IUT de Villetaneuse - Département Informatique
Algèbre linéaire (semestre 4 - parcours MA)

Année 2021-2022

Table des matières

Chapitre 0

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

0.1 Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ où chaque x_i est un nombre réel.

0.1.1 Addition dans $\mathbb{R}^n$

Définition 0.1

La somme $v + v'$ de deux éléments $v = (x_1, \cdots, x_n)$ et $v' = (x'_1, \cdots, x'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$v + v' = (x_1 + x'_1, \cdots, x_n + x'_n).$$

Exemple 0.1 *Dans $\mathbb{R}^3$ on a* $(2, \frac{3}{2}, -1) + (3, -2, \pi) = (5, -\frac{1}{2}, -1 + \pi)$

Propriété 0.1

1. *La somme $v + v'$ de deux éléments v et v' de $\mathbb{R}^n$ est encore un élément de $\mathbb{R}^n$; on dit que $+$ est **une loi de composition interne** ;*
2. *Pour tous v, v', v'' dans $\mathbb{R}^n$, on a $(v + v') + v'' = v + (v' + v'')$; on dit que **la loi $+$ est associative**.*
3. *Pour tout élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a*

   $$(x_1, \cdots, x_n) + (0, \cdots, 0) = (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0) + (x_1, \cdots, x_n).$$

   *On dit que le n-uplet $(0, \cdots, 0)$ est **élément neutre** pour la loi $+$; on le note $0_{\mathbb{R}^n}$ ou simplement 0.*
4. *Pour tout élément $v = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a*

   $$(x_1, \cdots, x_n) + (-x_1, \cdots, -x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

   *On dit que $(-x_1, \cdots, -x_n)$ est **le symétrique** ou **l'opposé** de $v = (x_1, \cdots, x_n)$ pour la loi $+$; on le note $-v$;*
5. *Pour tous v, v' dans $\mathbb{R}^n$, on a $v + v' = v' + v$; on dit que **la loi $+$ est commutative**.*

0.1.2 Multiplication d'un élément de $\mathbb{R}^n$ par un nombre réel

Définition 0.2

Le produit $\alpha \cdot v$ d'un élément $v = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par un réel α est défini par

$$\alpha \cdot v \;=\; (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n).$$

Exemple 0.2 *Dans $\mathbb{R}^4$ on a $(-3) \cdot (-1, 2, \frac{5}{6}, 0) = (3, -6, -\frac{5}{2}, 0)$*

Propriété 0.2

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha' \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\forall v' \in \mathbb{R}^n$ on a :

6. *$\alpha \cdot v$ est encore un élément de $\mathbb{R}^n$;*
7. *$(\alpha + \alpha') \cdot v \;=\; \alpha \cdot v \;+\; \alpha' \cdot v$; l'addition + des réels est **distributive à droite** par rapport à la loi $\cdot$.*
   *$\alpha \cdot (v + v') \;=\; \alpha \cdot v \;+\; \alpha \cdot v'$; l'addition + dans $\mathbb{R}^n$ est **distributive à gauche** par rapport à la loi $\cdot$.*
8. *$(\alpha\alpha') \cdot v \;=\; \alpha \cdot (\alpha' \cdot v)$;*
9. *$1 \cdot v \;=\; v$.*

Remarque 0.1 *Dans les propriétés précédentes, il faut bien noter que le même symbole + est utilisé pour désigner deux opérations différentes : d'une part l'addition habituelle dans $\mathbb{R}$ et d'autre part l'addition dans $\mathbb{R}^n$ vue dans la définition 0.1. De même la multiplication dans $\mathbb{R}$ est souvent notée aussi $\cdot$ et ne doit pas être confondue avec l'opération $\cdot$ de la Définition 0.2.*

0.1.3 Notion d'espace vectoriel

Au vu des propriétés (1) à (9) ci-dessus, on dit que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés les **vecteurs** de cet espace vectoriel et les réels sont appelés les **scalaires**. En particulier $0_{\mathbb{R}^n}$ est appelé le **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 0.2 *On écrit parfois $\vec{v}$ au lieu de v pour désigner un vecteur de $\mathbb{R}^n$.*

0.1.4 Calcul sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Propriété 0.3

- *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad (-\alpha) \cdot v \;=\; \alpha \cdot (-v) \;=\; -(\alpha \cdot v)$;*
- *En particulier on obtient avec $\alpha = 1$: $\quad (-1) \cdot v \;=\; -v$.*

Soustraction de deux vecteurs

On pose, pour tous vecteurs v et v' de $\mathbb{R}^n$:

$$v - v' = v \;+\; (-v')$$

Exemple 0.3 *Dans $\mathbb{R}^3$, $(2, 1, -1) - (4, 1, -6) = (2, 1, -1) + (-4, -1, 6) = (-2, 0, 5)$.*

Propriété 0.4

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha' \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\forall v' \in \mathbb{R}^n$ *on a :*

- $(\alpha - \alpha') \cdot v = \alpha \cdot v - \alpha' \cdot v$;
- $\alpha \cdot (v - v') = \alpha \cdot v - \alpha \cdot v'$.

Propriété 0.5 (*propriétés d'absorption*)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ *on a :*

- $0 \cdot v = 0_{\mathbb{R}^n}$;
- $\alpha \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$;
- *réciproquement,* $\alpha \cdot v = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow (\alpha = 0$ *ou* $v = 0_{\mathbb{R}^n})$.

0.1.5 Colinéarité

Définition 0.3

On dit que deux vecteurs v, v' de $\mathbb{R}^n$ sont **colinéaires** *s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v' = \alpha \cdot v$ ou $v = \alpha \cdot v'$. En particulier, le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ est colinéaire à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$.*

0.2 Représentation graphique des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Sur un dessin, les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ peuvent se représenter par des points dans un repère orthonormé dont l'origine représente le vecteur nul.

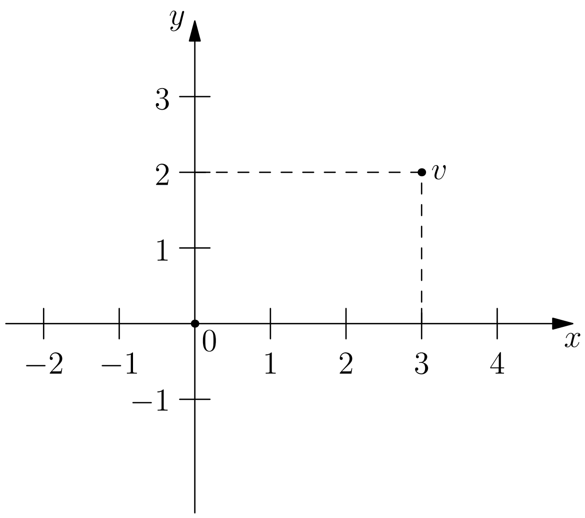


FIGURE 1 – Le vecteur $v = (3, 2)$ dans $\mathbb{R}^2$

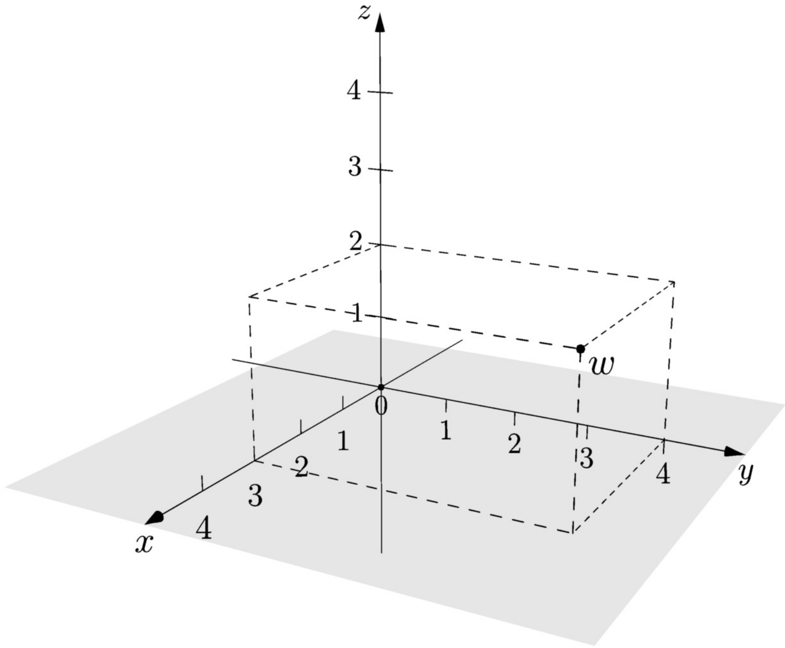


FIGURE 2 – Le vecteur $w = (3,4,2)$ dans $\mathbb{R}^3$

0.3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 0.4

Soient $v_1, \cdots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est une ***combinaison linéaire*** *de $v_1, \cdots, v_k$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ tels que*

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k.$$

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, \cdots, v_k$ est noté $Vect(v_1, \cdots, v_k)$.

Exemple 0.4

- *Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $v = (1, e, 4)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (\pi, 1, 0), v_2 = (\frac{3}{7}, -9, 0)$; autrement dit $v \notin Vect(v_1, v_2)$.*
- *Dans $\mathbb{R}^4$, le vecteur $v = (-4, 16, -3, 4)$ est combinaison linéaire des vecteurs*

$$v_1 = (1, 2, -3, -1), v_2 = (-2, 4, 1, 2), v_3 = (10, -4, -15, -10),$$

autrement dit $v \in Vect(v_1, v_2, v_3)$. On a en effet

$$(-4, 16, -3, 4) = (-2) \cdot (1, 2, -3, -1) + 6 \cdot (-2, 4, 1, 2) + 1 \cdot (10, -4, -15, -10).$$

Il y a ici plusieurs façons d'écrire v comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 ; par exemple on a aussi

$$(-4, 16, -3, 4) = 2 \cdot (1, 2, -3, -1) + 3 \cdot (-2, 4, 1, 2) + 0 \cdot (10, -4, -15, -10).$$

0.4 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

0.4.1 Définition et propriétés générales

Définition 0.5

Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (en abrégé s.e.v.) est un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

P1. Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient à E ;

P2. Si v, v' sont deux vecteurs dans E, alors leur somme $v + v'$ est aussi dans E ; on dit alors que E est ***stable par addition ;***

P3. Si α est un réel et si v est un vecteur dans E alors le produit $\alpha \cdot v$ est aussi dans E ; on dit alors que E est ***stable pour la multiplication par les scalaires.***

Exemple 0.5 *Le singleton $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathbb{R}^n$ lui-même sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Les droites vectorielles et les plans vectoriels sont aussi des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ qui, pour $n = 2$ ou $n = 3$, sont des objets familiers de la géométrie étudiée au lycée (voir plus bas).*

Propriété 0.6

Soient E et F deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Alors

- *L'intersection $E \cap F$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$;*
- *L'ensemble*
$$G = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in E \ \exists v \in F \text{ tels que } \ w = u + v\}$$
est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. C'est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ qui contient $E \cup F$. Il se note $E + F$.

Théorème 0.1

Soient $v_1, \cdots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $Vect(v_1, \cdots, v_k)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. De plus, c'est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ qui contient tous les vecteurs $v_1, \cdots, v_k$. On dit que c'est le s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ ***engendré*** *par les vecteurs $v_1, \cdots, v_k$.*

0.4.2 Droites vectorielles et plans vectoriels

Définition 0.6

Un ensemble $Vect(v_1)$, où v_1 est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, est appelé une ***droite vectorielle*** *de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble dont les éléments sont les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ colinéaires à un vecteur $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ donné.*

Définition 0.7

Un ensemble $Vect(v_1, v_2)$, où v_1, v_2 sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$, est appelé un ***plan vectoriel*** *de $\mathbb{R}^n$.*

0.4.3 Équations cartésiennes des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$

Propriété 0.7

Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On dit alors que $ax + by = 0$ est une ***équation (cartésienne)*** *de D.*

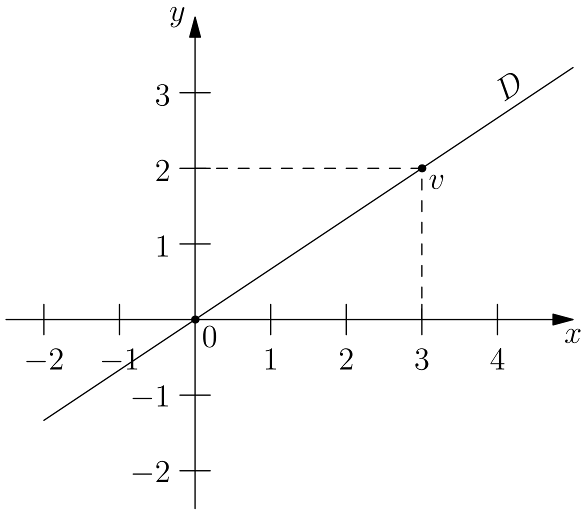


FIGURE 3 – La droite vectorielle D de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x - 3y = 0$ contient le vecteur $v = (3, 2)$

0.4.4 Équations cartésiennes des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Propriété 0.8

Un ensemble $P \subset \mathbb{R}^3$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On dit alors que $ax + by + cz = 0$ est une ***équation (cartésienne)*** *de P.*

0.4.5 Représentations cartésiennes des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$

Propriété 0.9

Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si il existe deux plans vectoriels P, P' de $\mathbb{R}^3$ différents tels que $D = P \cap P'$. En considérant une équation $ax+by+cz = 0$ de P et une équation $a'x + b'y + c'z = 0$ de P', on obtient

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax + by + cz = 0 \quad \textit{et} \quad a'x + b'y + c'z = 0\right\}$$

et on dit que les deux équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ forment une représentation cartésienne de D.

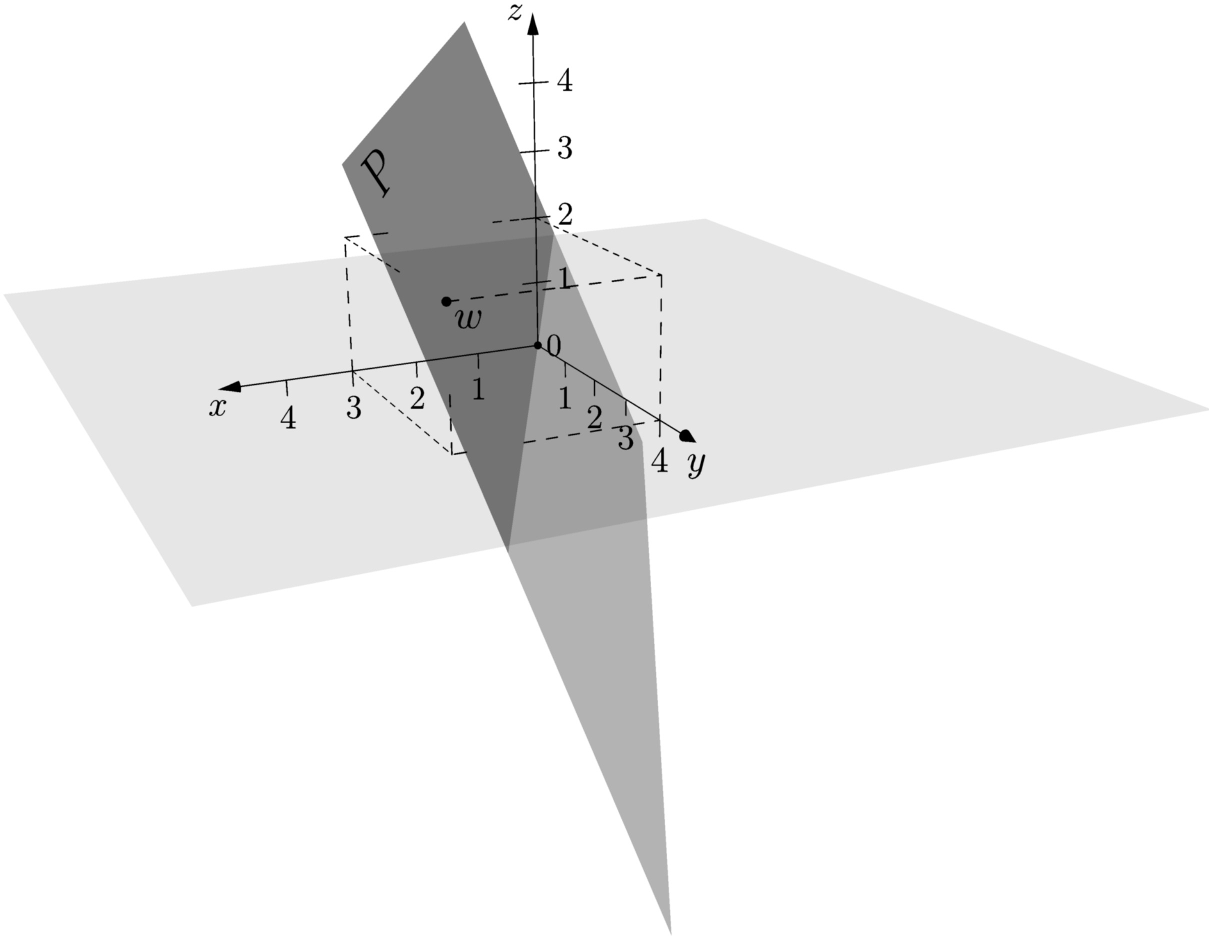


FIGURE 4 – Le plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y - z = 0$ contient le vecteur $w = (3, 4, 2)$

0.5 Familles libres

Définition 0.8

*Une **famille libre** dans $\mathbb{R}^n$ est une suite $(v_1, \cdots, v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que l'égalité $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots \alpha_k \cdot v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ est vraie seulement pour $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. On dit aussi que les vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ sont **linéairement indépendants**. Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ sont **liés**.*

On peut reformuler ces notions sous la forme suivante :

Propriété 0.10

- *Des vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants si et seulement si aucun d'entre eux n'est combinaison linéaire des autres.*
- *Des vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ sont liés si et seulement si au moins l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres.*

Remarque 0.3 *Si des vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants alors ils sont tous différents du vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ et de plus ils sont tous différents les uns des autres.*

0.6 Familles génératrices d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

Définition 0.9

*Soit E un s.e.v de $\mathbb{R}^n$. Une **famille génératrice** de E est une suite $(v_1, \cdots, v_k)$ de vecteurs appartenant à E telle que tout vecteur $v \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_1, \cdots, v_k$. Autrement dit, c'est une suite de vecteurs $(v_1, \cdots, v_k)$ telle que $Vect(v_1, \cdots, v_k) = E$.*

0.7 Bases et dimension d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

Définition 0.10

*Soit E un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas réduit au singleton $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Une **base** de E est une suite $(v_1, \cdots, v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui est à la fois une famille libre et une famille génératrice de E. De plus, on convient que l'ensemble vide $\emptyset$ est l'unique base du s.e.v. $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.*

Proposition 0.1

Soit E un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas réduit au singleton $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Une suite $(v_1, \cdots, v_k)$ de vecteurs est une base de E si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites : suivantes :

- *Les k vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ sont tous dans E ;*
- *Tout vecteur $v \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $v_1, \cdots, v_k$.*

Exemple 0.6

- *La **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ est la base de $\mathbb{R}^n$ constituée des n vecteurs*

$$v_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0, 0), \cdots, v_n = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1).$$

- *Si D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur non nul de D constitue une base de D. En particulier si D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax+by=0$ alors le vecteur $(-b,a)$ constitue une base de D.*
- *Si v_1, v_2 sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ alors (v_1, v_2) est une base du plan vectoriel $P = Vect(v_1, v_2)$.*
- *Si P est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax+by+cz=0$ avec $a \neq 0$ alors $\big((-b,a,0),(-c,0,a)\big)$ est une base de P. Trouver de même une base de P lorsque $b \neq 0$ et lorsque $c \neq 0$.*

0.7.1 Dimension

Théorème 0.2

- *Tout s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ possède (au moins) une base.*
- *Toutes les bases d'un même s.e.v. E de $\mathbb{R}^n$ contiennent le même nombre de vecteurs ; ce nombre est appelé* **la dimension** *de E et se note $\mathrm{Dim}(E)$.*

Exemple 0.7
- $\mathrm{Dim}\big(\{0_{\mathbb{R}^n}\}\big) = 0$ *et* $\mathrm{Dim}\big(\mathbb{R}^n\big) = n$.
- *Si D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ alors* $\mathrm{Dim}(D) = 1$.
- *Si P est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors* $\mathrm{Dim}(P) = 2$.

Proposition 0.2

Soit E un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.
- *Si $(v_1, \cdots, v_l)$ est une famille libre de vecteurs qui appartiennent à E alors on a $l \leq k$. Si de plus $l = k$ alors cette famille est une base de E.*
- *Si $(v_1, \cdots, v_l)$ est une famille génératrice de E alors on a $l \geq k$. Si de plus $l = k$ alors cette famille est une base de E.*

En considérant le cas particulier $E = \mathbb{R}^n$ dans la proposition précédente, on obtient :

Corollaire 0.1

- *si $(v_1, \cdots, v_l)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^n$ alors on a $l \leq n$. Si de plus $l = n$ alors cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$.*
- *si $(v_1, \cdots, v_l)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ alors on a $l \geq n$. Si de plus $l = n$ alors cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$.*

0.7.2 Dimension et inclusion

Théorème 0.3

Soient E, F deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tels que $E \subset F$. Alors on a $Dim(E) \leq Dim(F)$. De plus, l'égalité $\mathrm{Dim}(E) = \mathrm{Dim}(F)$ est vraie si et seulement si $E = F$.

0.8 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 0.11

Le **rang** *d'une famille de vecteurs* $(v_1, \cdots, v_k)$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *est la dimension du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k)$ *engendré par ces vecteurs. On le note* $\mathrm{Rg}(v_1, \cdots, v_k)$*. Dit autrement, on définit*

$$\mathrm{Rg}(v_1, \cdots, v_k) = \mathrm{Dim}\big(\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k)\big).$$

Chapitre 1

Applications linéaires

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite ***linéaire*** *si elle vérifie*

$$\forall u \in \mathbb{R}^n\ \forall v \in \mathbb{R}^n \quad f(u+v) = f(u) + f(v),$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbb{R}^n \quad f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u).$$

Si de plus $n = m$ alors on dit que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1 *Supposons que $(v_1, \cdots, v_k)$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire que $Vect(v_1, \cdots, v_k) = \mathbb{R}^n$. Alors une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est totalement déterminée dès lors que l'on connait les valeurs de $f(v_1), \cdots, f(v_k)$. En particulier f est totalement déterminée si l'on connait sa valeur sur tous les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^n$.*

Propriété 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors on a

1. *$f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$;*
2. *si E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ alors $f(E)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathrm{Dim}(f(E)) \leq \mathrm{Dim}(E)$;*
3. *si F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ alors $f^{-1}(F)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.*

1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1.2

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

1. *On appelle* ***noyau*** *de f, et on note $Ker(f)$, le s.e.v. $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^m}\})$;*
2. *On appelle* ***image*** *de f, et on note $Im(f)$, le s.e.v. $f(\mathbb{R}^n)$.*

Propriété 1.2

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.
- *f est surjective si et seulement si $Im(f) = \mathbb{R}^m$;*
- *f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.*

1.3 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1.1

1. *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les applications $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\lambda \cdot f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont aussi linéaires.*
2. *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires. Alors l'application $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est aussi linéaire.*

1.4 Le théorème du rang

Théorème 1.2

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors on a la relation

$$n = Dim(Ker(f)) + Dim(Im(f)).$$

Remarque 1.2 *Pour une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la dimension de $Im(f)$ est appelée le rang de f, noté $Rg(f)$. Ainsi la relation du Théorème 1.4 devient*

$$n = Dim(Ker(f)) + Rg(f).$$

Corollaire 1.1

- *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si f est injective (resp. surjective) alors $n \leq m$ (resp. $n \geq m$). En particulier si f bijective alors $n = m$.*
- *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
  1. *f est bijective*
  2. *f est injective*
  3. *f est surjective*

1.5 Calcul matriciel et applications linéaires

1.5.1 Coordonnées d'un vecteur

On rappelle que si $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $b_1, \cdots, b_n$, c'est à dire sous la forme

$$v = x_1 \cdot b_1 + \ldots + x_n \cdot b_n$$

où $x_1, \cdots, x_n$ sont des nombres réels.

Définition 1.3

*Avec les notations ci-dessus, on dit que $x_1, \cdots, x_n$ sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. La matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée **matrice des coordonnées** de v dans la base $\mathcal{B}$ et est notée $[v]_{\mathcal{B}}$. C'est une matrice de taille $n \times 1$ (matrice colonne).*

Propriété 1.3

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Pour tous vecteurs v et v' de $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel α on a :

- $[v + v']_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [v']_{\mathcal{B}}$;
- $[\alpha \cdot v]_{\mathcal{B}} = \alpha \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. On note $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $[v']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Ainsi $v = x_1 \cdot b_1 + \cdots + x_n \cdot b_n$ et $v' = x'_1 \cdot b_1 + \cdots + x'_n \cdot b_n$ d'où

$$v + v' = (x_1 + x'_1) \cdot b_1 + \cdots + (x_n + x'_n) \cdot b_n \quad \text{et} \quad \alpha \cdot v = (\alpha x_1) \cdot b_1 + \cdots + (\alpha x_n) \cdot b_n.$$

Ceci montre que les coordonnées de $v + v'$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $x_1 + x'_1, \cdots, x_n + x'_n$ et que les coordonnées de $\alpha \cdot v$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n$. Écrit sous forme de matricielle, cela donne

$$[v + v']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}} + [v']_{\mathcal{B}}$$

et

$$[\alpha \cdot v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

■

1.5.2 Représentation matricielle d'une application linéaire

On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, une base $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et une base $\mathcal{C} = (c_1, \cdots, c_m)$ de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.4

*On appelle **matrice de** f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, et on note $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, la matrice dont la j^{eme} colonne est constituée des coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\mathcal{C}$, ceci pour chaque $j \in \{1, \cdots, n\}$. C'est donc une matrice $m \times n$.*
Lorsque $n = m$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ on écrit simplement $Mat(f, \mathcal{B})$ au lieu de $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Remarque 1.3 *On rappelle que* $Id_{\mathbb{R}^n}$ *désigne l'application identité de* $\mathbb{R}^n$*, qui est définie par* $Id_{\mathbb{R}^n}(v) = v$ *pour tout* $v \in \mathbb{R}^n$*. Pour toute base* $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*, on a* $Mat(Id_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}) = I_n$ *où* I_n *désigne la matrice identité de taille* $n \times n$*. En effet, pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$*, on a* $Id_{\mathbb{R}^n}(b_j) = b_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} \cdot b_i$ *avec* $x_{j,j} = 1$ *et* $x_{i,j} = 0$ *pour* $i \neq j$*.*

Propriété 1.4

Soient $\mathcal{B}$ *une base de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{C}$ *une base de* $\mathbb{R}^m$*. Pour toute matrice* M *de taille* $m \times n$ *à coefficients réels, il existe une unique application linéaire* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *telle que* $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = M$*.*

Démonstration. On note $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \cdots, c_m)$ et $m_{i,j}$ les coefficients de M.

- On commence par poser $f(b_j) = \sum_{1=1}^m m_{i,j} \cdot c_j$ pour chaque $j \in \{1, \cdots, n\}$. Ensuite on définit l'image $f(v)$ d'un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}^n$ en le décomposant dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire en l'écrivant sous la forme $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot b_j$ puis en posant $f(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f(b_j)$. On vérifie facilement que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ainsi construite est linéaire. Par définition des vecteurs $f(b_j)$, on a $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = M$.

- Le fait que f soit la seule application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ayant pour matrice M dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ est une conséquence de la Remarque 1.1. ■

En utilisant la propriété précédente avec les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, on peut donner la définition suivante :

Définition 1.5

Notons $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ *les bases canoniques respectives de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$*. Pour toute matrice* M *de taille* $m \times n$ *à coefficients réels, il existe une unique application linéaire* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *telle que* $Mat(f, \mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0) = M$ *et on dit que* f *est l'application linéaire canoniquement associée à* M*.*

Exemple 1.1 *Si* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$*, l'application linéaire canoniquement associée à* M *est l'unique application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *vérifiant*

$f(1,0,0) = 1 \cdot (1,0) + 4 \cdot (0,1) = (1,4)$ *;*
$f(0,1,0) = 2 \cdot (1,0) + 5 \cdot (0,1) = (2,5)$ *;*
$f(0,0,1) = 3 \cdot (1,0) + 6 \cdot (0,1) = (3,6)$*.*

1.5.3 Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Théorème 1.3

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application linéaire,* $\mathcal{B}$ *une base de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{C}$ *une base de* $\mathbb{R}^m$*. Pour tout vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$ *on a :*

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times [v]_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. On se place dans la situation $n = 2, m = 3$ (le cas général se traite de même). On note

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2),\ \mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3) \quad \text{et} \quad Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \epsilon & \varphi \end{pmatrix}.$$

Supposons $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ c'est à dire $v = x \cdot b_1 + y \cdot b_2$. On a alors

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x \cdot b_1 + y \cdot b_2) \\ &= x \cdot f(b_1) + y \cdot f(b_2) \\ &= x \cdot (\alpha \cdot c_1 + \gamma \cdot c_2 + \epsilon \cdot c_3) + y \cdot (\beta \cdot c_1 + \delta \cdot c_2 + \varphi \cdot c_3) \\ &= (\alpha x + \beta y) \cdot c_1 + (\gamma x + \delta y) \cdot c_2 + (\epsilon x + \varphi y) \cdot c_3. \end{aligned}$$

ce qui s'écrit avec des matrices

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \\ \epsilon x + \varphi y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \epsilon & \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times [v]_{\mathcal{B}}. \qquad \blacksquare$$

Exemple 1.2 *On considère l'application linéaire f canoniquement associée à la matrice M de l'exemple précédent et on désigne à nouveau par $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. En notant $v = (x, y, z)$ et $f(v) = (x', y')$ on a*

$$[v]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f(v)]_{\mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

donc le Théorème 1.3 donne

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Mat(f, \mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix},$$

et on obtient la formule explicite $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$.

1.5.4 Opérations sur les matrices et opérations sur les applications linéaires

Théorème 1.4

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires, α un réel, $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^m$. Alors on a

- $Mat(f + g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) + Mat(g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$,
- $Mat(\alpha \cdot f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \alpha \cdot Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Démonstration. Appelons $b_1, \cdots, b_n$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et $c_1, \cdots, c_m$ les vecteurs de la base $\mathcal{C}$. Les coefficients des quatre matrices $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, $Mat(g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, $Mat(f + g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $Mat(\alpha \cdot f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ sont notés respectivement $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$ et $t_{i,j}$ (où $i \in \{1, \cdots, m\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$).

Pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, on a donc d'une part

$$(f + g)(b_j) = z_{1,j} \cdot c_1 + \cdots + z_{m,j} \cdot c_m$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (f + g)(b_j) = f(b_j) + g(b_j) &= (x_{1,j} \cdot c_1 + \cdots + x_{m,j} \cdot c_m) + (y_{1,j} \cdot c_1 + \cdots + y_{m,j} \cdot c_m) \\ &= (x_{1,j} + y_{1,j}) \cdot c_1 + \cdots + (x_{m,j} + y_{m,j}) \cdot c_m \end{aligned}$$

ce qui implique $z_{i,j} = x_{i,j} + y_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}$. Ceci dit exactement que $Mat(f + g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) + Mat(g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

On a de plus

$$(\alpha \cdot f)(b_j) = t_{1,j} \cdot c_1 + \cdots + t_{m,j} \cdot c_m$$

et aussi

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot f)(b_j) = \alpha \cdot f(b_j) &= \alpha \cdot (x_{1,j} \cdot c_1 + \cdots + x_{m,j} \cdot c_m) \\ &= (\alpha x_{1,j}) \cdot c_1 + \cdots + (\alpha x_{m,j}) \cdot c_m\end{aligned}$$

ce qui donne $t_{i,j} = \alpha \cdot x_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}$ et en conséquence $Mat(\alpha \cdot f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \alpha \cdot Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. ■

Théorème 1.5

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires, $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{D}$ une base de $\mathbb{R}^p$. Alors

$$Mat(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D}) = Mat(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

En particulier si $n = m = p$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ on a

$$Mat(g \circ f, \mathcal{B}) = Mat(g, \mathcal{B}) \times Mat(f, \mathcal{B}).$$

Démonstration. On note $b_1, \cdots, b_n$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Considérons les matrices $n \times 1$ suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour toute matrice M de taille $p \times n$ et pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, le produit $M \times E_j$ est une matrice colonne $p \times 1$ contenant les mêmes coefficients que la j^{eme} colonne de la matrice M. Il suffit donc de prouver que

$$Mat(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D}) \times E_j = \Big(Mat(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\Big) \times E_j$$

pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. Ceci s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}\Big(Mat(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\Big) \times E_j &= Mat(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \Big(Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times E_j\Big) \\ &= Mat(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times [f(b_j)]_{\mathcal{C}} \\ &= [g(f(b_j))]_{\mathcal{D}} \\ &= [g \circ f(b_j)]_{\mathcal{D}} \\ &= Mat(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D}) \times E_j\end{aligned}$$

où la première égalité est due à l'associativité du produit matriciel, les deuxième et cinquième égalités résultent de la définition de $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et de $Mat(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D})$ et où la troisième égalité est donnée par le Théorème 1.3. ■

Corollaire 1.2

Soient f un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^n$ (on dit alors que f est un isomorphisme $\mathbb{R}^n$) et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Alors la bijection réciproque f^{-1} est aussi une application linéaire et on a

$$Mat(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \big(Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\big)^{-1}.$$

En particulier si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on a

$$Mat(f^{-1}, \mathcal{B}) = \big(Mat(f, \mathcal{B})\big)^{-1}.$$

Démonstration. On vérifie d'abord que l'application réciproque f^{-1} est linéaire. Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$ et la linéarité de f on obtient

$$u+v = f(f^{-1}(u)) + f(f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)) \quad \text{et} \quad \alpha \cdot u = \alpha \cdot f(f^{-1}(u)) = f(\alpha \cdot f^{-1}(u)).$$

Comme $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$ on en déduit

$$f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \quad \text{et} \quad f^{-1}(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f^{-1}(u),$$

ce qu'on voulait. La Remarque 1.3 et le Théorème 2.4 donnent ensuite

$$I_n = Mat(\underbrace{f^{-1} \circ f}_{=Id_{\mathbb{R}^n}}, \mathcal{B}) = Mat(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \times Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

ainsi que

$$I_n = Mat(\underbrace{f \circ f^{-1}}_{=Id_{\mathbb{R}^n}}, \mathcal{B}') = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \times Mat(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}),$$

ce qui montre que la matrice $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible et que son inverse est la matrice $Mat(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. ■

1.6 Changements de bases

1.6.1 Matrices de passage

Définition 1.6

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. On appelle **matrice de passage** *de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice dont la j^{eme} colonne est constituée des coordonnées du j^{eme} vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, ceci pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$. C'est donc une matrice $n \times n$.*

Exemple 1.3 *Considérons les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:*

$$\mathcal{B} = \big((1,1), (-1,1)\big) \quad et \quad \mathcal{B}' = \big((-2,4), (-2,6)\big).$$

On a

$$(-2,4) = 1 \cdot (1,1) + 3 \cdot (-1,1) \quad et \quad (-2,6) = 2 \cdot (1,1) + 4 \cdot (-1,1)$$

donc $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.4 *Étant données deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est aussi la matrice de l'application Identité de $\mathbb{R}^n$ dans les bases $\mathcal{B}', \mathcal{B}$:*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat(Id_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Propriété 1.5

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ trois bases de $\mathbb{R}^n$. Alors on a

1. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$,
2. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *est inversible et* $\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$,
3. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ *("relation de Chasles")* .

Démonstration. En gardant en tête la Remarque 1.4 au-dessus, le *1* n'est rien d'autre que la Remarque 1.3 et le *2* s'obtient en utilisant le Corollaire 2.3 avec $f = Id_{\mathbb{R}^n}$; le *3* s'obtient en appliquant le Théorème 2.4 avec $f = g = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'', \mathcal{C} = \mathcal{B}', \mathcal{D} = \mathcal{B}$. ■

1.6.2 Formule de changement de coordonnées pour un vecteur

Théorème 1.6

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \times [v]_{\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} \times [v]_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. La deuxième égalité est donnée par le *2* de la Propriété 1.5. En tenant compte de la Remarque 1.4, la première égalité s'obtient simplement en prenant $f = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{B}'$ dans le Théorème 1.3. ■

1.6.3 Formule de changement de bases pour une application linéaire

Théorème 1.7

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de $\mathbb{R}^m$. Alors on a

$$Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \times Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Démonstration. On peut bien sûr écrire $f = (Id_{\mathbb{R}^m} \circ f) \circ Id_{\mathbb{R}^n}$, donc, avec le Théorème 2.4 et la Remarque 1.4, on obtient

$$\begin{aligned}
Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') &= Mat\big((Id_{\mathbb{R}^m} \circ f) \circ Id_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}', \mathcal{C}'\big) \\
&= Mat(Id_{\mathbb{R}^m} \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{C}') \times Mat(Id_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \\
&= Mat(Id_{\mathbb{R}^m}, \mathcal{C}, \mathcal{C}') \times Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times Mat(Id_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \\
&= P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \times Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}
\end{aligned}$$

■

Dans le cas particulier où $n = m$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$ le Théorème 1.7 donne le résultat suivant (le plus utile en pratique) :

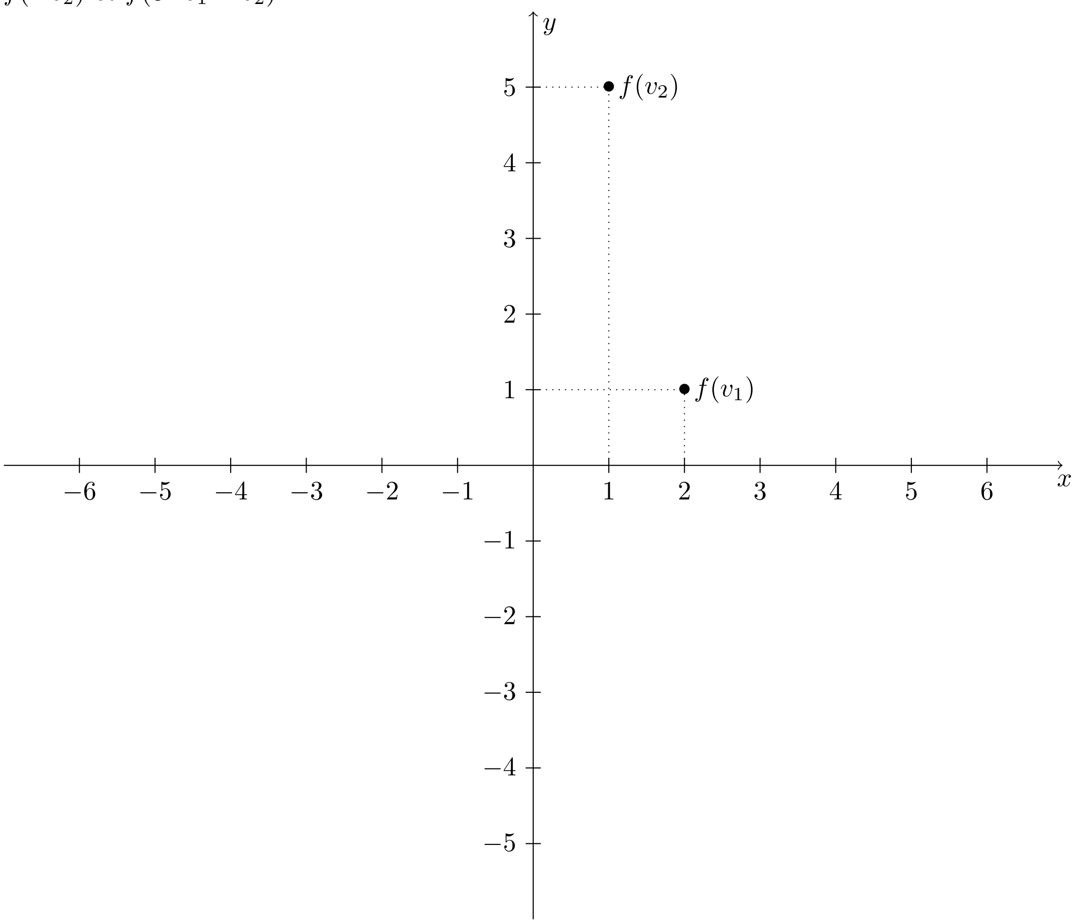
Corollaire 1.3

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Alors on a

$$Mat(f,\mathcal{B}') = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} \times Mat(f,\mathcal{B}) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

1.7 Exercices

Exercice 1. On a représenté sur le dessin ci-dessous les images de deux vecteurs v_1 et v_2 de $\mathbb{R}^{1000}$ par une application linéaire $f : \mathbb{R}^{1000} \to \mathbb{R}^2$. Placer sur le même dessin les vecteurs $f(3 \cdot v_1)$, $f(-v_2)$ et $f(3 \cdot v_1 - v_2)$.



Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y, xy, x+2y) \end{array}$

b) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & k \cdot (x,y) \end{array}$ où k est un réel donné.

c) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array}$

$d)\quad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y)+(a,b) \end{array}$ où (a,b) est un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$.
Interpréter géométriquement les exemples b)c)d).

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire surjective et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ une application.
1) Montrer que si $g \circ f$ est linéaire alors g est linéaire.
2) Déduire du 1) que la réciproque f^{-1} d'une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est aussi linéaire.

Exercice 4. Pour chacune des matrices M suivantes, donner une formule explicite pour l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ canoniquement associée associée à M. On précisera dans chaque cas les valeurs de n et m. Déterminer ensuite $Ker(f)$ et $Im(f)$.

$$1)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. 1) On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+y, y+z).$$

a) Vérifier que f est linéaire.
b) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$ puis donner une base et la dimension de ces s.e.v.
2) Mêmes questions pour l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z).$$

3) Mêmes questions pour l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = (x-2y, -x+2y, 2x-4y).$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (5x-6y, 3x-4y)$. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1) Vérifier que f est linéaire.
2) Justifier que $\mathcal{B} = \big((1,1),(2,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3) a) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ puis dans la base $\mathcal{B}$.
4) Justifier que l'application $f \circ f$ est linéaire ; former alors sa matrice dans la base $\mathcal{C}$ puis dans la base $\mathcal{B}$.
5) On considère le vecteur $v = (-2,3)$.
   a) Calculer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.
   b) A l'aide d'une formule matricielle convenable, calculer $[f(v)]_{\mathcal{C}}$ puis $[f(v)]_{\mathcal{B}}$.

Exercice 7. On note respectivement $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
1) Donner explicitement $f(x,y,z)$.
2) On pose $v_1' = v_2 + v_3$, $v_2' = v_3 + v_1$ et $v_3' = v_1 + v_2$.

a) Montrer que $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Calculer la matrice $Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{C})$

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (-1,-3)$ et $v = (4,-3)$.
1) Représenter ces trois vecteurs sur un dessin.
2) a) Justifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer graphiquement les coordonnées de v dans cette base.
b) Retrouver le résultat du a) par un calcul utilisant une matrice de passage convenable.

Exercice 9. On suppose que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on définit trois nouveaux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en posant $w_1 = v_2 + v_3,\ w_2 = v_1 + v_3,\ w_3 = v_1 + v_2$.
1) Montrer que $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.
3) Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ de deux façons différentes :
a) en utilisant seulement la définition ;
b) en utilisant une relation entre $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.
4) Un vecteur v a pour coordonnées 1,2,3 dans la base $\mathcal{B}$. Quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 10. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (-2,2,3), \qquad v_2 = (-8,5,2), \qquad v_3 = (-7,2,6).$$

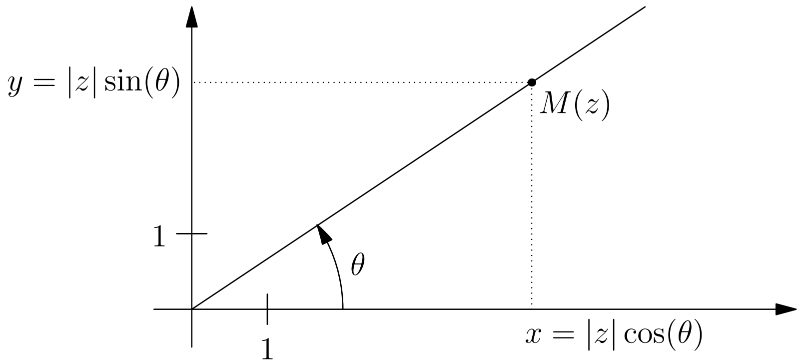
1) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que M soit la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
3) Trouver une base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}^3$ telle que M soit la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}$.
4) Un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ a pour coordonnées 1,0,-1 dans la base $\mathcal{B}'$. Quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}''$? Dans la base canonique ?

Exercice 11. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \frac{1}{4} \cdot (3x - y, -3x + y)$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1) Vérifier que f est linéaire.
2) Former la matrice de f dans la base canonique, c'est à dire $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_0)$.
3) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
4) a) Choisir un vecteur $v_1 \neq (0,0)$ dans $Ker(f)$ et un vecteur $v_2 \neq (0,0)$ dans $Im(f)$ puis justifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Calculer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$.
5) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de deux façons différentes :
a) En utilisant seulement la définition ;
b) à l'aide de la formule de changement de bases.
6) On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g = 2 \cdot f - Id_{\mathbb{R}^2}$.
Justifier sans calcul que g est linéaire puis calculer $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}_0)$.
7) a) Représenter sur un dessin les s.e.v. $Ker(f)$ et $Im(f)$ ainsi que les images par f et g de quelques vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
b) Interpréter géométriquement les applications f et g.

Exercice 12. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canonique-

ment associé à la matrice
$$M = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
et $g = \frac{1}{2}(f + Id_{\mathbb{R}^3})$.
1) Donner une formule explicite pour $f(x, y, z)$.
2) Vérifier que les vecteurs $b_1 = (0, 1, 1), b_2 = (1, 0, 1), b_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}$.
3) Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ puis calculer son inverse.
4) Calculer $Mat(f, \mathcal{B})$ de deux façons différentes :
   a) en utilisant seulement la définition ;
   b) à l'aide de la formule de changement de bases.
5) Justifier sans calcul que g est aussi linéaire puis calculer $Mat(g, \mathcal{B})$.
6) Interpréter géométriquement f et g.

Exercice 13. Rappels sur les nombres complexes. Le *module* d'un nombre complexe $z = x+iy$ est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si l'on représente z par un point du plan $M(z)$ de coordonnées x, y un repère orthonormé, alors $|z|$ est simplement la distance entre ce point et l'origine O du répère. Un nombre complexe $z = x + iy$ peut aussi s'écrire sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\theta}$ où $e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$; par identification des parties réelles et imaginaires, on a donc $x = |z|\cos(\theta)$ et $y = |z|\sin(\theta)$. On dit que le nombre réel θ est un *argument* de z ; c'est l'angle orienté entre l'axe horizontal et la demi-droite partant de l'origine et passant par le point du plan qui représente z.



Noter que le point du plan associé au nombre complexe $z = x + iy$ représente aussi le vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$; on peut ainsi identifier $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Trois formules de trigonométrie. Les formules suivantes sont utiles pour traiter cet exercice. Pour tous réels a et b on a :
$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$;
$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a + b)$;
$\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) = \sin(a + b)$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1) Donner une formule explicite pour $f_\alpha(x, y)$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On note $f_\alpha(x,y) = (x',y')$ et on considère un argument θ de $z = x+iy$ ainsi qu'un argument θ' de $z' = x' + iy'$.

a) Montrer que les points représentant $f_\alpha(x,y)$ et (x,y) sont à la même distance de O, autrement dit que $|x' + iy'| = |x+iy|$.

b) On suppose $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que $\cos(\theta') = \cos(\theta+\alpha)$ et que $\sin(\theta') = \sin(\theta+\alpha)$. En déduire θ' en fonction de θ et α.

3) Choisir une valeur de α (différente de 0 modulo 2π, par exemple $\alpha = \pi/4$) et représenter sur un dessin quelques vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ainsi que leurs images par f_α.

4) Interpréter géométriquement l'application f_α.

Exercice 14. 1) Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, donner une formule explicite pour l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Interpréter géométriquement f_α.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\ fois}$.

On suppose qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $f^3(v) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ et $f^4(v) = 0_{\mathbb{R}^4}$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = \big(v, f(v), f^2(v), f^3(v)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2) Calculer $Mat(f,\mathcal{B})$.

Chapitre 2

Calcul sur les déterminants

Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.

2.1 Déterminant d'une matrice carrée

Une notation : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, où n est un entier ≥ 2. Pour tous entiers i et j dans $\{1, \cdots, n\}$ on notera $\widehat{A}_{i,j}$ la matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en enlevant à A sa i^{eme} ligne et sa j^{eme} colonne A. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ alors $\widehat{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.1.1 Cas d'une matrice 1×1

Définition 2.1

*Le **déterminant** $Det(A)$ d'une matrice $A = (a)$ de taille 1×1 est le nombre a.*

Ce cas a peu d'intérêt en pratique.

2.1.2 Cas d'une matrice 2×2

Définition 2.2

*Le **déterminant** $Det(A)$ d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de taille 2×2 est le nombre $ad - cb$.*

2.1.3 Cas d'une matrice 3×3

Le résultat suivant explique que l'on peut obtenir le déterminant d'une matrice de taille 3×3 en fonction des déterminants de sous-matrices de taille 2×2.

Théorème & Définition 2.1

Soit A une matrice carrée de taille 3×3. Les nombres

$$\sum_{j=1}^{3} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\, Det(\widehat{A}_{k,j}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+l}\, a_{i,l}\, Det(\widehat{A}_{i,l})\,,$$

où k et l sont dans $\{1,2,3\}$, sont tous égaux. Cette valeur commune est appelée le ***déterminant*** *de la matrice A et se note $Det(A)$.*

Remarque 2.1 *On utilise parfois la « règle de Sarrus » qui est un procédé permettant de calculer le déterminant d'une matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$. *On recopie d'abord la matrice A en rajoutant sur sa droite ses deux premières colonnes. Dans le tableau ainsi formé, on calcule le produit des coefficients sur chacune des trois diagonales descendantes (de gauche à droite) ainsi que sur chacune des trois diagonales montantes (de gauche à droite), comme indiqué sur le schéma suivant :*

$$\begin{pmatrix} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{pmatrix}$$

Le determinant de A est alors égal à la somme des trois premiers produits (signe $+$) moins les trois derniers (signe $-$). Explicitement :

$$Det(A) = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3} - a_{3,2}\, a_{2,3}\, a_{1,1} - a_{3,3}\, a_{2,1}\, a_{1,2}.$$

2.1.4 Déterminants $(n+1) \times (n+1)$ à partir de déterminants $n \times n$

De façon générale, on peut calculer le déterminant d'une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ à partir des déterminants de sous-matrices de taille $n \times n$.

Théorème & Définition 2.2

Supposons que l'on ait défini le déterminant des matrices de taille $n \times n$. Soit A une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$. Alors les nombres

$$\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\, Det(\widehat{A}_{k,j}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+l}\, a_{i,l}\, Det(\widehat{A}_{i,l}),$$

où k et l appartiennent à $\{1, 2, \cdots, n+1\}$, sont tous égaux. Cette valeur commune est appelée le ***déterminant*** *de la matrice A et se note $Det(A)$.*

Lorsqu'on utilise la première (resp. la deuxième) formule dans les Théorèmes 2.1 et 2.2 précédents, on dit que l'on développe $Det(A)$ suivant la k^{eme} ligne (resp. suivant la l^{eme} colonne). En pratique, on choisit si possible une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour que les sommes correspondantes aient beaucoup de termes nuls. On peut aussi, avant de développer, utiliser la Proposition 2.3 ci-dessous pour faire apparaître des zéros sur une ligne ou une colonne.

Remarque 2.2 *Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de taille $n \times n$, son déterminant se note aussi*

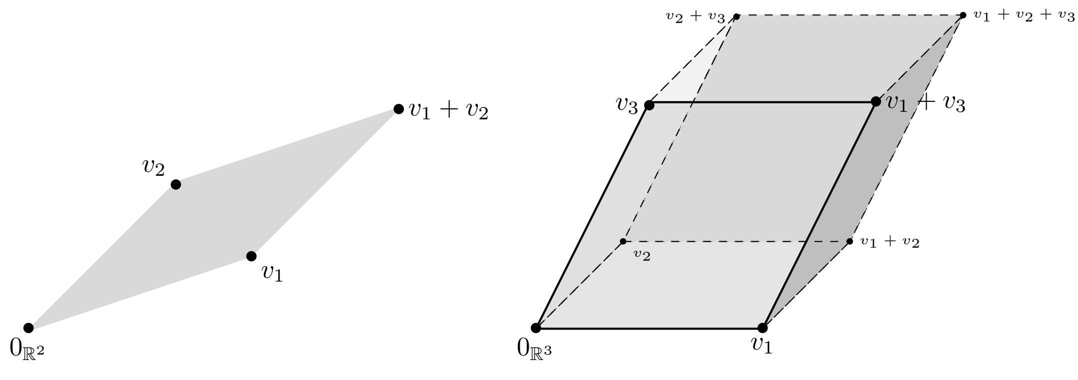
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Lorsque l'on utilise cette notation, il faut veiller à ne pas confondre la matrice A avec son déterminant !

2.2 Interprétation géométrique

Proposition 2.1

- *La valeur absolue du déterminant d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est égale à l'aire du parallélogramme de sommets $v_0 = (0,0)$,$v_1 = (a,c)$, $v_2 = (b,d)$ et $v_3 = v_1 + v_2$.*
- *La valeur absolue du déterminant d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ est égale au volume du parallépipède de sommets $v_0 = (0,0,0)$, $v_1 = (a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1})$, $v_2 = (a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2})$, $v_3 = (a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3})$, $v_4 = v_1 + v_2$, $v_5 = v_1 + v_3$, $v_6 = v_2 + v_3$ et $v_7 = v_1 + v_2 + v_3$.*



Interprétation des déterminants 2×2 et 3×3 comme aire et volume

2.3 Propriétés des déterminants de matrices

2.3.1 Multilinéarité

Théorème 2.1

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times n$ et un numéro de colonne $l \in \{1, \cdots, n\}$.

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

$$Det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & \lambda a_{1,l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,l-1} & \lambda a_{2,l} & a_{2,l+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l-1} & \lambda a_{n,l} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \lambda Det(A).$$

2. *Si $a_{i,l} = a'_{i,l} + a''_{i,l}$ pour tout coefficient $a_{i,l}$ sur la l^{eme} colonne alors*

$$\begin{aligned} Det(A) =& Det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & a'_{1,l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,l-1} & a'_{2,l} & a_{2,l+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l-1} & a'_{n,l} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &+ Det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & a''_{1,l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,l-1} & a''_{2,l} & a_{2,l+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l-1} & a''_{n,l} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. *Si A a deux colonnes identiques, alors $Det(A) = 0$.*

Il est souvent commode de représenter une matrice A en fonction de ses colonnes : on écrit alors $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ où $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est la j^{eme} colonne de A. Les 1) et 2) du Théorème 2.1 s'écrivent alors

$$Det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots C_{l-1} & \lambda C_l & C_{l+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \lambda Det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{l-1} & C_l & C_{l+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} &Det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{l-1} & C'_l + C''_l & C_{l+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &\quad = Det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{l-1} & C'_l & C_{l+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} + Det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{l-1} & C''_l & C_{l+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, en fixant toutes les colonnes de A sauf la l^{eme}, on obtient une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & Det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & x_1 & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,l-1} & x_2 & a_{2,l+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l-1} & x_n & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}.$$

qui est linéaire. Comme ceci est vrai pour n'importe quel numéro de colonne $l \in \{1, \cdots, n\}$ on dit que le déterminant est une forme **multilinéaire**. En raison de la propriété 3 dans le Théorème 2.1, on dit aussi que le déterminant est une forme **alternée**.

2.3.2 Déterminant et transposition

On rappelle que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice $m \times n$, la **matrice transposée** de A est la matrice $n \times m$ dont les coefficients $b_{i,j}$ sont définis par

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \ \forall j \in \{1, \cdots, m\} \qquad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Cette matrice transposée se note ${}^tA$.

Théorème 2.2

Pour toute matrice carrée on a $Det({}^tA) = Det(A)$.

Corollaire 2.1

Pour toute matrice carrée A de taille $n \times n$, les propriétés vues pour les colonnes dans le Théorème 2.1 sont aussi vraies pour les lignes.

2.3.3 Déterminant de quelques matrices particulières

Proposition 2.2

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

1. *Si A a une ligne ou une colonne de zéros alors $Det(A) = 0$,*
2. *Si A a deux lignes ou deux colonnes égales alors $Det(A) = 0$,*
3. *Si A est triangulaire (en particulier si A est diagonale) alors $Det(A) = a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{n,n}$; en particulier $Det(I_n) = 1$.*

2.3.4 Effet des opérations élémentaires sur un déterminant

Proposition 2.3

Soit A une matrice carrée.

1. *Si B est une matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de A par un réel α alors $Det(B) = \alpha Det(A)$;*
2. *Si B est une matrice obtenue en permutant deux lignes ou deux colonnes de A alors $Det(B) = -Det(A)$;*
3. *Si B est une matrice obtenue en remplacant une ligne L_i de A par $L_i + \alpha \cdot L_k$ où $i \neq k$ alors $Det(B) = Det(A)$;*
4. *Si B est une matrice obtenue en remplacant une colonne C_j de A par $C_j + \alpha \cdot C_l$ où $j \neq l$ alors $Det(B) = Det(A)$;*

2.4 Deux théorèmes fondamentaux

Théorème 2.3

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $Det(A) \neq 0$.

Théorème 2.4

Soient A, B deux matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. Alors

$$Det(A \times B) = Det(B \times A) = Det(A)\, Det(B).$$

Corollaire 2.2

Si A est une matrice carrée inversible, alors $Det(A^{-1}) = \dfrac{1}{Det(A)}$.

2.5 Déterminant d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.3

*On appelle **endomorphisme** de $\mathbb{R}^n$ toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.4

*Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Le **déterminant** de f, noté $Det(f)$, est défini par*

$$Det(f) = Det(Mat(f, \mathcal{B})).$$

Cette définition est cohérente car le nombre $Det(Mat(f, \mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Pour s'assurer que $Det(Mat(f, \mathcal{B}))$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$, il faut se souvenir que si $\mathcal{B}'$ est une autre base de $\mathbb{R}^n$ alors $Mat(f, \mathcal{B}') = P^{-1} \times Mat(f, \mathcal{B}) \times P$ avec $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. En utilisant le Théorème 2.4 et le Corollaire 2.2, on obtient bien que

$$\begin{aligned} Det(Mat(f, \mathcal{B}')) &= Det(P^{-1})Det(Mat(f, \mathcal{B}))Det(P) \\ &= \frac{1}{Det(P)}Det(Mat(f, \mathcal{B}))Det(P) \\ &= Det(Mat(f, \mathcal{B})). \end{aligned}$$

Les résultats suivants sont aussi des conséquences des Théorèmes 2.3 et 2.4.

Théorème 2.5

Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Alors f est bijectif si et seulement si $Det(f) \neq 0$. Dans ce cas, on a $Det(f^{-1}) = \dfrac{1}{Det(f)}$.

Théorème 2.6

Soient f, g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$Det(g \circ f) = Det(f \circ g) = Det(g)\, Det(f).$$

2.6 Déterminant d'une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

On considère une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ dans $\mathbb{R}^n$. Les coordonnées de chaque v_j dans la base $\mathcal{B}$ sont notées $a_{1,j}$, $a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}$, autrement dit

$$[v_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Définition 2.5

*Le **déterminant** de la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, noté $Det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$, est défini par*

$$Det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n) = Det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.7

La famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si on a $Det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n) \neq 0$.

2.7 Polynôme caractéristique

Définition 2.6

1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$. La fonction $P_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $P_A(x) = Det(A - x \cdot I_n)$ est un polynôme (à coefficients réels) de degré n, appelé **polynôme caractéristique** de A.*
2. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. La fonction $P_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $P_f(x) = Det(f - x \cdot Id_{\mathbb{R}^n})$ est un polynôme (à coefficients réels) de degré n, appelé **polynôme caractéristique** de f.*

Remarque 2.3 *La notion de polynôme caractéristique sera notamment utile au chapitre suivant, pour le calcul des valeurs propres d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 2.1 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (3x-4y, 2x-3y, z)$. On désigne par $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $Mat(f,\mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient*

$$\begin{aligned}
P_f(x) &= Det(f - x\cdot Id_{\mathbb{R}^3}) = Det\big(Mat(f - x\cdot Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_0)\big) = Det\big(Mat(f,\mathcal{B}_0) - x\cdot I_3\big) \\
&= Det\begin{pmatrix} 3-x & -4 & 0 \\ 2 & -3-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \\
&= (1-x)\times Det\begin{pmatrix} 3-x & -4 \\ 2 & -3-x \end{pmatrix} \\
&= (1-x)(x^2-1) = -(x-1)^2(x+1).
\end{aligned}$$

Noter que l'on aurait pu utiliser la matrice de $f - x\cdot Id_{\mathbb{R}^3}$ dans n'importe quelle autre base de $\mathbb{R}^3$.

2.8 Exercices

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ M_6 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Montrer, en utilisant seulement les propriétés des déterminants, que les matrices suivantes ont un déterminant nul :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soient a, b, c, d quatre nombres réels et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

1) Calculer le produit $M \times {}^tM$.
2) En déduire la valeur de $Det(M)$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,1,x)$, $v_2 = (1,x,x)$, $v_3 = (x,x,x)$, où

x est un paramètre réel. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la famille v_1, v_2, v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Montrer, sans le calculer, que le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & -10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

est un entier multiple de 10 [indication : on pourra d'abord trouver, à l'aide d'opérations sur les colonnes, une matrice M' à coefficients entiers telle que $det(M) = 2 \cdot det(M')$ puis montrer que $det(M')$ est un entier multiple de 5].

Exercice 6. On suppose qu'une matrice carrée M de taille $n \times n$ vérifie $A^2 = A - I_n$. Calculer A^3 puis en déduire $Det(A)$.

Exercice 7. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la matrice

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le déterminant de M_1, M_2 et M_3.
2) Pour $n \geq 3$ trouver une relation simple entre $Det(M_n)$ et $Det(M_{n-2})$. En déduire $Det(M_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8. Soient x et y deux nombres réels. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la matrice M_n de taille $n \times n$ suivante :

$$M_n = \begin{pmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x+y & x \\ 0 & \cdots & 0 & y & x+y \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de M_2 et M_3.
2) Trouver une relation de récurrence entre les déterminants de M_n, M_{n+1} et M_{n+2}.
3) Montrer par récurrence sur n que
- si $x \neq y$ alors $Det(M_n) = \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x}$;
- si $x = y$ alors $Det(M_n) = (1+n)x^n$.

Exercice 9. (Déterminants de Vandermonde)
Étant donnés un entier $n \geq 2$ et n nombres réels $x_1, \cdots, x_n$ on considère la matrice carrée de

taille $n \times n$ définie par

$$M_n(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et on note $D_n(x_1, \cdots, x_n)$ son déterminant.
1) Calculer $D_2(x_1, x_2)$ et $D_3(x_1, x_2, x_3)$.
2) Montrer à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes que pour $n \geq 3$ on a

$$D_n(x_1, \cdots, x_n) = (x_n - x_1) \times (x_{n-1} - x_1) \times \cdots \times (x_2 - x_1) \times D_{n-1}(x_2, \cdots, x_n).$$

3) Calculer $D_n(x_1, \cdots, x_n)$ en utilisant 2).

Exercice 10. Soient $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_n$ des nombres réels (où n entier ≥ 2) et la matrice $M = \big(m_{i,j}\big)$ de taille $n \times n$ dont les coefficient $m_{i,j}$ sont définis par $m_{i,j} = x_i + y_j$.
1) Calculer M dans le cas $n = 2$.
2) Montrer à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes que $Det(M) = 0$ pour tout $n \geq 3$.

Exercice 11. (Orientation de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$)
On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ est inversible et donc que $Det\big(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}\big) \neq 0$; on dira que $\mathcal{B}$ est **directe** (resp. **indirecte**) lorsque $Det\big(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}\big) > 0$ (resp. lorsque $Det\big(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}\big) < 0$).
1) Soit $\mathcal{B}_1 = (b_1, \cdots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On considère la famille $\mathcal{B}_2 = (b'_1, \cdots, b'_n)$ définie par

$$b'_1 = -b_1, \text{ et } b'_j = b_j \text{ si } 2 \leq j \leq n.$$

a) Justifier que $\mathcal{B}_2$ est aussi une base de $\mathbb{R}^n$.
b) Former la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.
c) Montrer à l'aide du b) que l'une des deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ est directe et l'autre indirecte.
d) Dans les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, donner des exemples de bases directes et de bases indirectes.

2) On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ qui est bijectif (on parle alors d'isomorphisme de $\mathbb{R}^n$).
a) Justifier que si $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ alors il en est de même pour la famille $\mathcal{B}' = \big(f(b_1), \ldots, f(b_n)\big)$. Cette base $\mathcal{B}'$ est notée par la suite $f(\mathcal{B})$.
b) Justifier que $P_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})} = Mat(f, \mathcal{B})$ puis en déduire que $Det\big(P_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})}\big)$ dépend seulement de f et non de la base $\mathcal{B}$ considérée.
c) Déduire du b) qu'il n'y a que les deux situations suivantes possibles :
— Pour toute base $\mathcal{B}$ directe (resp. indirecte), $f(\mathcal{B})$ est aussi une base directe (resp. indirecte) ;
— Pour toute base $\mathcal{B}$ directe (resp. indirecte), $f(\mathcal{B})$ est une base indirecte (resp. directe).

On dit que f **préserve l'orientation** dans le premier cas et que f **renverse l'orientation** dans le second cas.
d) Dans les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, donner des exemples d'isomorphismes préservant et renversant l'orientation. On étudiera en particulier les projections, symétries, homothéties et rotations.

Chapitre 3

Valeurs propres et vecteurs propres

Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.

3.1 Valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.1

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un nombre réel λ est une **valeur propre** *de f s'il existe un vecteur v non nul dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f(v) = \lambda \cdot v$. De plus, on dit qu'un tel vecteur v est un* **vecteur propre** *de f associé à la valeur propre λ.*

3.2 Valeurs propres d'une matrice carrée

Définition 3.2

Soit M une matrice carrée $n \times n$. On dit qu'un nombre réel λ est une **valeur propre** *de M s'il existe un vecteur $v = (x_1, \cdots, x_n)$ non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que la relation matricielle*

$$M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

soit satisfaite. De plus, on dit qu'un tel vecteur v est un **vecteur propre** *associé à la valeur propre λ.*

Remarque 3.1 *On peut aussi définir les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée M de taille $n \times n$ comme étant celles et ceux de l'endomorphisme f_M canoniquement associé à M. Ceci est équivalent à la Définition 3.2 précédente. En effet, en désignant par $\mathcal{B}_0$ la* *base canonique de* $\mathbb{R}^n$*, pour tout vecteur* $v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *on a* $[v]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *donc*

$$f_M(v) = \lambda \cdot v \iff [f_M(v)]_{\mathcal{B}_0} = [\lambda \cdot v]_{\mathcal{B}_0} \iff \underbrace{Mat(f_M, \mathcal{B}_0)}_{=M} \times [v]_{\mathcal{B}_0} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}_0}$$
$$\iff M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

3.3 Valeurs propres et polynôme caractéristique

Théorème 3.1

Les valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$*, ou d'une matrice carrée, sont exactement les racines réelles de son polynôme caractéristique.*

Exemple 3.1 *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par* $f(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 3y, z)$*. On a calculé au chapitre précédent son polynôme caractéristique* $P_f(x) = -(x-1)^2(x+1)$*. Le Théorème 3.1 dit que les valeurs propres de* f *sont les racines réelles de* P_f*, c'est à dire* 1 *et* -1*.*

3.4 Multiplicité d'une valeur propre

Définition 3.3

La ***multiplicité*** *d'une valeur propre* λ *d'un endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^n$*, ou d'une matrice carrée* M*, est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique* P_f *ou* P_M *; autrement dit c'est l'unique entier* $k \geq 1$ *tel que l'on ait*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_f(x) = (x - \lambda)^k Q(x) \quad \text{ou} \quad P_M(x) = (x - \lambda)^k Q(x),$$

où Q *est un polynôme vérifiant* $Q(\lambda) \neq 0$*.*

Exemple 3.2 *En reprenant l'endomorphisme* f *de l'Exemple 3.1, la valeur propre* 1 *a pour multiplicité 2 et la valeur propre*-1 *a pour multiplité 1.*

3.5 Sous-espaces propres

Définition 3.4

— *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et λ l'une de ses valeurs propres. On appelle* **sous-espace propre** *de f associé à λ, et on note E_λ, l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $f(v) = \lambda \cdot v$. Dit autrement,*

$$E_\lambda = \big\{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \text{ est vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda\big\} \cup \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

— *Soient M une matrice carrée de taille $n \times n$ et λ l'une de ses valeurs propres. On appelle* **sous-espace propre** *de M associé à λ, et on note E_λ, l'ensemble des vecteurs $v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dit autrement,

$$E_\lambda = \big\{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à } \lambda\big\} \cup \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

De façon équivalente, les sous-espaces propres de M sont ceux de l'endomorphisme f_M canoniquement associé à M.

Remarque 3.2 *Si 0 est valeur propre d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ alors $E_0 = Ker(f)$.*

3.5.1 Premières propriétés

1. Un sous-espace propre E_λ d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, ou d'une matrice carrée de taille $n \times n$, est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ non réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. De plus, sa dimension $Dim(E_\lambda)$ est inférieur ou égale à la multiplicité de la valeur propre λ.
2. Si E_λ est un sous-espace propre d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, alors on a $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. On dit que E_λ est **stable par f**.

3.5.2 Indépendance des sous-espaces propres

Théorème 3.2

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ou d'une matrice carrée de taille $n \times n$ et, pour chaque $i \in \{1, \cdots, k\}$, un vecteur propre v_i associé à λ_i. Alors $(v_1, \cdots, v_k)$ est une famille libre.

Corollaire 3.1

Un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, ou une matrice carrée de taille $n \times n$, admet au plus n valeurs propres distinctes.

3.6 Exercices

Exercice 1. 1) Pour chacun des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ci-dessous,

a) déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres ;

b) pour chaque valeur propre, donner sa multiplicité ainsi qu'une base et la dimension du sous-espace propre associé ;

c) calculer son déterminant et en déduire si cet endomorphisme est bijectif ou non.

$$f(x,y) = (x+6y, 5x+2y), \quad g(x,y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y) \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R},$$

$$h(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z).$$

d) Interpréter géométriquement l'endomorphisme g.

2) Mêmes questions a)b)c) pour les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ étudiés dans les chapitres précédents.

Exercice 2. Trouver toutes les matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ telles que $(1,0)$ soit un vecteur propre associé à la valeur propre 5.

Exercice 3. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant aucune valeur propre. Cela est-il aussi possible pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 5. 1) Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ puis celles et ceux de sa transposée.

2) Montrer que toute matrice carrée M a les mêmes valeurs propres que sa transposée. En est-il de même pour les vecteurs propres ?

Exercice 6. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes. On précisera de plus la multiplicité de chaque valeur propre et on donnera une base du sous-espace propre associé.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & -9/2 \\ -3/2 & -2 & 3/2 \\ 3/2 & 0 & -7/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit A une matrice carrée vérifiant $A^2 = A$. Quelles sont ses seules valeurs propres possibles ?

Exercice 8. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que f est bijectif.
Justifier que 0 n'est pas valeur propre de f puis montrer que si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f alors les valeurs propres de f^{-1} sont $\dfrac{1}{\lambda_1}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_p}$.

Exercice 9. Soient A, P deux matrices carrées de même taille $n \times n$. On suppose de plus que P est inversible. Montrer que les matrices A et $P^{-1}AP$ ont les mêmes valeurs propres. Ont-elles en général les mêmes vecteurs propres ?

Chapitre 4

Diagonalisation

Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.

4.1 Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Définition 4.1

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est ***diagonalisable*** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $Mat(f, \mathcal{B})$ soit diagonale, c'est à dire de la forme*

$$Mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On dit alors que $\mathcal{B}$ est une ***base diagonalisante*** *de f.*

Remarque 4.1

1. *f diagonalisable revient à dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ ne contenant que des vecteurs propres de f.*

2. *Dans les notations ci-dessus, les λ_i sont des valeurs propres de f et toute valeur propre de f apparaît forcément dans la liste $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Cependant, une valeur propre peut apparaître plusieurs fois dans cette liste, autrement dit les $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ne sont pas nécessairement tous différents. Noter aussi que certains λ_i peuvent être nuls.*

3. *Diagonaliser un endomorphisme f, c'est trouver une base diagonalisante de f et donner la matrice de f dans cette base.*

Théorème 4.1 (*C.N.S. pour être diagonalisable*)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ ses différentes valeurs propres (où $k \leq n$ nécessairement). Alors f est diagonalisable si et seulement si on a

$$n = Dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + Dim(E_{\lambda_k}).$$

Dans ce cas, une base diagonalisante $\mathcal{B}$ de f s'obtient en choisissant une base $\mathcal{B}_i$ de chaque sous-espace propre E_{λ_i} $(i \in \{1, \cdots, k\})$ puis en considérant la concaténation de ces k bases :

$$\underbrace{\overbrace{v_{1,1}, \cdots, v_{1,n_1}}^{\text{base } \mathcal{B}_1 \text{ de } E_{\lambda_1}}, \overbrace{v_{2,1}, \cdots, v_{2,n_2}}^{\text{base } \mathcal{B}_2 \text{ de } E_{\lambda_2}}, \cdots\cdots \overbrace{v_{k,1}, \cdots, v_{k,n_k}}^{\text{base } \mathcal{B}_k \text{ de } E_{\lambda_k}}}_{\text{base diagonalisante } \mathcal{B}}.$$

Théorème 4.2 (*C.S. pour être diagonalisable*)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour que f soit diagonalisable, il suffit qu'il admette n valeurs propres distinctes. Dans ce cas, une base diagonalisante $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ s'obtient en choisissant un vecteur propre v_i associé à la i^{eme} valeur propre, ceci pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 4.2 *Dans la situation du Théorème 4.2, tous les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.*

4.2 Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 4.2

On dit qu'une matrice carrée M est **diagonalisable** *s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1} \times M \times P$ soit une matrice diagonale.*

Remarque 4.3

- *De façon équivalente, on peut aussi dire que M est diagonalisable si l'endomorphisme f_M canoniquement associé à M est lui-même diagonalisable. En effet, si f_M possède une base diagonalisante $\mathcal{B}$ alors on prend P égale à la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et la matrice $P^{-1} \times M \times P$ est diagonale ; réciproquement, s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} \times M \times P$ est diagonale alors on obtient une base diagonalisante de f_M en considérant les vecteurs inscrits dans les colonnes de P. Les Théorèmes 4.1 et 4.2 peuvent donc aussi s'utiliser pour la diagonalisation des matrices carrées.*
- *Diagonaliser M, c'est trouver une matrice P telle que $P^{-1} \times M \times P$ soit diagonale. Les coefficients diagonaux de $P^{-1} \times M \times P$ sont les valeurs propres de M (certaines pouvant se répéter).*

Proposition 4.1

Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable si et seulement si sa matrice $Mat(f, \mathcal{B})$ dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.

4.3 Exercices

Exercice 1. 1) Diagonaliser, si c'est possible, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 3y, z)$.
2) Diagonaliser, si c'est possible, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour quelles valeurs des nombres réels a et b la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Donner, sans faire aucun calcul, le s.e.v. $Im(f)$ ainsi que sa dimension.
1) Calculer $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire que 4 est une valeur propre de f et que $E_4 = Im(f)$.
3) Montrer à l'aide de 1) et 2) et du théorème du rang (et sans calculer le polynôme caractéristique) que f est diagonalisable.

Exercice 4. On considère trois suites de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les relations suivantes :

$$a_{n+1} = 3a_n - c_n \,; \qquad b_{n+1} = 2a_n + 4b_n + 2c_n \,; \qquad c_{n+1} = -a_n + 3c_n.$$

1) a) Donner une matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

b) Exprimer $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ en fonction de M et de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
2) Diagonaliser M.
3) En déduire M^n puis une formule donnant a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0.

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}$.
1) Trouver une matrice B telle que $A = 15 \cdot I_3 + B$.
2) Justifier que B est diagonalisable puis en déduire la diagonalisation de A.

Exercice 6. Dans un milieu naturel, on étudie l'évolution des populations de deux espèces animales, l'une étant prédatrice de l'autre. On note respectivement a_0, b_0 le nombre de prédateurs et de proies initialement présents dans ce milieu ($a_0 > 0$ et $b_0 > 0$). Pour $n \geq 1$, a_n et b_n désignent le nombre de prédateurs et de proies comptés lors de la n^{eme} année d'observation. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$, on a les relations suivantes :

$$a_{n+1} = 0.86a_n + 0.08b_n \quad et \quad b_{n+1} = -0.12a_n + 1.14b_n.$$

1) Donner une matrice A telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. En déduire $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de A et de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

2) Vérifier que A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$ et déterminer les sous-espaces propres associés.

3) a) Diagonaliser A. On appellera P une matrice telle que $P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

b) Justifier que $P^{-1} \times A^n \times P = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 0$.

c) En utilisant b), calculer A^n puis donner explicitement a_n, b_n en fonction de a_0 et b_0.

d) Discuter, en fonction de a_0 et b_0, l'évolution sur le long terme de ces deux populations animales.