Université Sorbonne Paris Nord **Année 2022-2023**
Master 2 Mathématiques fondamentales

Systèmes dynamiques topologiques

Dans ce texte, X désigne un espace topologique séparé (on peut se limiter au cas où X est un espace métrique) et $f : X \to X$ est une application continue.

1 Itération d'une application

Pour $f : X \to X$ on définit

$$f^0 = \mathrm{Id}_X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \, f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n fois}.$$

Si f est bijective on définit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, f^{-n} = \underbrace{f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{n fois}.$$

On dit que f^n est le n^{ieme} itéré de f.

Propriété 1.1. *$\forall n, m \in \mathbb{N}$ $f^{n+m} = f^n \circ f^m$. Si f est bijective, ceci reste vrai avec $n, m \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $\big(\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}, \circ\big)$ est un semi-groupe commutatif et, dans le cas inversible, $\big(\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \circ\big)$ est un groupe commutatif.*

2 Orbites d'un point

Définition 2.1. *L'orbite positive de $x \in X$ est l'ensemble $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Lorsque f est bijective, on définit aussi l'orbite négative $\mathcal{O}^-(x) = \{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que l'orbite (totale) $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

2.1 Ensembles limites

Définition 2.2. *- L'ensemble ω-limite de $x \in X$ est l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$; on le note $\omega(x)$. Autrement dit, $y \in \omega(x)$ si pour tout voisinage V de y il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $f^n(x) \in V$. Dans un espace métrique, ceci équivaut à l'existence d'une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \quad et \quad y = \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x).$$

- Si f est un homéomorphisme, l'ensemble α-limite est l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(f^{-n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$; on le note $\alpha(x)$. Dans un espace métrique, on a $y \in \alpha(x)$ ssi il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \quad et \quad y = \lim_{k\to+\infty} f^{-n_k}(x).$$

Propriété 2.3.
- *$\omega(x) = \cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{f^m(x) \,|\, m \geq n\}}$,*
- *$\omega(x)$ est fermé,*

- $\omega(x)$ *est* positivement invariant*, c'est à dire vérifie* $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$.
- *Si f est un homéomorphisme, Les ensembles ω-limite et α-limite sont* globalement invariants*, c'est à dire vérifient* $f(\omega(x)) = \omega(x)$ *et* $f(\alpha(x)) = \alpha(x)$.

3 Différents types de comportements récurrents

3.1 Points fixes, points périodiques

Définition 3.1. *Un point périodique de f est un point $x \in X$ pour lequel il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(x) = x$; le plus petit entier n satisfaisant cette propriété est appelé la période de x. Lorsque la période vaut 1 (i.e. quand $f(x) = x$) on dit que x est un point fixe. On note* $\mathrm{Per(f)}$ *(resp.* $\mathrm{Fix(f)}$*) l'ensemble des points périodiques (resp. points fixes) de f.*

Propriété 3.2. *Si $x \in X$ est un point périodique de période n et si $y \in \mathcal{O}^+(x)$ alors on a $\mathcal{O}^+(y) = \mathcal{O}^+(x)$ et y est aussi périodique de période n.*

3.2 Points récurrents

Définition 3.3. *- L'ensemble des points positivement récurrents pour f est*

$$\mathrm{Rec}^+(\mathrm{f}) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \,|\, \mathrm{x} \in \omega(\mathrm{x})\}.$$

- Lorsque f est un homéomorphisme, on définit aussi l'ensemble des points négativement récurrents

$$\mathrm{Rec}^-(\mathrm{f}) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \,|\, \mathrm{x} \in \alpha(\mathrm{x})\}$$

et l'ensemble des points récurrents

$$\mathrm{Rec}(\mathrm{f}) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \,|\, \mathrm{x} \in \alpha(\mathrm{x}) \cup \omega(\mathrm{x})\} = \mathrm{Rec}^-(\mathrm{f}) \cup \mathrm{Rec}^+(\mathrm{f}).$$

Proposition 3.4. *(Lemme de récurrence de Birkhoff) Si X est compact, alors toute application continue $f : X \to X$ admet un point récurrent.*

3.3 Points non-errants

Définition 3.5. *L'ensemble des points non-errants est*

$$\Omega(f) = \{x \in X \,|\, \forall U \text{ voisinage de } x\ \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

3.4 Propriétés

- $\mathrm{Fix(f)}$ et $\mathrm{Per(f)}$ sont globalement invariants;
- $\mathrm{Rec}^+(\mathrm{f}), \Omega(\mathrm{f})$ sont positivement invariants;
- $\mathrm{Fix}(f)$ et $\Omega(f)$ sont fermés;
- $\mathrm{Fix(f)} \subset \mathrm{Per(f)} \subset \mathrm{Rec}^+(\mathrm{f}) \subset \overline{\mathrm{Rec}^+(\mathrm{f})} \subset \Omega(\mathrm{f})$.

4 Propriétés remarquables des systèmes dynamiques

4.1 Transitivité

Définition 4.1. *- L'application $f : X \to X$ est positivement transitive si pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, autrement dit si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$ est dense dans X pour tout ouvert $U \neq \emptyset$.*

- Lorsque f est un homéomorphisme, on dit qu'il est transitif si pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Remarque 4.2. *f est positivement transitive équivaut aussi à dire que $\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U)$ est dense pour tout ouvert $U \neq \emptyset$.*

Théorème 4.3. *Soient X un espace métrique complet séparable $f : X \to X$ une application continue.*

1. *Si f est positivement transitive alors il existe $x \in X$ tel que $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$ (en fait, l'ensemble des x vérifiant cette propriété est un G_δ-dense).*

2. *Si X est sans point isolé, alors la réciproque du 1) est vraie.*

Si f est un homéomorphisme, on a le résultat similaire:

$$f \text{ transitif} \Longleftrightarrow \exists x \in X \text{ tel que } \overline{\mathcal{O}(x)} = X.$$

4.2 Mélange topologique

Définition 4.4. *L'application $f : X \to X$ est topologiquement mélangeante si pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ pour tout entier $n \geq N$.*

4.3 Minimalité

Définition 4.5. *L'application $f : X \to X$ est positivement minimale si $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$ pour tout $x \in X$. Lorsque f est un homéomorphisme, on dit que f est minimal si $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$ pour tout $x \in X$.*

Remarque 4.6. *Lorsque f n'est pas inversible, on peut parler de fonction minimale au lieu de positivement minimale, sans risque de confusion. De même pour les notions de transitivité et de récurrence.*

5 Conjugaison et semi-conjugaison

Définition 5.1. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$ des applications continues.*

- *Une* semi-conjugaison *de (X, f) à (Y, g) est une application $h : X \to Y$ continue, surjective et telle que $h \circ f = g \circ h$. Si une telle h existe, on dit aussi que (X, f) est une* extension *de (Y, g) ou encore que (Y, g) est un* facteur *de (X, f).*

- *Si l'application h ci-dessus est un homéomorphisme, on dit que les systèmes dynamiques (X, f) et (Y, g) sont* (topologiquement) conjugués.

Si (X, f) est une extension de (Y, g) alors certaines propriétés dynamiques de f sont vraies aussi pour g. Plus précisément, on peut notamment énoncer:

Propriété 5.2. *On suppose que (X, f) est une extension de (Y, g).*

- *Si f admet un point périodique de période n, alors g admet un point périodique de période $n' \leq n$;*
- *Si f est positivement transitive alors g l'est aussi;*
- *Si f est topologiquement mélangeante, alors g l'est aussi.*
- *Si f est positivement minimale alors g l'est aussi.*
- *Si* $\overline{\mathrm{Per(f)}} = X$ *alors* $\overline{\mathrm{Per(g)}} = Y$

On a des résultats similaires lorsque f, g sont des homéomorphismes et en considérant les propriétés de transitivité et de minimalité.

Lorsque (X, f) et (Y, g) sont conjugués, ces deux systèmes dynamiques sont "indiscernables": toute propriété dynamique qui est vraie pour l'un est vraie aussi pour l'autre.

6 Premiers exemples

6.1 Rotations du cercle

On note R_θ la rotation d'angle $2\pi\theta$ sur le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Ainsi $R(z) = e^{2i\pi\theta}z$ pour tout $z \in \mathbb{S}^1$. De façon alternative, on peut aussi poser $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $R_\theta(\tilde{x}) = \widetilde{x+\theta}$.

- R_θ admet des points périodiques ssi $\theta \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, tous les points de $\mathbb{S}^1$ sont périodiques, avec la même période q où $\theta = p/q$ sous forme irréductible.
- Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors R_θ est minimale (et même positivement minimale).
- R_θ n'est jamais topologiquement mélangeante.

6.2 Décalages

Pour un entier $m \geq 2$, on note $A_m = \{0, \ldots, m-1\}$ qui est muni de la topologie discrète et $\Sigma_m^+ = A_m^{\mathbb{N}}$ avec la topologie produit. Ainsi Σ_m^+ est métrisable, par exemple avec la distance

$$d\big((x_i)_i, (y_i)_i\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

et est un ensemble de Cantor. De plus d fait de Σ_m^+ un espace complet. On définit une application continue $\sigma : \Sigma_m^+ \to \Sigma_m^+$, appelée décalage de Bernoulli (ou shift) en posant $\sigma\big((x_i)_i\big) = (x_{i+1})_i$.

- $\mathrm{Per}(\sigma)$ est dense dans Σ_m^+.
- σ est topologiquement mélangeant.

On a les mêmes résultats pour le décalage bilatéral sur $\Sigma_m = A_m^{\mathbb{Z}}$.

6.3 Multiplication de l'angle

Étant donné un entier $p \geq 2$, on définit $f_p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ par $f_p(z) = z^p$.

- L'application f_p est un facteur du décalage $\sigma : \Sigma_p^+ \to \Sigma_p^+$. Une semi-conjugaison de (Σ_p^+, σ) à $(\mathbb{S}^1, f_p)$ est donnée par

$$\begin{array}{rccc} h : & \Sigma_p^+ & \to & \mathbb{S}^1 \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \mapsto & e^{2i\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}}} \end{array}$$

- On en déduit que $\mathrm{Per}(f_p)$ est dense dans $\mathbb{S}^1$ et que f_p est topologiquement mélangeante (ces résultats peuvent aussi se prouver directement).

Université Sorbonne Paris Nord **Année 2022-2023**
Master 2 Mathématiques fondamentales

Introduction à la théorie ergodique

1 Mesures invariantes

Définition 1.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et* $f : X \to Y$ *une application mesurable.*

- *La mesure image de* μ *par* f*, notée* $f_*\mu$*, est définie sur* $(Y, \mathcal{B})$ *par*

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

- *Dans le cas où* $(X, \mathcal{A}) = (Y, \mathcal{B})$*, on dit que* μ *est invariante par* f *(ou que* f *préserve* μ*) si l'on a* $f_*\mu = \mu$.

Proposition 1.2. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to X$ *une application mesurable. La mesure* μ *est invariante par* f *si et seulement si* $\int_X \varphi \circ f d\mu = \int_X \varphi d\mu$ *pour toute* $\varphi \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

2 Mesures invariantes et propriétés de récurrence

2.1 Le lemme de récurrence de Poincaré

Théorème 2.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré avec* $\mu(X) < \infty$ *et* $f : X \to X$ *une application mesurable préservant* μ*. Alors pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *on a*

$$\mu\Big(\Big\{x \in A \,|\, \sharp\big\{n \in \mathbb{N} \,|\, f^n(x) \in A\big\} = \infty\Big\}\Big) \;=\; \mu(A).$$

En conséquence, si $\mu(A) > 0$ *alors* μ*-presque tout point de* A *revient une infinité de fois dans* A *sous itération par* f.

2.2 Mesures boréliennes invariantes et récurrence topologique

Proposition 2.2. *Soient* $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ *un espace mesuré où* X *est un espace métrique séparable,* $\mathcal{B}_X$ *la* σ*-algèbre borélienne de* X*, et* $f : X \to X$ *une application continue qui préserve* μ*. On a*

1. $f(\mathrm{Supp}(\mu)) \subset \mathrm{Supp}(\mu)$*;*
2. *Si* $\mu(X) < \infty$ *alors* μ*-presque tout point est positivement récurrent. En conséquence,* $\mathrm{Supp}(\mu) \subset \overline{\mathrm{Rec}^+(f)}$.

3 Ergodicité

Définition 3.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace probabilisé et* $f : X \to X$ *une application mesurable préservant* μ*. On dit que* μ *est ergodique pour* f *(ou que* f *est ergodique pour* μ*) si*

$$\forall\, A \in \mathcal{A} \quad f^{-1}(A) = A \;\Rightarrow\; \mu(A) \in \{0; 1\}.$$

3.1 Critères pour l'ergodicité

Proposition 3.2. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *μ est ergodique;*
2. $\forall A \in \mathcal{A} \quad f^{-1}(A) \subset A \Rightarrow \mu(A) \in \{0; 1\}$;
3. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A = f^{-1}(A)$ *μ-ps* $\Rightarrow \mu(A) \in \{0; 1\}$;
4. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) > 0 \Rightarrow \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(A)\big) = 1$;
5. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad \Big(\mu(A) > 0$ *et* $\mu(B) > 0\Big) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.

Théorème 3.3. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *μ est ergodique pour f;*
2. $\forall \varphi : X \to \mathbb{C}$ *mesurable* $\big(\varphi \circ f = \varphi$ *μ-presque surement*$\big) \Rightarrow \big(\varphi$ *est constante μ-presque surement* $\big)$.

4 Théorèmes ergodiques

4.1 Le théorème ergodique de Von Neumann

Théorème 4.1. *Soit H un espace de Hilbert (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et $U : H \to H$ une isométrie. Alors*

$$\forall x \in H \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(x) \;=\; p(x)$$

où p est la projection orthogonale sur $Fix(U) = Ker(U - Id_H)$.

Corollaire 4.2 (**Théorème ergodique de Von Neumann)**)**.** *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ. Alors, pour toute $\varphi \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, il existe $\varphi_* \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \;=\; \varphi_* \text{ dans } \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

De plus, $\varphi_* \circ f = \varphi_*$ et $\int_X \varphi_* \, d\mu \;=\; \int_X \varphi \, d\mu$.

Remarque 4.3. *Si dans le théorème précédent on suppose que f est ergodique pour μ alors on obtient pour toute $\varphi \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \;=\; \int_X \varphi \, d\mu \quad \text{dans } \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Corollaire 4.4 (Autres critères pour l'ergodicité)**.** *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace probabilisé et $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est ergodique pour μ;*

(ii)

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(f^{-i}(A) \cap B) \;=\; \mu(A)\mu(B);$$

(iii)

$$\forall \varphi, \psi \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_X \varphi \circ f^i \, \bar{\psi} \, d\mu \;=\; \int_X \varphi \, d\mu \int_X \bar{\psi} \, d\mu;$$

(iv)

$$\forall \varphi \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_X \varphi \circ f^i \, \bar{\varphi} \, d\mu \;=\; \Big| \int_X \varphi \, d\mu \Big|^2.$$

4.2 Le théorème ergodique de Birkhoff

Théorème 4.5. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace probabilisé et $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ. Alors, pour toute $\varphi \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, il existe $\varphi_* \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \;=\; \varphi_* \;\; \mu\text{-p.s.}.$$

De plus, $\varphi_* \circ f = \varphi_*$ μ-p.s. et $\int_X \varphi_* \, d\mu \;=\; \int_X \varphi \, d\mu$.

Remarque 4.6. *La convergence des moyennes de Birkhoff $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$ vers φ_* a lieu aussi dans $L^1(\mu)$ et de plus $||\varphi_*||_{L^1} \leq ||\varphi||_{L^1}$.*

Corollaire 4.7. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et f comme dans le Théorème 4.5. On suppose de plus que μ est ergodique. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sharp\Big\{0 \leq i \leq n-1 \,|\, f^i(x) \in A\Big\} = \mu(A) \;\; \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

5 Mesures invariantes et dynamique topologique

Soit X un espace métrique compact. On note:
- $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes sur X;
- $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des fonction continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $|| \cdot ||_\infty$;
- $\mathcal{C}^*(X)$ le dual topologique de $\mathcal{C}(X)$. On dit de plus que $I \in \mathcal{C}^*(X)$ est positive si $I(\varphi) \geq 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. La topologie faible-$*$ sur $\mathcal{C}^*(X)$ est la moins fine des topologies sur $\mathcal{C}^*(X)$ qui rende continue toutes les applications $\mathcal{C}^*(X) \ni I \mapsto I(\varphi)$ où $\varphi \in \mathcal{C}(X)$. Pour cette topologie, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = I \iff \forall \varphi \in \mathcal{C}(X) \quad \lim_{n\to+\infty} I_n(\varphi) = I(\varphi).$$

Pour $\mu \in \mathcal{M}(X)$, on définit $I_\mu \in \mathcal{C}^*(X)$ en posant $I_\mu(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(X)$.
L'énoncé suivant rassemble les résultats qui permettent de définir la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{M}(X)$.

Théorème 5.1. *Avec les notations précédentes,*

- *L'application*
$$\begin{array}{rcl}\Phi : \mathcal{M}(X) & \longrightarrow & \big\{I \in \mathcal{C}^*(X) \,|\, I \text{ positive et } I(1_X) = 1\big\} \\ \mu & \mapsto & I_\mu\end{array}$$
est une bijection.

- *L'ensemble* $\big\{I \in \mathcal{C}^*(X) \,|\, I \text{ positive et } I(1_X) = 1\big\}$*, muni de la topologie faible-*$*$*, est compact et métrisable.*

On transporte alors la topologie faible-$*$ de $\big\{I \in \mathcal{C}^*(X) \,|\, I \text{ positive et } I(1_X) = 1\big\}$ avec l'application Φ^{-1}, ce qui fait de $\mathcal{M}(X)$ un espace métrique compact.

5.1 Existence de mesures invariantes

Théorème 5.2 (Théorème de Krylov-Bogolubov). *Soit X un espace métrique compact. Toute application continue $f : X \to X$ admet au moins une mesure de probabilité borélienne invariante.*

5.2 Géométrie de l'ensemble des mesures invariantes

Théorème 5.3. *Soient X un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue. On note $\mathcal{M}_f(X)$ l'ensemble (non vide) des mesures de probabilité boréliennes invariantes par f, avec la topologie induite par $\mathcal{M}(X)$. Alors*

- *$\mathcal{M}_f(X)$ est compact et convexe;*

- *une mesure $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ est ergodique si et seulement si c'est un point extrémal de $\mathcal{M}_f(X)$, et il existe au moins un tel point extrémal.*

6 Unique ergodicité

Définition 6.1. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to X$ une application mesurable. On dit que f est uniquement ergodique si elle admet une et une seule mesure de probabilité invariante.*

Propriété 6.2. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to X$ une application mesurable. Si f est uniquement ergodique alors elle est ergodique par rapport à son unique mesure de probabilité invariante.*

Théorème 6.3. *Soient X un espace métrique compact muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}_X$ et $f : X \to X$ une application continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) f est uniquement ergodique;

(2) Pour toute fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{C}$, les moyennes de Birkhoff $\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$ convergent (uniformément) vers une constante K_φ.

7 Mélange

Définition 7.1. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ. On dit que f est (fortement) mélangeante pour μ si*

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \quad \lim_{n\to+\infty} \mu\big(f^{-n}(A) \cap B\big) = \mu(A)\,\mu(B).$$

Remarque 7.2. *Si f est mélangeante pour μ alors elle est ergodique pour μ.*

Proposition 7.3. *Avec les notations de la définition précédente, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) f *est mélangeante pour μ;*

(ii)

$$\forall \varphi, \psi \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \lim_{n \to +\infty} \int_X \varphi \circ f^n \, \bar{\psi} \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu \int_X \bar{\psi} \, d\mu;$$

(iii)

$$\forall \varphi \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) \lim_{n \to +\infty} \int_X \varphi \circ f^n \, \bar{\varphi} \, d\mu = \Big| \int_X \varphi \, d\mu \Big|^2.$$

8 Premiers exemples

8.1 Mesure associée à une orbite périodique

Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, $f : X \to X$ une application mesurable et $x \in X$ un point périodique de f de période $p \geq 1$, alors f est ergodique par rapport à la mesure $\mu = \dfrac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{f^i(x)}$.

8.2 Les rotations

Une rotation de $\mathbb{S}^1$ donnée par $R_\theta(z) = e^{2i\pi\theta} z$ est ergodique par rapport à la mesure de Haar-Lebesgue normalisée si et seulement si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En fait R_θ est uniquement ergodique quand $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Elle n'est jamais mélangeante.

8.3 Les décalages

L'ensemble $A = \{0, \ldots, m-1\}$ (où $m \geq 2$) étant muni d'une mesure de probabilité discrète $\nu = (p_0, \ldots, p_{m-1})$, les décalages $\sigma : \Sigma_m^+ \to \Sigma_m^+$ sont mélangeants par rapport à la probabilité produit $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$. De même pour les décalages bilatéraux.

8.4 Multiplication de l'angle

L'application $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ donnée par $f(z) = z^p$ (p entier ≥ 2) est mélangeante pour la mesure de Haar-Lebesgue normalisée sur $\mathbb{S}^1$. On peut par exemple considérer $h : \Sigma_p^+ \to \mathbb{S}^1$ définie par $h\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = exp\big(2i\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x_n}{p^{n+1}}\big)$. On a déjà vu que h est une semi-conjugaison entre le décalage σ et f. En prenant $\nu = (\frac{1}{p}, \cdots, \frac{1}{p})$ la mesure de probabilité uniforme sur $\{0, \cdots, p-1\}$ et $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$ la probabilité produit sur Σ_p^+, on vérifie que $h_*\mu$ est la mesure de Haar-Lebesgue normalisée sur $\mathbb{S}^1$ ce qui donne le résultat.

Université Sorbonne Paris Nord **Année 2022-2023**
Master 2 Mathématiques fondamentales

Entropie topologique

1 Entropie topologique

1.1 Recouvrements ouverts

Définition 1.1. *Soit X un espace topologique compact.*

- *Un recouvrement ouvert de X est un ensemble $\mathcal{U}$ d'ouverts de X tel que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert $\mathcal{U}'$ de X vérifiant $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$.*
- *Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ deux recouvrements ouverts de X. On écrira $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}'$ si, pour tout $U' \in \mathcal{U}'$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U' \subset U$. On dit alors que $\mathcal{U}'$ est un raffinement de $\mathcal{U}$.*
- *Soient $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ deux recouvrements ouverts de X. On définit un nouveau recouvrement ouvert de X, appelé jonction de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{U}'$, en posant*

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{U}' = \{U \cap U' \,|\, U \in \mathcal{U}, U' \in \mathcal{U}'\}.$$

- *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, on note $N(\mathcal{U}) \in \mathbb{N}^*$ le plus petit cardinal d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. L'entropie de $\mathcal{U}$ est le nombre $\log(N(\mathcal{U}))$. On la note $\mathrm{h}(\mathcal{U})$.*

Propriété 1.2. *Soient X, Y deux espaces topologiques compacts et $\phi : X \to Y$ une application continue.*

1. *Pour tous recouvrements ouverts $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ de X on a*
   (i) $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}' \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{U}) \leq \mathrm{h}(\mathcal{U}')$;
   (ii) $\mathrm{h}(\mathcal{U} \vee \mathcal{U}') \leq \mathrm{h}(\mathcal{U}) + \mathrm{h}(\mathcal{U}')$.
2. *Pour tous recouvrements ouverts $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ de Y on a*
   (i) l'ensemble $\{\phi^{-1}(V) \,|\, V \in \mathcal{V}\}$ est un recouvrement ouvert de X, que l'on note $\phi^{-1}(\mathcal{V})$;
   (ii) $\mathcal{V} \preceq \mathcal{V}' \Rightarrow \phi^{-1}(\mathcal{V}) \preceq \phi^{-1}(\mathcal{V}')$;
   (iii) $\phi^{-1}(\mathcal{V} \vee \mathcal{V}') = \phi^{-1}(\mathcal{V}) \vee \phi^{-1}(\mathcal{V}')$;
   (iv) $\mathrm{h}(\phi^{-1}(\mathcal{V})) \leq \mathrm{h}(\mathcal{V})$*; si de plus ϕ est surjective alors* $\mathrm{h}(\phi^{-1}(\mathcal{V})) = \mathrm{h}(\mathcal{V})$.

.

1.2 Entropie d'une application continue

Définition 1.3. *Soient X un espace topologique compact $f : X \to X$ une application continue.*

- *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, la suite $\left(\frac{1}{n}\mathrm{h}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{U})\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie notée $\mathrm{h}(f,\mathcal{U}) \in [0;+\infty[$ et appelée entropie de f relative à $\mathcal{U}$.*

- *L'entropie topologique de f est définie par*

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f) \;=\; \sup_{\mathcal{U}} \mathrm{h}\big(f,\mathcal{U}\big) \in [0;+\infty]$$

  où la borne supérieure est prise sur tous les recouvrements ouverts de X.

Exemple 1.4. *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\bigvee_{i=0}^{n-1} {Id_X}^{-i}(\mathcal{U}) = \underbrace{\mathcal{U} \vee \cdots \vee \mathcal{U}}_{n\,fois} \preceq \mathcal{U}$ donc $\mathrm{h}\big(Id_X,\mathcal{U}\big) = 0$ puis $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(Id_X) = 0$.*

Propriété 1.5. *Avec les notations de la définition précédente on a:*

1. *Si $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ sont deux recouvrements ouverts de X tels que $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}'$ alors $\mathrm{h}\big(f,\mathcal{U}\big) \leq \mathrm{h}\big(f,\mathcal{U}'\big)$.*
2. *Si $X' \subset X$ est un fermé positivement invariant par f alors $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f|_{X'}) \leq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$.*

1.3 Conjugaison et entropie

Théorème 1.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques compacts et $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ deux applications continues.*

1. *Si g est un facteur de f alors $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g) \leq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$;*
2. *Si f et g sont conjuguées alors $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g) = \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$.*

1.4 Itération et entropie

Théorème 1.7. *Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f^n) = n\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$;*
2. *Si f est un homéomorphisme alors $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f^n) = |n|\,\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

1.5 Recouvrements générateurs

Définition 1.8. *Soient (X, d) un espace métrique compact, $f : X \to X$ une application continue et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X.*

- *Le diamètre de $\mathcal{U}$ de X est défini par*

$$\mathrm{Diam}(\mathcal{U}) = \sup_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{Diam}(U).$$

- *On dit que $\mathcal{U}$ est (fortement) générateur pour f s'il est fini et si*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Diam}\Big(\bigvee_{i=0}^{n} f^{-i}(\mathcal{U})\Big) \;=\; 0.$$

- *Si f est un homéomorphisme, on dit que $\mathcal{U}$ est générateur pour f s'il est fini et si*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Diam}\Big(\bigvee_{i=-n}^{n} f^{-i}(\mathcal{U})\Big) \;=\; 0.$$

Théorème 1.9. *Soient* (X,d) *un espace métrique compact,* $f : X \to X$ *une application continue et* $\mathcal{U}$ *un recouvrement ouvert de* X*.*

1. *Si* $\mathcal{U}$ *est fortement générateur pour* f *alors* $\mathrm{h_{top}}(f) = \mathrm{h}\big(f,\mathcal{U}\big)$*.*
2. *Si* f *est un homéomorphisme et si est* $\mathcal{U}$ *est générateur pour* f *alors* $\mathrm{h_{top}}(f) = \mathrm{h}\big(f,\mathcal{U}\big)$*.*

Exemple 1.10. • *Soit* $\sigma : \Sigma_p^+ \to \Sigma_p^+$ *le décalage unilatéral sur* $\Sigma_p^+ = \{0,\cdots,p-1\}^{\mathbb{N}}$*. On note* $C_y^0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, x_0 = y\}$*. Alors* $\mathcal{U} = \big\{C_y^0 \,|\, y \in \{0,\cdots,p-1\}\big\}$ *est un recouvrement fortement génerateur pour* σ *et* $\mathrm{h_{top}}(\sigma) = \mathrm{h}\big(\sigma,\mathcal{U}\big) = \log(p)$*.*
• *Soit* $\sigma : \Sigma_p \to \Sigma_p$ *le décalage bilatéral sur* $\Sigma_p = \{0,\cdots,p-1\}^{\mathbb{Z}}$*. On note* $C_y^0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,|\, x_0 = y\}$*. Alors* $\mathcal{U} = \big\{C_y^0 \,|\, y \in \{0,\cdots,p-1\}\big\}$ *est un recouvrement générateur pour l'homéomorphisme* σ *et* $\mathrm{h_{top}}(\sigma) = \mathrm{h}\big(\sigma,\mathcal{U}\big) = \log(p)$*.*

2 Reformulation de l'entropie dans un espace métrique

Dans ce paragraphe, (X,d) est un espace métrique compact et $f : X \to X$ est une application continue.

2.1 Les distances d_n

Propriété 2.1. *On définit pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *une distance* d_n *sur* X *en posant*

$$\forall (x,x') \in X^2 \qquad d_n(x,x') = \max_{0\le i\le n-1} d(f^i(x), f^i(x')).$$

De plus ces distances d_n *définissent la même topologie que* d*.*

2.2 Ensembles (n,ϵ)-générateurs et (n,ϵ)-séparés

Définition 2.2. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\epsilon > 0$*.*

- *On dit qu'un ensemble* $G \subset X$ *est* (n,ϵ)*-générateur si l'on a*
$$\forall x \in X \quad \exists x' \in G \text{ tel que } d_n(x,x') < \epsilon.$$
- *On dit qu'un ensemble* $S \subset X$ *est* (n,ϵ)*-séparé si l'on a*
$$\forall (x,x') \in S^2 \quad (x \neq x') \Rightarrow d_n(x,x') \geq \epsilon.$$

Notation 2.3. *On note* $g(n,\epsilon)$ *le plus petit des cardinaux des ensembles* (n,ϵ)*-générateurs et* $s(n,\epsilon)$ *le plus grand des cardinaux des ensembles* (n,ϵ)*-séparés. Il résulte de la compacité de* X *que* $g(n,\epsilon)$ *et* $s(n,\epsilon)$ *sont des entiers* ≥ 1*.*

2.3 Le théorème de Bowen

Théorème 2.4.

$$\begin{aligned}
\mathrm{h_{top}}(f) &= \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log(g(n,\epsilon))}{n} = \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log(s(n,\epsilon))}{n} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{n\to+\infty} \frac{\log(g(n,\epsilon))}{n} = \lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{n\to+\infty} \frac{\log(s(n,\epsilon))}{n}
\end{aligned}$$

3 Lieu de l'entropie

Théorème 3.1. *Soit* (X,d) *un espace métrique compact et* $f : X \to X$ *une application continue. L'entropie topologique de* f *est égale à celle de la restriction* $f|_{\Omega(f)} : \Omega(f) \to \Omega(f)$*.*