL, & E.K. PEDERSEN, A finite loop space not rationally equivalent to a compact Lie group, Invent. Math. 157 (2004), 1–10

[AG1] K. ANDERSEN & J. GRODAL, Automorphisms of $p$-compact groups and their root data, Geometry & Topology 12 (2008), 1427–1460

[AG2] K. ANDERSEN & J. GRODAL, The classification of 2-compact groups, Journal Amer. Math. Soc. 22 (2009), 387–436

[AGMV] K. ANDERSEN, J. GRODAL, J.M. MØLLER, & A. VIRUEL, The classification of $p$-compact groups for $p$ odd, Annals of Math. 167 (2008), 95–210

[BKNP] T. BAUER, N. KITCHLOO, D. NOTBOHM, & E. K. PEDERSEN, Finite loop spaces are manifolds, Acta Math. 192 (2004), 5–31

[B9] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9, Masson (1982)

[CE] A. CLARK & J. EWING, The realization of polynomial algebras as cohomology rings, pacific J. Math. 50 (1974), 425–434

[DW1] W.G. DWYER & C.W. WILKERSON, A new finite loop space at the prime two, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 37–64

[DW2] W.G. DWYER & C.W. WILKERSON, Homotopy fixed-point methods for Lie groups and finite loop spaces, Ann. of Math. 139 (1994), 395–442

[DW3] W.G. DWYER & C.W. WILKERSON, The center of a $p$-compact group, The Cech centennial, Amer. Math. Soc. 1995, 119–157

[DW4] W.G. DWYER & C.W. WILKERSON, Product splittings for $p$-compact groups, Fund. Math. 147 (1995), 279–300

[JM] S. JACKOWSKI & J. McCLURE, Homotopy decomposition of classifying spaces via elementary abelian subgroups, Topology 31 (1992), 113–132

[JMO] S. JACKOWSKI, J. McCLURE, & B. OLIVER, Homotopy classification of self-maps of $BG$ via $G$-actions, Annals of Math. 135 (1992), 183–270

[La] J. LANNES, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un $p$-groupe abélien élémentaire, Publ. Math. I.H.E.S. 75 (1992), 135–244

[M1] J.M. MØLLER, $N$-determined 2-compact groups. I, Fund. math. 195 (2007), 11–84

[M2] J.M. MØLLER, $N$-determined 2-compact groups. II, Fund. math. 196 (2007), 1–90

[N1] D. NOTBOHM, Topological realization of a family of pseudoreflection groups, Fund. Math. 155 (1998), 1–31

[N2] D. NOTBOHM, Spaces with polynomial mod-$p$ cohomology, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 126 (1999), 277–292

[Ol] B. OLIVER, Higher limits via Steinberg representations, Comm. in Algebra 22 (1994), 1381–1402

[Q] D. QUILLEN, On the cohomology and $K$-theory of the general linear groups over a finite field, Annals of Math. 96 (1972), 552–586

[Se] J.-P. SERRE, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann (1967, 1971)

[ST] G.C. SHEPHARD & J.A. TODD, Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math. 6 (1954), 274–304

[St] J. STASHEFF, Manifolds of the homotopy type of (non-Lie) groups, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 998–1000

[Wo] Z. WOJTKOWIAK, On maps from holim F to Z, Algebraic topology, Barcelona, 1986, Lecture notes in math. 1298, Springer-Verlag (1987), 227–236

[Z] A. ZABRODSKY, On the realization of invariant subgroups of $\pi_*(X)$, Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 467–496

Bob OLIVER

Université Paris XIII
L.A.G.A.
CNRS UMR 7539
Équipe de topologie algébrique
Avenue J.-B. Clément
F-93430 VILLETANEUSE
*E-mail* : `bobol@math.univ-paris13.fr`