IUT de Villetaneuse - Département Informatique

Algèbre linéaire (semestre 1)

Année 2020-2021

Table des matières

Chapitre 1

Systèmes d'équations linéaires

1.1 Généralités

- Une équation linéaire en les inconnues $x_1, \cdots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b$$

où les a_i et b sont des nombres réels donnés.
- Un système linéaire en les inconnues $x_1, \cdots, x_n$ est une liste constituée d'un nombre fini d'équations linéaires en les mêmes inconnues ; autrement dit c'est un système de la forme

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1}\, x_1 & + \; a_{1,2}\, x_2 & + \cdots + \; a_{1,n}\, x_n & = b_1 \\ a_{2,1}\, x_1 & + \; a_{2,2}\, x_2 & + \cdots + \; a_{2,n}\, x_n & = b_2 \\ \vdots & \quad \vdots & \qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m,1}\, x_1 & + \; a_{m,2}\, x_2 & + \cdots + \; a_{m,n}\, x_n & = b_m \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des coefficients réels donnés et les x_j les inconnues.
- Une solution du système ($\mathcal{S}$) est une valeur du n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pour laquelle toutes les équations de ($\mathcal{S}$) sont satisfaites.
- Résoudre un tel système, c'est trouver *toutes* ses solutions ou bien montrer qu'il n'en a pas.

Remarque 1.1 *Lorsque les inconnues sont peu nombreuses, on les note souvent $x, y, z, \cdots$ plutôt que $x_1, x_2, x_3, \cdots$.*

Définition 1.1

On dit qu'un système linéaire d'équations est compatible s'il admet au moins une solution ; dans le cas contraire on dit qu'il est incompatible.

Définition 1.2

On dit que $(b_1, \cdots, b_m)$ est le second membre du système ($\mathcal{S}$). Lorsque tous les b_i sont nuls, on dit que $\mathcal{S}$ est homogène (ou sans second membre).

Remarque 1.2 *Un système linéaire homogène est toujours compatible : il possède au moins la solution $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$.*

1.2 Matrice augmentée d'un système linéaire

On utilise souvent une notation condensée pour représenter un système linéaire $(\mathcal{S})$ comme au dessus : on « oublie » d'écrire les inconnues x_j ainsi que les symboles $+, =$ et on ne conserve que les coefficients $a_{i,j}$ et b_i rangés dans un tableau $\widetilde{A}$ comme au dessous :

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

On dit que $\widetilde{A}$ est la *matrice augmentée* du système $(\mathcal{S})$.

Exemple 1.1 *Le système linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x + 2y - t & = 1 \\ x - 8z - 4t & = \frac{3}{4} \\ 7y - 3z + 10t & = -\pi \\ 4x + y - 6z + 5t & = 2 \end{array} \right.$$

d'inconnues x, y, z, t (dans cet ordre) a pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -8 & -4 & \frac{3}{4} \\ 0 & 7 & -3 & 10 & -\pi \\ 4 & 1 & -6 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

1.3 Systèmes linéaires échelonnés

Considérons un système linéaire $(\mathcal{S})$ comme au dessus. On note $j_1 \in \{0, 1, \cdots, n\}$ le nombre de coefficients $a_{1,j}$ qui sont nuls en début de ligne 1. Autrement dit, cette ligne 1 est de la forme

$$\underbrace{a_{1,1}}_{=0} x_1 + \cdots + \underbrace{a_{1,j_1}}_{=0} x_{j_1} + \underbrace{a_{1,j_1+1}}_{\neq 0} x_{j_1+1} + \cdots + a_{1,n} x_n = b_1.$$

On note de même $j_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le nombre de coefficients $a_{2,j}$ qui sont nuls en début de ligne 2, et ainsi de suite jusqu'à j_m.

Définition 1.3

On dit que le système $(\mathcal{S})$ est échelonné si la suite $j_1, j_2, \cdots, j_m$ est strictement croissante jusqu'à ce que, éventuellement, elle devienne constante égale à n.

Exemple 1.2 *Donner les valeurs de $j_1, j_2, \cdots$ pour les systèmes linéaires suivants, où les inconnues sont x, y, z, t (dans cet ordre). Sont-ils échelonnés ?*

$$\mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{ll} 3x + 4z - t & = 7 \\ 4y + z + t & = -9 \\ 10y - 7z & = -3 \\ t & = -2 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{ll} -x + y + 5t & = 0 \\ 4y - z + t & = e^5 \\ z + 5t & = 10 \end{array} \right.$$

Remarque 1.3 *Un système linéaire échelonné est facile à résoudre : on commence par résoudre la dernière équation puis on reporte le résultat trouvé dans l'équation précédente et ainsi de suite jusqu'à la première ligne.*

1.4 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Elles sont de trois sortes :

1. Permuter deux lignes L_i et L_j. On écrira $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplier une ligne L_i par un réel α **non nul**. On écrira $\alpha\, L_i \to L_i$.
3. Remplacer une ligne L_i par $L_i + \alpha\, L_j$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et où L_j est une ligne **autre que** L_i. On écrira $L_i + \alpha\, L_j \to L_i$.

Propriété 1.1

On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire si on lui applique une ou plusieurs opérations élémentaires.

1.5 L'algorithme de Gauss

1.5.1 Présentation générale

L'idée consiste à modifier un système linéaire donné $(\mathcal{S})$ avec des opérations élémentaires bien choisies pour se ramener à un système échelonné. On reprend les notations du premier paragraphe pour expliquer ce procédé.

Étape 1. On regarde si le coefficient "en haut et à gauche", c'est à dire $a_{1,1}$, est nul ou non ; on a donc deux cas :

1er cas : $a_{1,1} \neq 0$. On dit alors que $a_{1,1}$ est un *pivot*. On remplace tous les coefficients sous $a_{1,1}$ (c'est à dire $a_{2,1}, \cdots, a_{m,1}$) par des 0, à l'aide des opérations élémentaires

$$L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} \times L_1 \to L_i \qquad (i = 2, \cdots, m).$$

[Variante : on peut aussi faire $a_{1,1}L_i - a_{i,1}L_1 \to L_i$ pour $i = 2, \cdots, m$.]
On obtient ainsi un système $(\mathcal{S}_*)$ de la forme

$$\mathcal{S}_* \left\{ \begin{array}{rllll} a_{1,1}\, x_1 + & a_{1,2}\, x_2 & + \cdots + & a_{1,n}\, x_n & = b_1 \\ 0\, x_1 + & a'_{2,2}\, x_2 & + \cdots + & a'_{2,n}\, x_n & = b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0\, x_1 + & a'_{m,2}\, x_2 & + \cdots + & a'_{m,n}\, x_n & = b'_m \end{array} \right.$$

La première étape de l'algorithme est finie.
Étape 2. On recommence comme à la première étape mais en remplaçant le système initial $(\mathcal{S})$ par le système $(\mathcal{S}')$ représenté sur fond gris dans la formule précédente, c'est à dire le système obtenu en oubliant la première ligne et la première inconnue x_1 dans $(\mathcal{S}_*)$.

2eme cas : $a_{1,1} = 0$.

- S'il existe un coefficient $a_{i,1}$ non nul alors on permute les lignes L_1 et L_i (opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_1$) ce qui ramène au premier cas.

- Sinon le système $(\mathcal{S})$ est de la forme

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{ll} 0\,x_1 + & a_{1,2}\,x_2 \;+\; \cdots + \; a_{1,n}\,x_n \quad = b_1 \\ 0\,x_1 + & a_{2,2}\,x_2 \;+\; \cdots + \; a_{2,n}\,x_n \quad = b_2 \\ \vdots & \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ 0\,x_1 + & a_{m,2}\,x_2 \;+\; \cdots + \; a_{m,n}\,x_n \quad = b_m \end{array}\right.$$

Étape 2. On recommence comme à la première étape mais en remplaçant le système initial par le système $(\mathcal{S}')$ écrit sur fond gris ci-dessus, obtenu en oubliant la première inconnue x_1 dans $(\mathcal{S})$.

L'algorithme de Gauss consiste à parcourir cette boucle jusqu'à épuisement des lignes ou des inconnues. On obtient en sortie un système échelonné qui a exactement les mêmes solutions que le système initial $(\mathcal{S})$.

1.5.2 Un exemple

On considère le système lińeaire $(\mathcal{S})$ suivant d'inconnues x, y, z, t :

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z+4t & =1 \\ 2x+4y+6z+10t & =0 \\ -x+3y-5z-11t & =2 \\ 3x+16y+5z+4t & =3 \end{array}\right.$$

1ere étape. le premier pivot est 1. On obtient le système $(\mathcal{S}_*)$ suivant en utilisant les opérations élémentaires indiquées :

$$\mathcal{S}_*\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{1}x+2y+3z+4t & =1 & \\ 0x+0y+0z+2t & =-2 & \text{avec } L_2-2L_1\to L_2 \\ 0x+5y-2z-7t & =3 & \text{avec } L_3+L_1\to L_3 \\ 0x+10y-4z-8t & =0 & \text{avec } L_4-3L_1\to L_4. \end{array}\right.$$

En pratique, on ne fait pas apparaître une inconnue dans une équation où elle est affectée du coefficient zéro ; par exemple la seconde ligne de $(\mathcal{S}_*)$ s'écrit simplement $2t=-2$. On peut aussi utiliser la notation sous forme de matrice augmentée qui permet d'écrire seulement les coefficients des systèmes. On donne ici tous les détails en écrivant tous les coefficients et toutes les inconnues sur chaque ligne.

2eme étape. Le système $\mathcal{S}'$ obtenu en oubliant la première ligne et l'inconnue x dans $\mathcal{S}_*$ est

$$\mathcal{S}'\left\{\begin{array}{ll} 0y+0z+2t & =-2 \\ 5y-2z-7t & =3 \\ 10y-4z-8t & =0 \end{array}\right.$$

On permute d'abord les lignes 1 et 2 de $\mathcal{S}'$ (opération $L'_1\leftrightarrow L'_2$) pour avoir

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{5}y-2z-7t & =3 \\ 0y+0z+2t & =-2 \\ 10y-4z-8t & =0 \end{array}\right.$$

Le deuxième pivot est 5 et on a ensuite

$$\mathcal{S}'_*\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{5}y-2z-7t & =3 & \\ 0y+0z+2t & =-2 & \\ 0y+0z+6t & =-6 & \text{avec } L'_3-2L'_1\to L'_3. \end{array}\right.$$

En replaçant ces calculs dans le système $\mathcal{S}_*$ on écrit directement

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z+4t & =1 \\ 0x+\mathbf{5}y-2z-7t & =3 \\ 0x+0y+0z+2t & =-2 \\ 0x+10y-4z-8t & =0 \end{array}\right. \quad \text{avec } L_2 \leftrightarrow L_3$$

puis

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z+4t & =1 \\ 0x+\mathbf{5}y-2z-7t & =3 \\ 0x+0y+0z+2t & =-2 \\ 0x+0y+0z+6t & =-6 \quad \text{avec } L_4-2L_2 \to L_4. \end{array}\right.$$

3eme étape. Il n'y a pas de calculs à faire car le système $\mathcal{S}''$ obtenu en oubliant la première ligne et l'inconnue y dans $\mathcal{S}'_*$ a tous les coefficients de sa première inconnue z égaux à zéro :

$$\mathcal{S}'' \left\{\begin{array}{ll} 0z+2t & =-2 \\ 0z+6t & =-6 \end{array}\right.$$

4eme étape. Le système obtenu en oubliant la première inconnue z (mais pas la première ligne !) de $\mathcal{S}''$ est

$$\mathcal{S}''' \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{2}t & =-2 \\ 6t & =-6 \end{array}\right.$$

Le troisième pivot est 2 et on obtient

$$\mathcal{S}'''_* \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{2}t & =-2 \\ 0t & =0 \quad \text{avec } L'''_2-3L'''_1 \to L'''_2. \end{array}\right.$$

En replaçant ces opérations dans le dernier système à quatre inconnues x, y, z, t on écrit directement

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z+4t & =1 \\ 0x+5y-2z-7t & =3 \\ 0x+0y+0z+\mathbf{2}t & =-2 \\ 0x+0y+0z+0t & =0 \quad \text{avec } L_4-3L_3 \to L_4. \end{array}\right.$$

L'algorithme est terminé ; le système obtenu en sortie est échelonné (car $j_1=0<j_2=1<j_3=3<j_4=4$) et a le même ensemble de solutions que le système initial $(\mathcal{S})$ d'après la Propriété 1.1.

1.6 Inconnues principales et secondaires

Définition 1.4

Les inconnues principales (ou variables liées) d'un système linéaire sont les inconnues ayant pour coefficient l'un des pivots trouvés en appliquant l'algorithme de Gauss. Les autres inconnues, s'il y en a, sont appelés inconnues secondaires (ou variables libres).

Exemple 1.3 *Pour le système du paragraphe 1.5.2, les inconnues principales sont x, y, t ; la seule inconnue secondaire est z.*

1.7 Nombre de solutions d'un système linéaire

Théorème 1.1

Un système linéaire admet ou bien une infinité de solutions, ou bien une solution unique, ou bien aucune solution.

Pour comprendre ce résultat, remarquons que grâce à l'algorithme de Gauss il suffit de raisonner sur un système échelonné. On a différents cas :

- S'il existe une ligne de la forme $0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n = b$ avec $b \neq 0$ alors le système est incompatible.
- Sinon le système est compatible ; plus précisément il admet une solution unique s'il n'y a pas d'inconnue secondaire et il admet une infinité de solutions s'il y a au moins une inconnue secondaire.

Exemple 1.4 *Le système $(\mathcal{S})$ du paragraphe 1.5.2 admet une infinité de solutions. L'ensemble de ses solutions, noté $Sol(\mathcal{S})$, s'obtient en exprimant les inconnues principales x, y, t en fonction de l'inconnue secondaire z ; on trouve*

$$Sol(\mathcal{S}) = \Big\{ \big(\frac{33 - 19z}{5}, \frac{2z - 4}{5}, z, -1 \big) \mid z \in \mathbb{R} \Big\}.$$

1.8 Exercices

Exercice 1. Les équations suivantes en les inconnues x, y, z sont-elles linéaires ?

$$a)\, 3x + 2y - \ln(7)z = 0 \quad b)\, x(1+z) - 3y = 1 \quad c)\, 3x + y^2 - \pi z = 9 \quad d)\, x - 7y + 3\sqrt{z} = 1$$

$$e)\, x - \frac{2}{3}z = 1 \quad f)\, -4x + y + \frac{3}{z} = 11 \quad g)\, x(1+2y) + 3y + 4z = \pi + 2yx.$$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, trouver la ou les opérations élémentaires sur les lignes qui transforment le système linéaire $\mathcal{S}$ en le système linéaire $\mathcal{S}'$; donner ensuite la ou les opérations inverses permettant d'obtenir $\mathcal{S}$ à partir de $\mathcal{S}'$.

1)

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{ll} 8x + y + 2z & = 1 \\ 9x + 12y - 6z & = 15 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}' \left\{ \begin{array}{ll} 8x + y + 2z & = 1 \\ 3x + 4y - 2z & = 5 \end{array} \right.$$

2)

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + z & = 1 \\ \quad 5y - 2z & = 8 \\ 4x - y + 3z & = -6 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}' \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + z & = 1 \\ \quad 5y - 2z & = 8 \\ \quad 7y - z & = -10 \end{array} \right.$$

3)

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{ll} 3x + 2y - z & = 7 \\ 2x + 5y - 2z & = 5 \\ 4x - y + 3z & = 1 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}' \left\{ \begin{array}{ll} 3x + 2y - z & = 7 \\ \quad \frac{11}{3}y - \frac{4}{3}z & = \frac{1}{3} \\ \quad -\frac{11}{3}y + \frac{13}{3}z & = -\frac{25}{3} \end{array} \right.$$

Exercice 3. Pour chacun des quatre systèmes linéaires suivants
1) Écrire la matrice augmentée correspondante ;
2) Dire si le système est échelonné ou non ;

3) Si le système est échelonné, préciser les inconnues secondaires éventuelles puis indiquer, en justifiant votre réponse, le nombre de solutions à ce système.

Inconnues :x, y, z; $\mathcal{S}_1 \begin{cases} -x+20y+7z &= 1/4 \\ 7y-8z &= 26 \\ z &= \sqrt{\pi} \\ 0 &= 0 \end{cases}$ $\mathcal{S}_2 \begin{cases} 5x+8y+z &= 3/4 \\ 3z &= -5 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= \pi^2 \end{cases}$

Inconnues :x, y, z, t; $\mathcal{S}_3 \begin{cases} x+y+z+t &= \pi \\ -5y+3z+4t &= 5 \\ y+2t &= 2 \\ 5t &= 3 \end{cases}$ $\mathcal{S}_4 \begin{cases} 2x-7y+3z+t &= 4 \\ -y+21z &= 3 \\ -7t &= 2 \end{cases}$

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss. On indiquera les opérations élémentaires effectuées sur les lignes et on précisera les inconnues secondaires éventuelles (les inconnues seront toujours considérées rangées par ordre alphabétique).

$$\begin{cases} 3x+5y+3z &= 25 \\ 7x+9y+19z &= 65 \\ -4x+5y+11z &= 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z-t &= 0 \\ -2x-y-z+2t &= 0 \\ 3x+3y+z-3t &= 3 \\ -x-2y+t &= 1 \\ x+y+z+t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z-t+2u &= 2 \\ 3x-9y+7z-t+3u &= 7 \\ 2x-6y+7z+4t-5u &= 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-t-u &= 4 \\ 2x+4y+2z+4t+2u &= 4 \\ 2x+4y+3z+3t+3u &= 4 \\ 3x+6y+6z+3t+6u &= 6 \end{cases}$$

Exercice 5. On considère le système linéaire à deux inconnues x, y dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 4 & 8 & b \end{array}\right)$$

où a, b sont deux paramètres réels. Échelonner ce système puis en déduire le nombre de solutions selon les valeurs de a et b ; calculer ces solutions lorsqu'il y en a.

Exercice 6. Résoudre à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, et en discutant suivant les valeurs du paramètre réel k, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} kx+y+z &= 1 \\ x+ky+z &= 1 \\ x+y+kz &= 1 \end{cases}$$

Exercice 7. On considère le système linéaire à trois inconnues x, y, z dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & 5 & 10 \\ 2 & 7 & a & b \end{array}\right)$$

où a et b sont deux paramètres réels.
1) Pour quelles valeurs de a ce système admet-il une unique solution ?
2) Pour quelles valeurs du couple (a, b) ce système admet-il une infinité de solutions ?

Exercice 8. Expliquer pourquoi un système linéaire à 2 équations et 3 inconnues admet ou bien une infinité de solutions ou bien aucune solution. Généraliser ce qui précède au cas d'un système linéaire à m équations et n inconnues avec $n > m$.

Exercice 9. Trouver un polynôme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré 3 tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P'(1) = 2$ et $P'(2) = 9$. A-t-on plusieurs solutions possibles ?

Exercice 10. Trouver trois nombres réels a, b, c tels que, pour tout polynôme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à trois, on ait

$$\int_1^3 P(x)\,dx \;=\; aP(1) + bP(2) + CP(3).$$

A-t-on plusieurs choix possibles pour a, b, c ?

Exercice 11. Annie et Arthur sont frère et soeur. Annie a autant de frères que de soeurs mais Arthur a deux fois plus de soeurs que de frères. Combien y-a-t-il d'enfants dans cette famille ?

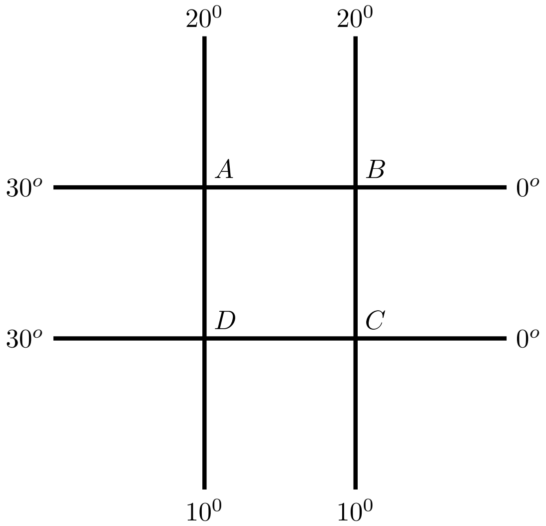
Exercice 12. Dans un modèle économique simplifié, on considère trois secteurs d'activités : l'énergie, l'industrie et les services. On suppose que la totalité de la production est écoulée entre ces divers secteurs dans les proportions suivantes :

Production	Pourcentages de vente à chaque secteur :		
	Energie	Industrie	Services
énergétique	10%	80%	10%
industrielle	10%	10%	80%
de services	20%	40%	40%

Par exemple, la première ligne du tableau signifie que 10% de l'énergie produite est achetée par des entreprises du secteur énergétique, 80% par des entreprises du secteur industriel et 10% par des entreprises du secteur des services.

On note respectivement E, I, S la valeur totale (dans une certaine unité monétaire) de la production des secteurs de l'énergie, de l'industrie et des services. Existe-t-il des valeurs de E, I, S pour lesquelles chaque secteur est à l'équilibre, c'est à dire avec des dépenses égales aux revenus ? Si oui, a-t-on une unique solution à ce problème ? Même question si l'on suppose de plus que $I = 100$ unités.

Exercice 13. Le schéma ci-dessous représente une quadrillage formé de quatre tiges métalliques. Les extrémités des tiges ainsi que leurs points d'intersection sont appelés les noeuds du quadrillage. On indique sur le dessin la température (en degrés Celsius) aux différentes extrémités. Déterminer la température en chacun des noeuds intérieurs A, B, C, D, en supposant que celle-ci est égale à la moyenne des températures aux quatre noeuds les plus proches.



Exercice 14. Résoudre le système d'équations suivant, où x et y sont des inconnues strictement positives.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^3y^2 & = 1 \\ x^6 - e^2y & = 0 \end{array} \right.$$

Chapitre 2

Calcul matriciel

2.1 Matrices

Définition 2.1

- *Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau à m lignes et n colonnes (où m et n sont deux entiers ≥ 1). Une telle matrice se note $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$ ou simplement $A = \big(a_{i,j}\big)$, le coefficient $a_{i,j}$ désignant l'élément du tableau situé à la i^{eme} ligne et j^{eme} colonne.*
- *Si $m = 1$ (resp. $n = 1$) on dit que A est matrice ligne (resp. une matrice colonne).*
- *Si $m = n$ on dit que A est une matrice carrée.*

Nous considérons par la suite seulement des matrices ayant leurs coefficients dans $\mathbb{R}$.

Notation 2.1 *L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels se note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 2.1

- $\begin{pmatrix} 1 & e^8 \\ -2 & 3 \\ \pi & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -4 & 1 \\ \frac{2}{\pi} & 0 & \frac{5}{4} \\ 2 & 7 & \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- *La matrice nulle de taille $m \times n$ est la matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à zéro. On la note souvent $0_{m,n}$ ou simplement 0.*

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- *La matrice identité d'ordre n, notée I_n, est la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent un et dont les autres coefficients sont égaux à zéro.*

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Opérations sur les matrices

2.2.1 Somme de matrices

Définition 2.2

Soient $A = \left(a_{i,j}\right)$ et $B = \left(b_{i,j}\right)$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La somme de A et de B, notée $A + B$, est la matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont le coefficient à la i^{eme} ligne et j^{eme} colonne vaut $a_{i,j} + b_{i,j}$, ceci pour tous $i \in \{1, \cdots, m\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$. Autrement dit, $A + B$ s'obtient en additionnant A et B « coefficient par coefficient ».

Exemple 2.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Propriété 2.1

- *pour toutes matrices A, B, C de même taille, on a $(A+B)+C = A+(B+C)$ (l'addition des matrices est associative) ;*
- *pour toutes matrices A et B de même taille, on a $A + B = B + A$ (l'addition des matrices est commutative).*

2.2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Définition 2.3

Soient $A = \left(a_{i,j}\right)$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le produit de A par α, noté $\alpha \cdot A$, est la matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont le coefficient à la i^{eme} ligne et j^{eme} colonne vaut $\alpha \times a_{i,j}$, ceci pour tous $i \in \{1, \cdots, m\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$. Autrement dit, $\alpha \cdot A$ s'obtient en multipliant chaque coefficient de A par le réel α.

Exemple 2.3

$$-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 8 & -10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Propriété 2.2

Pour tous réels α et β et pour toutes matrices A et B de même taille, on a

- *$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ (l'addition des réels est distributive à droite par rapport à l'opération $\cdot$) ;*
- *$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (l'addition des matrices est distributive à gauche par rapport à l'opération $\cdot$) ;*
- *$(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$;*
- *$1 \cdot A = A$.*

2.2.3 Matrices opposées et soustraction des matrices

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$, on note $-A$ la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par -1, c'est à dire $-A = (-a_{i,j}) = (-1) \cdot A$. On dit que $-A$ est la matrice opposée de A.

On a alors, pour toute matrice A et pour tout réel α :

$$-(\alpha \cdot A) = (-\alpha) \cdot A = \alpha \cdot (-A).$$

On définit ensuite la « soustraction des matrices » en posant $B - A = B + (-A)$ pour des matrices A et B de même taille.

Propriété 2.3

Pour tous réels α et β et pour toutes matrices A et B de même taille, on a
- $(\alpha - \beta) \cdot A = \alpha \cdot A - \beta \cdot A$;
- $\alpha \cdot (A - B) = \alpha \cdot A - \alpha \cdot B$.

2.2.4 Produit de matrices

Définition 2.4

Soient $A = \big(a_{i,j}\big)$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = \big(b_{i,j}\big)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le produit de A et B dans cet ordre, noté $A \times B$ ou AB, est la matrice dans $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ dont le coefficient à la i^{eme} ligne et j^{eme} colonne est $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$, ceci pour tous $i \in \{1, \cdots, m\}$ et $j \in \{1, \cdots, p\}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{colonne } j \text{ de } B & & \text{colonne } j \text{ de } A \times B & \\ \text{ligne } i \text{ de } A \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \square & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \leftarrow \text{ligne } i \text{ de } A \times B \end{array}$$

$$\text{où } \square = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exemple 2.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 32 & 0 \\ 65 & 68 & 16 \end{pmatrix}$$

Propriété 2.4

- *Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ on a $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (le produit des matrices est associatif) ;*
- *Pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on a $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (le produit des matrices est distributif à gauche par rapport à l'addition des matrices) ;*
- *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et pour toutes matrices B, C dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on a $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (le produit des matrices est distributif à droite par rapport à l'addition des matrices) ;*
- *Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $A \times (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \times B) = (\alpha \cdot A) \times B$;*
- *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ on a $I_m \times A = A$ et $A \times I_n = A$.*

2.2.5 Puissances de matrices carrées

Définition 2.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $A^0 = I_n$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\ fois}$.

Remarque 2.1 *Pour calculer $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\ fois}$ en pratique, le placement des parenthèses est sans importance car le produit des matrices est associatif. Par exemple $A^3 = \underbrace{(A \times A)}_{=A^2} \times A$ mais aussi $A^3 = A \times \underbrace{(A \times A)}_{=A^2}$.*

2.3 Matrices inversibles

Définition 2.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n = B \times A$.*
- *Une telle matrice B, <u>si elle existe</u>, est unique ; on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.*

Preuve de l'unicité : Si B et B' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $B \times A = I_n$ et $A \times B' = I_n$ alors on a $B = B \times I_n = B \times (A \times B') = (B \times A) \times B' = I_n \times B' = B'$.

Théorème 2.1

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si l'une des deux égalités $A \times B = I_n$ ou $B \times A = I_n$ est vraie alors l'autre est vraie aussi. En conséquence, pour montrer que $B = A^{-1}$ il suffit de montrer que $A \times B = I_n$ ou que $B \times A = I_n$.

Propriété 2.5

Soient A et B deux matrices carrées de même taille inversibles et α un réel non nul. Alors

- *A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;*
- *$\alpha \cdot A$ est inversible et $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$;*
- *$A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.*

2.3.1 L'algorithme de Gauss-Jordan

Cet algorithme permet de savoir si une matrice (carrée) donnée est inversible ou non et, le cas échéant, de calculer son inverse.

Description générale

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on souhaite calculer la matrice inverse, si elle existe. On forme une matrice $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ en écrivant côte à côte les matrices A et I_n, séparées par un trait vertical : $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right)$.

1. On applique l'algorithme de Gauss sur $\widetilde{A}$ en considérant que seule la partie gauche de $\widetilde{A}$ représente les coefficients des inconnues (la partie droite étant un "second membre"). On obtient ainsi une matrice de la forme $\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{c|c} A' & B \end{array} \right)$ où $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure, c'est à dire que tous ses coefficients sous la diagonale principale sont nuls :

$$\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,n} & b_{1,1}, & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} & b_{2,1}, & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{n,n} & b_{n,1}, & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{array} \right)$$

   ⇝ Si l'un des coefficients diagonaux de A' est nul alors A n'est pas inversible.
   ⇝ Si tous les coefficients diagonaux de A' sont différents de 0 alors A est inversible et on passe à la phase suivante pour obtenir A^{-1} :

2. En procédant de façon analogue à l'algorithme de Gauss mais en partant du coefficient en bas à droite de A' (c'est à dire $a'_{n,n}$) on obtient une matrice $\widetilde{A}'' = \left(\begin{array}{c|c} A'' & B' \end{array} \right)$ où A'' est une matrice diagonale (ce qui signifie que les coefficients de A'' qui ne sont pas sur la diagonale principale sont nuls) :

$$\widetilde{A}'' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a''_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & b'_{1,1}, & b'_{1,2} & \cdots & b'_{1,n} \\ 0 & a''_{2,2} & \ddots & \vdots & b'_{2,1} & b'_{2,2} & \cdots & b'_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a''_{n,n} & b'_{n,1} & b'_{n,2} & \cdots & b'_{n,n} \end{array} \right)$$

3. On multiplie finalement la i^{eme} ligne de $\widetilde{A}''$ par $1/a''_{i,i}$ pour chaque $i = 1, \cdots, n$ (les coefficients diagonaux de A'' sont nécessairement non nuls). On obtient une matrice de la forme $\widetilde{A}''' = \left(\begin{array}{c|c} I_n & B'' \end{array} \right)$ et l'inverse de A se lit dans la partie droite de $\widetilde{A}'''$, autrement dit $A^{-1} = B''$.

Justification de l'algorithme

Pour fixer les idées, on considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Le raisonnement pour une matrice carrée de taille $n \times n$ quelconque est similaire. La matrice A est inversible si et seulement si il existe $X = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$ telle que $A \times X = I_3$ et on sait qu'une telle matrice X, si elle existe, est unique. Résoudre l'équation matricielle $A \times X = I_3$ revient à résoudre les trois systèmes linéaires suivants :

$$\mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z & = 1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z & = 0 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z & = 0 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x' + a_{1,2}y' + a_{1,3}z' & = 0 \\ a_{2,1}x' + a_{2,2}y' + a_{2,3}z' & = 1 \\ a_{3,1}x' + a_{3,2}y' + a_{3,3}z' & = 0 \end{array} \right.$$

et

$$\mathcal{S}_3 \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x'' + a_{1,2}y'' + a_{1,3}z'' & = 0 \\ a_{2,1}x'' + a_{2,2}y'' + a_{2,3}z'' & = 0 \\ a_{3,1}x'' + a_{3,2}y'' + a_{3,3}z'' & = 1 \end{array} \right.$$

Une remarque importante est que ces trois systèmes ont les mêmes coefficients à gauche des signes $=$; on peut donc regrouper les trois matrices augmentées correspondantes en une seule matrice :

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 1 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

L'algorithme de Gauss s'applique simultanément à ces trois systèmes, c'est à dire en faisant intervenir les mêmes opérations élémentaires sur les lignes. On obtient ainsi

$$\widetilde{A}' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & a'_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{array} \right).$$

D'après les résultats du chapitre précédent, les systèmes $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_3)$ ont une unique solution si et seulement si $a'_{1,1,}, a'_{2,2}$ et $a'_{3,3}$ sont tous non nuls. Donc

$\rightsquigarrow$ ou bien l'un des coefficients $a'_{1,1,}, a'_{2,2}, a'_{3,3}$ est égal à zéro, et alors A n'est pas inversible.

$\rightsquigarrow$ ou bien $a'_{1,1,}, a'_{2,2}$ et $a'_{3,3}$ sont non nuls et alors A est inversible ; il reste dans ce cas à calculer A^{-1} :

- On utilise des opérations élémentaires pour mettre des 0 au dessus de la diagonale principale de la matrice dans la partie gauche de $\widetilde{A}'$: les opérations $L'_i - \dfrac{a'_{i,3}}{a'_{3,3}} L'_3 \to L'_i$ (ou $a'_{3,3}L'_i - a'_{i,3}L'_3 \to L'_i$) pour $i = 1$ et $i = 2$ font apparaître des 0 au dessus de $a'_{3,3}$ et on procède de même pour faire apparaître un 0 au dessus de $a'_{2,2}$. On obtient

$$\widetilde{A}'' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a''_{1,1} & 0 & 0 & b'_{1,1} & b'_{1,2} & b'_{1,3} \\ 0 & a''_{2,2} & 0 & b'_{2,1} & b'_{2,2} & b'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & b'_{3,1} & b'_{3,2} & b'_{3,3} \end{array} \right).$$

- Les coefficients $a''_{1,1}, a''_{2,2}$ et $a''_{3,3}$ sont non nuls en raison des opérations élémentaires effectuées et de la forme des coefficients $a'_{i,j}$ dans $\widetilde{A}'$. On peut donc faire $\dfrac{1}{a''_{i,i}} L''_i \to L''_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et on obtient alors

$$\widetilde{A}''' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b''_{1,1} & b''_{1,2} & b''_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 & b''_{2,1} & b''_{2,2} & b''_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 & b''_{3,1} & b''_{3,2} & b''_{3,3} \end{array} \right).$$

Ceci dit exactement que les valeurs des neuf inconnues $x, y, \cdots, y'', z''$ se lisent dans la partie droite de $\widetilde{A}'''$: x, y, z en première colonne, x', y', z' en deuxième colonne et x'', y'', z'' en troisième colonne. Autrement dit la partie droite de $\widetilde{A}'''$ est égale à A^{-1}.

Un exemple

On veut calculer, si elle existe, la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$.

On considère $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Première phase de l'algorithme (pour savoir si A est inversible). On calcule

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{avec } L_3 - \tfrac{1}{2}L_1 \to L_3$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & -\dfrac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \qquad \text{avec } L_3 + \tfrac{1}{3}L_2 \to L_3$$

La partie gauche de cette dernière matrice a tous ses coefficients diagonaux différents de 0 donc A est inversible.

Seconde phase de l'algorithme (calcul de A^{-1}). On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 11/14 & 1/7 & 3/7 \\ 0 & 3 & 0 & 3/14 & 6/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & \mathbf{7/3} & -1/2 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{avec } L_1 + \frac{3}{7}L_3 \to L_1 \\ \text{avec } L_2 - \frac{3}{7}L_3 \to L_2 \end{array}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 9/14 & -3/7 & 5/7 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 3/14 & 6/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 7/3 & -1/2 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{avec } L_1 - \tfrac{2}{3}L_2 \to L_1$$

et finalement

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9/28 & -3/14 & 5/14 \\ 0 & 1 & 0 & 1/14 & 2/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & -3/14 & 1/7 & 3/7 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{avec } \frac{1}{2}L_1 \to L_1 \\ \text{avec } \frac{1}{3}L_2 \to L_2 \\ \text{avec } \frac{3}{7}L_3 \to L_3 \end{array}$$

ce qui donne

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/28 & -3/14 & 5/14 \\ 1/14 & 2/7 & -1/7 \\ -3/14 & 1/7 & 3/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ 2 & 8 & -4 \\ -6 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.4 Application des matrices aux systèmes linéaires

2.4.1 Systèmes linéaires et équations matricielles

Un système linéaire

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{lllll} a_{1,1}\,x_1 & + \; a_{1,2}\,x_2 & + \cdots + & a_{1,n}\,x_n & = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + \; a_{2,2}\,x_2 & + \cdots + & a_{2,n}\,x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1 & + \; a_{m,2}\,x_2 & + \cdots + & a_{m,n}\,x_n & = b_m \end{array} \right.$$

peut s'écrire sous forme d'une seule équation matricielle $A \times X = B$ en posant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont ainsi données par les coefficients de $(\mathcal{S})$ et la matrice X est l'inconnue. On notera que $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

2.4.2 Systèmes de Cramer

Définition 2.7

Un système linéaire $(\mathcal{S})$ écrit sous forme d'équation matricielle $A \times X = B$ est appelé un système de Cramer si A est une matrice inversible.

Propriété 2.6

Un système de Cramer écrit sous forme d'équation matricielle $A \times X = B$ admet une unique solution, qui est $A^{-1} \times B$.

2.5 Formule du binôme pour les matrices

Proposition 2.1

Soient A et B deux matrices carrées de même taille. Si A et B commutent (c'est à dire si elles vérifient $A \times B = B \times A$) alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot A^k \times B^{n-k} \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2.6 Exercices

Exercice 1. 1) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer, lorsque cela a un sens, les produits de matrices $A \times B$, $B \times A$, $A \times C$, $A \times D$, $D \times A$.

Exercice 2. 1) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Trouver toutes les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire vérifiant la relation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Même question qu'au 1) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Généraliser ce qui précède pour des matrices carrées de taille arbitraire.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
1) Calculer $A^2 - (a+d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_2$.
2) Déduire du 1) que la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et expliciter A^{-1} dans ce cas.

Exercice 6. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2 \cdot I_3$.
b) Déduire du a) que A est inversible et donner A^{-1}.
c) Retrouver le résultat du b) en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.
2) Calculer B^2 et donner une relation simple entre B^2 et B. En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Calculer $A^2 - 3 \cdot A$, en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2) Retrouver le résultat du 1) en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(A^n - I_3) \times (A - 2 \cdot I_3) = 0$ (on pourra raisonner par récurrence sur n).
4) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit une matrice $B_n \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en posant $B_n = A^n + A - 2 \cdot I_3$.
a) Montrer à l'aide du 3) que $B_{n+1} = 2 \cdot B_n$.
b) Déduire du a) une formule explicite pour B_n puis pour A^n.

Exercice 8. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant une ligne de zéros ou une colonne de zéros n'est pas inversible.

Exercice 9. On considère le système linéaire $\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + 3z & = 1 \\ x + 3y + 6z & = 3 \\ 2x + 6y + 13z & = 5 \end{array} \right.$

1) Écrire $(\mathcal{S})$ sous forme d'une équation matricielle $A \times X = B$.
2) En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, montrer que $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer puis calculer son unique solution.

Exercice 10. On appelle *opération élémentaire sur les lignes d'une matrice* $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une opération de l'un des types suivants :

1. Permuter deux lignes de M .
2. Remplacer la i^{eme} ligne L_i de M par $\alpha \cdot L_i$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Remplacer la i^{eme} ligne L_i de M par $L_i + \alpha \cdot L_j$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et où L_j est une ligne de M autre que L_i.

À toute opération élémentaire e on associe une *matrice élémentaire* $E \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ en appliquant l'opération e à la matrice identité I_m. Pour fixer les idées, nous prendrons par la suite $m = 3$ mais des résultats similaires sont vrais pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
1) Choisir trois opérations élémentaires e_1, e_2, e_3 de types différents et former les matrices élémentaires E_1, E_2, E_3 associées.
2) Appliquer les opérations e_i du 1) à la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$ puis calculer les produits matriciels $E_i \times M$. Quel résultat cela suggère-t-il ? Démontrer ce résultat.
3) Vérifier que les matrices élémentaires sont inversibles et que leurs inverses sont aussi des matrices élémentaires.
4) a) Déduire de l'algorithme de Gauss-Jordan et des questions précédentes qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires.
b) Écrire la matrice A de l'Exercice 9 comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 11. La *trace* d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $Tr(A)$, est la somme des coefficients sur la diagonale principale de A.
1) Montrer que pour toutes matrices A, B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a
$Tr(A + \alpha \cdot B) = Tr(A) + \alpha Tr(B)$;
$Tr(A \times B) = Tr(B \times A)$.
2) Existe-t-il deux matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A \times B - B \times A = I_n$?

Exercice 12. 1) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On suppose de plus que B est inversible.
1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(B^{-1} \times A \times B)^n = B^{-1} \times A^n \times B$.
2) Soit une matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels (on dit que D est une matrice diagonale). Montrer par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) On considère deux suites de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premiers termes $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ et vérifiant $x_{n+1} = x_n - 2y_n$ et $y_{n+1} = 3x_n + 6y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $M_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
a) Calculer x_1, y_1, x_2, y_2.
b) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M_{n+1} = A \times M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de M_n en fonction de M_0 et de A.
c) Vérifier que la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
d) Calculer $B^{-1} \times A \times B$ puis en déduire $B^{-1} \times A^n \times B$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
e) Calculer A^n à l'aide de d) puis en déduire x_n et y_n en fonction de n.

Exercice 13. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$, $B \times A$ puis $(A+B)^2$ et $A^2 + 2 \cdot A \times B + B^2$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 14. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $(M - I_3)^2$ et $(M - I_3)^3$.
2) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant 1) et la formule du binôme.

Exercice 15. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites de nombres réels telles que $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = 3x_n + y_n, \quad y_{n+1} = 3y_n + z_n, \quad z_{n+1} = 3z_n.$$

On note $M_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que$M_{n+1} = A \times M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Exprimer A en fonction de I_3 et de B.
   b) Calculer B^2 et B^3.
3) a) Montrer à l'aide du 2) et de la formule du binôme que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 3^n \cdot I_3 + 3^{n-1} n \cdot B + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \cdot B^2.$$

b) En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.