**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

# Développements limités

## 1 Développements limités

### 1.1 Points adhérents à un ensemble

**Définition 1.1** *On dit qu'un nombre réel $x_0$ est adhérent à un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ si $x_0$ se trouve dans $D$ ou bien s'il en est "infiniment proche". Précisément, $x_0$ est adhérent à $D$ si on a $[x_0 - r, x_0 + r] \cap D \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. On note $\overline{D}$ l'ensemble des points adhérents à $D$.*

**Exemple 1.2** *On a $D \subset \overline{D}$ pour tout $D \subset \mathbb{R}$. Cette inclusion peut être stricte ou non. Si $D = ]0, +\infty[$ alors $\overline{D} = [0, +\infty[$ ; si $D = [\frac{3}{2}, 5]$ alors $\overline{D} = D$.*

### 1.2 Notion de développement limité

**Définition 1.3** *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0$ un point adhérent à $D$. On dit que $f$ admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $x_0$ (en abrégé : un $DL_n(x_0)$) s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$\forall x \in D \quad f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n}_{P(x-x_0)} + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$$

*où $\epsilon$ est une fonction vérifiant $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ ; autrement dit, si l'on a*

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$$

*où $P$ est un polynôme de degré $\leq n$ et $\epsilon$ une fonction telle que $\lim_0 \epsilon = 0$.*

*On dit que $P(x - x_0)$ est la partie polynomiale (ou régulière) du développement limité et que $(x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$ est le reste.*

**Remarque 1.4** *En pratique, le point $x_0$ appartient souvent à l'ensemble de définition $D$ de $f$. Cependant la notion de développement limité a un intérêt dans la situation plus générale $x_0 \in \overline{D}$ ; par exemple pour étudier le comportement à l'infini d'une fonction $f(x)$, on pourra faire le changement de variable $y = 1/x$ et utiliser un développement limité en $0$ de la fonction $g(y) = f(\frac{1}{y})$ bien que $0 \notin D_g$.*

**Propriété 1.5**
1. *Si $f$ admet un $DL_n(x_0)$ alors celui-ci est unique.*
2. *Si $f$ admet un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq 1$ alors $f$ admet aussi un $DL_{n-1}(x_0)$ ; de plus, la partie polynomiale du $DL_{n-1}(x_0)$ s'obtient en ne conservant que les termes de degré $\leq n - 1$ dans la partie polynomiale du $DL_n(x_0)$.*

## 2 Formule de Taylor-Young

**Théorème 2.1** *Si une fonction $f$ est définie sur un intervalle $I$ contenant $x_0$ et admet une dérivée $n^{ieme}$ en $x_0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) alors elle possède un $DL_n(x_0)$, dont la partie polynomiale est*

$$P(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

**Remarque 2.2** *Ce théorème assure que les fonctions définies à partir des fonctions usuelles admettent des développements limités à tous les ordres en la plupart des points de leurs ensembles de définition. Cependant il est peu utilisé en pratique pour calculer des développements limités en des points $x_0 \neq 0$ ; pour cela on effectue plutôt des changements de variables (par exemple $y = x - x_0$) qui permettent de se ramener à l'un des développements limités "usuels" en $0$ (voir paragraphe 4).*

## 3 Opérations sur les développements limités

**NB :** Dans tout ce paragraphe, $n$ est un entier $\geq 0$ et les lettres $P_1, P_2, Q$ désignent des fonctions polynômes de degré $\leq n$. La lettre $\epsilon$ désigne une fonction vérifiant $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ et de même pour $\epsilon_1$, $\epsilon_2$.

D'autre part, on pourra se contenter de retenir les théorèmes qui suivent dans le cas $x_0 = 0$.

### 3.1 Développement limité d'une somme et d'un produit

**Théorème 3.1 (DL d'une somme)** *Si deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$ admettent des $DL_n(x_0)$ alors la fonction $f+g$ admet un $DL_n(x_0)$, dont la partie polynomiale s'obtient en additionnant les parties polynomiales des $DL_n(x_0)$ de $f$ et de $g$.*

**Théorème 3.2 (DL d'un produit)** *Si deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$ admettent un $DL_n(x_0)$ alors la fonction $f \times g$ admet un $DL_n(x_0)$. Précisément, si*

$$f(x) = P_1(x-x_0) + (x-x_0)^n \epsilon_1(x-x_0) \quad et \quad g(x) = P_2(x-x_0) + (x-x_0)^n \epsilon_2(x-x_0)$$

*alors on a*

$$f(x) \times g(x) = Q(x-x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x-x_0)$$

*où $Q$ est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré $\leq n$ dans le produit $P_1 \times P_2$.*

### 3.2 Développement limité d'un quotient

#### 3.2.1 Division des polynômes suivant les puissances croissantes

**Théorème 3.3** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B$ deux polynômes, avec $B(0) \neq 0$. Il existe alors deux polynômes $Q, R$ (déterminés de façon unique) vérifiant*

$$\deg(Q) \leq n, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x).$$

*On dit que $Q$ est le quotient de la division de $A$ par $B$ suivant les puissances croissantes et à l'ordre $n$. $R$ est le reste de cette division.*

**Exemple 3.4** *Faire la division suivant les puissances croissantes et à l'ordre 3 de* $A(x) = 2 + x + x^3$ *par* $B(x) = 1 + x + 2x^2$.

### 3.2.2 DL d'un quotient

**Théorème 3.5** *Si deux fonctions* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *admettent un* $DL_n(x_0)$ *et si* $\lim_{x_0} g \neq 0$, *alors la fonction* $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ *(qui est bien définie pour* $x \in D$ *assez proche de* $x_0$*) admet un* $DL_n(x_0)$. *Précisément, si*

$$f(x) = P_1(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon_1(x - x_0) \quad et \quad g(x) = P_2(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon_2(x - x_0)$$

*alors on a*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$$

*où* $Q$ *est le quotient dans la division de* $P_1$ *par* $P_2$ *suivant les puissances croissantes et à l'ordre* $n$.

**Remarque 3.6** *Si* $x_0$ *est dans l'ensemble de définition* $D$, *la condition* $\lim_{x_0} g \neq 0$ *équivaut simplement à* $g(x_0) \neq 0$ *puisque* $g$ *est continue en* $x_0$.

## 3.3 Développement limité d'une fonction composée

**Théorème 3.7** *On considère deux fonctions* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *et* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(D_f) \subset D_g$ *et un réel* $x_0 \in D_f$. *Si* $f$ *admet un* $DL_n(x_0)$ *et si* $g$ *admet un* $DL_n(f(x_0))$ *alors* $g \circ f$ *admet un* $DL_n(x_0)$. *Précisément, si*

$$f(x) = P_1(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon_1(x - x_0) \quad et \quad g(x) = P_2(x - f(x_0)) + (x - f(x_0))^n \epsilon_2(x - f(x_0))$$

*alors on a*

$$g \circ f(x) = Q(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$$

*où* $Q$ *est est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré* $\leq n$ *dans la composition* $P_2 \circ P_1$.

## 3.4 Développement limité d'une primitive

**Théorème 3.8** *Soient* $I$ *un intervalle,* $x_0$ *un point de* $I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant un* $DL_n(x_0)$. *Alors toute primitive* $F$ *de* $f$ *sur* $I$ *admet un* $DL_{n+1}(x_0)$. *Précisément, si*

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n}_{P(x-x_0)} + (x - x_0)^n \epsilon_1(x - x_0)$$

*alors on a*

$$\forall x \in I \quad F(x) = F(x_0) + \underbrace{a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}}_{=\int_0^{x-x_0} P(t)dt} + (x - x_0)^{n+1} \epsilon_2(x - x_0).$$

### 3.5 Développement limité d'une dérivée

**Théorème 3.9** *Soient $I$ un intervalle, $x_0$ un point de $I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si $f$ admet un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq 1$ et si $f'$ admet un $DL_{n-1}(x_0)$ alors la partie polynomiale de ce dernier s'obtient en dérivant celle du $DL_n(x_0)$ de $f$.*

**Remarque 3.10** *Ce théorème <u>ne dit pas</u> que si $f$ admet un $DL_n(x_0)$ alors $f'$ admet un $DL_{n-1}(x_0)$. Ceci est d'ailleurs faux en général.*

## 4 Quelques développements limités usuels en $0$

Les développements limités qui suivent sont au point 0 et $\epsilon$ désigne une fonction vérifiant $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

Analyse - TD N$^o$ 1
Développements limités.

**Exercice 1.**
1) On considère deux fonctions $f$ et $g$ s'écrivant sous la forme

$$(i)\ f(x) = 2 + \frac{1}{3}x + 4x^3 + x^2\epsilon(x)\,, \qquad (ii)\ g(x) = 1 + 2x + 2x^{3/2} + \frac{1}{4}x^2 + 4x^3 + x^3\epsilon(x)$$

où $\epsilon$ est une fonction telle que $lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.
a) La formule $(i)$ donne-t-elle un $DL_3(0)$ de $f$ ? un $DL_2(0)$ ? Montrer que $f$ admet un $DL_2(0)$.
b) La formule $(ii)$ donne-t-elle un $DL_3(0)$ de $g$ ? Montrer que $g$ admet un $DL_1(0)$.
2) Montrer, en définissant explicitement le reste, que la fonction $h(x) = x + 5x^2 + x^3\ln(x) + e^x x^{5/2}$ admet un $DL_2(0)$. On rappelle que $lim_{x\to 0}x\ln(x) = 0$.

**Exercice 2.**
1) On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0$ un point de son ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}$. Vérifier que
a) $f$ admet un $DL_0(x_0) \iff f$ est continue en $x_0$.
b) $f$ admet un $DL_1(x_0) \iff f$ est dérivable en $x_0$.
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 + x^3\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Vérifier que $f$ admet un $DL_2(0)$ mais n'a pas de dérivée seconde en 0.

**Exercice 3.**
1) Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ puis en déduire $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$. Etait-il possible de déterminer cette limite à l'aide du $DL_2(0)$ de $f$ ?
2) Déterminer le $DL_4(0)$ de la fonction $g(x) = e^{\sin(x)}$ puis en déduire $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{sin(x)} - 1 - x}{x^2}$. Etait-il possible de déterminer cette limite à l'aide du $DL_3(0)$ de $g$ ?

**Exercice 4.**
1) a) Effectuer la division suivant les puissances croissantes et à l'ordre 3 du polynôme $P_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ par le polynôme $P_2(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6}$.
b) En déduire le $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{1+sin(x)}$.
2) Retrouver le $DL_3(0)$ obtenu au 1) en regardant $f(x)$ comme produit $e^x \times \frac{1}{1+sin(x)}$.

**Exercice 5.** On suppose que $f$ est une fonction admettant un développement limité d'ordre $n$ en 0 :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0\,.$$

1) Montrer que si $f$ est paire alors les réels $a_1, a_3, \cdots$ sont nuls.
2) Montrer que si $f$ est impaire alors les réels $a_0, a_2, \cdots$ sont nuls.

**Exercice 6.**
Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction tangente de deux façons différentes :

a) En regardant $\tan(x)$ comme quotient de $\sin(x)$ par $\cos(x)$ ;

b) En regardant $\tan(x)$ comme produit $\sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}$.

**Exercice 7.**
1) Déterminer le $DL_3(1)$ de la fonction ln. On posera $y = x - 1$ pour se ramener à un développement limité usuel en 0.

2) Déterminer le $DL_3(2)$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ à l'aide d'un changement de variable convenable.

3) Retrouver les résultats précédents en utilisant la formule de Taylor-Young.

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

# Révisions et compléments sur les suites numériques

## 1 Généralités

**Définition 1.1** *Une suite (numérique) est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *On écrit le plus souvent* $u_n$ *à la place de* $u(n)$ *pour désigner l'image d'un entier* $n$ *; on dit alors que* $u_n$ *est le terme général de la suite et celle-ci sera notée* $(u_n)_{n\geq 0}$ *ou simplement* $(u_n)_n$.

**Exemple 1.2** *Suites géométriques ; suites arithmétiques ; suites définies par une relation de récurrence.*

## 2 Limite d'une suite

### 2.1 Limite finie

**Définition 2.1** *On dit qu'une suite* $(u_n)_n$ *tend vers une limite* $l \in \mathbb{R}$ *si* $u_n$ *est aussi proche que l'on veut de* $l$ *dès que* $n$ *est suffisamment grand ; autrement dit si pour tout nombre* $r > 0$ *(aussi petit que l'on veut) il existe un entier* $N$ *tel que :*

$$\forall n \qquad n \geq N \Longrightarrow |l - u_n| \leq r.$$

*On écrit alors :* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

### 2.2 Limite infinie

**Définition 2.2** *On dit qu'une suite* $(u_n)_n$ *tend vers* $+\infty$ *si* $u_n$ *est aussi grand que l'on veut dès que* $n$ *est suffisamment grand ; autrement dit si pour tout réel* $A \geq 0$ *il existe un entier* $N$ *tel que :*

$$\forall n \qquad n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A.$$

*On écrit alors :* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On a une définition similaire pour "$(u_n)_n$ tend vers $-\infty$".

**Remarque 2.3** *Au lieu de dire qu'une suite* $(u_n)_n$ *tend vers une limite* $l$ *(finie ou infinie), on dit parfois qu'elle* converge *vers* $l$.
★ *On fera attention à ne pas confondre les notions de convergence d'un suite avec celle de convergence d'une série, que l'on étudiera au chapitre suivant.*

## 2.3 Opérations sur les limites

### 2.3.1 Limite d'une somme

| hypothèse sur $(u_n)_n$ | hypothèse sur $(v_n)_n$ | conclusion sur $(u_n + v_n)_n$ |
|---|---|---|
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ | $\lim_{+\infty} v_n = l_2 \in \mathbb{R}$ | $\lim_{+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ | $\lim_{+\infty} v_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n + v_n = +\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ | $\lim_{+\infty} v_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n + v_n = -\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} v_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n + v_n = +\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} v_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n + v_n = -\infty$ |

### 2.3.2 Limite d'un produit

| hypothèse sur $(u_n)_n$ | hypothèse sur $(v_n)_n$ | conclusion sur $(u_n + v_n)_n$ |
|---|---|---|
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ | $\lim_{+\infty} v_n = l_2 \in \mathbb{R}$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = l_1 \times l_2$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ | $\lim_{+\infty} v_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = +\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}^{-*}$ | $\lim_{+\infty} v_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = -\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ | $\lim_{+\infty} v_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = -\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}^{-*}$ | $\lim_{+\infty} v_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = +\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} v_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = +\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} v_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = +\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$ | $\lim_{+\infty} v_n = -\infty$ | $\lim_{+\infty} u_n \times v_n = -\infty$ |

### 2.3.3 Limite de l'inverse d'une suite

| hypothèse sur $(u_n)_n$ | conclusion sur $(1/u_n)_n$ |
|---|---|
| $\lim_{+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}^*$ | $\lim_{+\infty} 1/u_n = 1/l$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = \pm\infty$ | $\lim_{+\infty} 1/u_n = 0$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour tout $n$ assez grand | $\lim_{+\infty} 1/u_n = +\infty$ |
| $\lim_{+\infty} u_n = 0$ et $u_n < 0$ pour tout $n$ assez grand | $\lim_{+\infty} 1/u_n = -\infty$ |

## 2.4 Le "théorème des gendarmes"

**Théorème 2.4** *Si $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont deux suites qui tendent vers la même limite $l$ et si*

$$\forall n \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

*alors la suite $(v_n)_n$ tend aussi vers $l$.*

## 2.5 Limites des suites monotones

**Théorème 2.5**
*1) Soit $(u_n)_n$ une suite croissante. Si elle est majorée par un réel $M$, alors elle tend vers une limite $l \leq M$. Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.*
*2) Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante. Si elle est minorée par un réel $m$, alors elle tend vers une limite $l \geq m$. Si elle n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$.*

## 3 Suites équivalentes

**Définition 3.1** . *On dit qu'une suite* $(u_n)_n$ *est équivalente (en* $+\infty$*) à une suite* $(v_n)_n$ *si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$*. On écrit alors* $u_n \sim_{+\infty} v_n$*.*

**Propriété 3.2** *Soient* $(u_n)_n$*,* $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites.*

1. *Si* $u_n \sim_{+\infty} v_n$ *alors* $v_n \sim_{+\infty} u_n$*.*
2. *Si* $u_n \sim_{+\infty} v_n$ *et si* $v_n \sim_{+\infty} w_n$ *alors* $u_n \sim_{+\infty} w_n$*.*

**Propriété 3.3 (Opérations sur les équivalents)** *Soient* $(u_n)_n$*,* $(u'_n)_n$ $(v_n)_n$*,* $(v'_n)_n$ *quatre suites et* $k \in \mathbb{Z}$*. Si* $u_n \sim_{+\infty} v_n$ *et si* $u'_n \sim_{+\infty} v'_n$ *alors on a aussi*

1. ${u_n}^k \sim_{+\infty} {v_n}^k$,
2. $u_n \times u'_n \sim_{+\infty} v_n \times v'_n$,
3. $\frac{u_n}{u'_n} \sim_{+\infty} \frac{v_n}{v'_n}$.

**Proposition 3.4** *Si une suite* $(u_n)_n$ *est équivalente à une suite* $(v_n)_n$ *et si* $(v_n)_n$ *tend vers une limite* $l$ *(finie ou infinie) alors* $(u_n)_n$ *tend aussi vers* $l$*.*

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

Analyse - TD N$^o$ 2
Suites numériques.

**Exercice 1.** Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_n$ dans les cas suivants :
a) $u_n = \frac{5n^3+2n^2+3}{7n^3-4n+8}$ b) $u_n = \frac{n+\cos(n)}{2n+\sin(n)}$ c) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

**Exercice 2.** 1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géometrique de raison $a \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n$ la somme des $n$ premiers termes de cette suite, c'est à dire

$$S_n = u_0 + \cdots + u_{n-1}.$$

Exprimer $S_n$ et $aS_n$ en fonction des puissances de $a$ puis en déduire que $S_n = u_0 \dfrac{1-a^n}{1-a}$.
2) Calculer la somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique. En déduire une expression de la somme des $n$ premiers entiers naturels.

**Exercice 3.** 1) Montrer que si suite $(u_n)_n$ admet une limite finie $l$, alors elle est bornée. La réciproque est-elle vraie ?
2) a) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n$. Montrer que si $(u_n)_n$ tend vers une limite finie $l_1$ et si $(v_n)_n$ tend vers une limite finie $l_2$, alors $l_1 \leq l_2$. Si l'on avait supposé $u_n < v_n$, pourrait-on en conclure que $l_1 < l_2$ ?

**Exercice 4.** On considère deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = \big(1 + \frac{a}{n}\big)^n \quad \text{et} \quad v_n = n^2 \ln(\frac{n^2+1}{n^2-1}).$$

a) Montrer à l'aide du $DL_1(0)$ de $\ln(1+x)$ que

$$\ln(u_n) \sim_{+\infty} a \quad \text{et} \quad \ln\big(1+\frac{1}{n^2}\big) - \ln\big(1-\frac{1}{n^2}\big) \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}.$$

b) En déduire les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

**Exercice 5.** On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$

1) Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

puis en déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

# Les séries numériques

## 1 Premières notions sur les séries

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels (ou éventuellement de nombres complexes).

**Définition 1.1**

1. *La* ***suite des sommes partielles*** *des $u_n$ est la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$.*
2. *On dit que* ***la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge*** *si la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie $l$ ; le réel $l$ est alors appelé* ***la somme*** *de la série et on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l$. Sinon, on dit que* ***la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge****.*
3. *On dit aussi que $u_n$ est le* ***terme général*** *de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

**Remarque 1.2** *On ne change pas la nature d'une série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ en modifiant un nombre fini des $u_n$.*

**Proposition 1.3** *Si une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, alors on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

**Remarque 1.4**
★ *On fera attention à ne pas confondre la notion de convergence pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avec celle de convergence pour la suite $(u_n)_n$.*

**Exemple 1.5 (séries géométriques)** *La série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$*

## 2 Séries à termes positifs

### 2.1 Comparaison de séries à termes positifs

**Théorème 2.1**
*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{R}^+$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.*

1. *Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.*
2. *Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge.*

### 2.2 Équivalence des termes généraux et nature des séries

**Théorème 2.2**
*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{R}^+$ telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Alors les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de même nature.*

### 2.3 Les séries de Riemann

**Définition 2.3** *Une **série de Riemann** est une série dont le terme général est de la forme* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$*, où* $\alpha$ *est un nombre réel.*

**Théorème 2.4** *La série de Riemann* $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

### 2.4 Deux critères classiques de convergence/divergence.

**Théorème 2.5 (Règle de Cauchy)**
*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = l$*,* $l$ *pouvant être un réel ou* $+\infty$.

1. *Si* $l < 1$ *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$ *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *diverge.*

**Théorème 2.6 (Règle de D'Alembert)**
*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$*,* $l$ *pouvant être un réel ou* $+\infty$.

1. *Si* $l < 1$ *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$ *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *diverge.*

## 3 Séries absolument convergentes

**Définition 3.1** *On dit que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est **absolument convergente** si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ *est convergente.*

**Remarque 3.2** *Cette définition s'utilise aussi bien quand les* $u_n$ *sont des nombres réels (*$|\cdot|$ *est alors la valeur absolue) que lorsque les* $u_n$ *sont des nombres complexes (*$|\cdot|$ *est alors le module)*

**Théorème 3.3** *Si une série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est absolument convergente alors elle est convergente. Autrement dit, si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ *est convergente alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente.*

## 4 Séries alternées

**Définition 4.1** *Une série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est dite **alternée** si l'on a* $u_n \geq 0$ *lorsque* $n$ *est pair et* $u_n \leq 0$ *lorsque* $n$ *est impair, ou inversement. Autrement dit, c'est une série dont le terme général s'écrit* $u_n = (-1)^n v_n$*, où les* $v_n$ *sont ou bien tous positifs, ou bien tous négatifs.*

**Théorème 4.2** *Si* $(v_n)_{n\in N}$ *est une suite dans* $\mathbb{R}^+$*, décroissante et vérifiant* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$*, alors la série alternée de terme général* $u_n = (-1)^n v_n$ *est convergente.*

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

Analyse - TD N$^o$ 3
Séries.

**Exercice 1.** On considère la suite $u_n = \dfrac{1}{n^2 - n}$ (où $n \geq 2$).
1) Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ puis donner une formule explicite pour les sommes partielles $S_k = \sum_{n=2}^{k} u_n$.
2) En déduire que les séries $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent.

**Exercice 2.** On considère les suites $u_n = \ln(1 - \dfrac{1}{n^2})$ (où $n \geq 2$) et $v_n = \ln(\dfrac{n+1}{n})$ (où $n \geq 1$).
1) Trouver une relation simple entre $u_n, v_n, v_{n-1}$.
2) En déduire une formule explicite pour les sommes partielles $S_k = \sum_{n=2}^{k} u_n$ puis déterminer la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

**Exercice 3.** On admet que tout nombre réel $x \geq 0$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{n=-k}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{10^n}$$

où $k$ est un entier $\geq 0$ et les $a_{-n}$ sont des entiers entre 0 et 9. Ceci correspond à la représentation décimale

$$x = \underbrace{a_k\, a_{k-1} \cdots a_0}_{\text{partie entière}},\ \underbrace{a_{-1} a_{-2} a_{-3} \cdots}_{\text{partie fractionnaire}}.$$

1) Justifier la convergence de la série ci-dessus.
2) Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$. Un nombre réel $x \geq 0$ a-t-il en général une seule représentation décimale $x = a_k\, a_{k-1} \cdots a_0, a_{-1}a_{-2}a_{-3} \cdots$ ?
3) Écrire le réel $x = 2,31717171717\cdots$ sous forme d'une fraction.

**Exercice 4.** 1) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ est convergente de deux façons différentes :
   a) avec le critère de D'Alembert ;
   b) en majorant $u_n$ par le terme général d'une série convergente.
2) Mêmes questions pour la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

**Exercice 5.** Déterminer la nature des séries des terme général $u_n$ dans les cas suivants :
   a) $u_n = \frac{2n^2+2}{3n^2-n+1}$ ;
   b) $u_n = \frac{2n^2}{3n^3+n}$ ;
   c) $u_n = e^{-n}$ ;
   d) $u_n = \frac{1}{\left(\ln(n)\right)^{\ln(n)}}$ ; <u>Indication</u> : remarquer que $\left(\ln(n)\right)^{\ln(n)} = n^{\ln(\ln(n))}$.
   e) $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$ ;
   f) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n \ln(n)}$ ;
   g) $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$ ; <u>Indication</u> : trouver un équivalent de $u_n$ à l'aide d'un DL de cosinus en 0.
   h) $u_n = (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}$ ; <u>Indication</u> : trouver un équivalent de $u_n$ à l'aide d'un DL de $\ln(1+x)$ en 0.

**Exercice 6.** On considère deux réels $a, b$ tels que $0 < a < b$ puis on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{2k} = a^k b^{k+1} \text{ et } u_{2k+1} = a^{k+1} b^{k+1}.$$

Peut-on déterminer la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avec la règle de D'Alembert ? avec la règle de Cauchy ?

**Exercice 7.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \text{ et } \quad u_n = v_{n+1} - v_n.$$

1) Vérifier que $u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})$.
2) Montrer à l'aide d'un développement limité en 0 de $\ln(1 + x)$ que $-u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ puis en déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
3) Montrer en utilisant le 2) que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ admet une limite finie $l$ (ce nombre $l$ est appelé constante d'Euler).

**Exercice 8.** Étudier la convergence absolue puis la convergence des séries de terme général $u_n$ dans les cas suivants :
1) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^{\frac{3}{2}} + 2}$
2) $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
3) $u_n = \sin\left(\dfrac{(n^2+1)\pi}{n}\right)$
4) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ Indication : pour la convergence, on pourra étudier la série de terme général $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n}$.

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

# Intégrales généralisées

## 1 Rappels sur les intégrales de fonctions continues

### 1.1 Primitives

**Définition 1.1** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (non réduit à un point) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

**Théorème 1.2** *Étant donné un intervalle $I$, toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ admet des primitives sur $I$. De plus, si $F : I \to \mathbb{R}$ désigne l'une de ces primitives alors toute autre primitive de $f$ sur $I$ est de la forme $G = F + C$ où $C$ est une constante.*

### 1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné

On peut définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné par l'intermédiaire de la notion de primitive et à l'aide du théorème précédent :

**Définition 1.3** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (où $a < b$) une fonction continue. L'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ est le nombre $F(b) - F(a)$, où $F$ est une primitive quelconque de $f$ sur $[a, b]$. On note*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \big[F(t)\big]_a^b.$$

## 2 Intégrales généralisées

### 2.1 Intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert

**Définition 2.1** *Soient $[a, b[$ un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si la fonction*

$$\begin{array}{ccc} [a, b[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

*admet une limite finie $l$ quand $x$ tend vers $b$ ; dans ce cas, on écrit $\int_a^b f(t)dt = l$. Dans le cas contraire, on dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(t)dt$ **diverge.***

**Définition 2.2** *Soient $]a, b]$ un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si la fonction*

$$\begin{array}{ccc} ]a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^b f(t)dt \end{array}$$

*admet une limite finie $l$ quand $x$ tend vers $a$ ; dans ce cas, on écrit $\int_a^b f(t)dt = l$. Dans le cas contraire, on dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(t)dt$ **diverge.***

### 2.2 Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert

**Définition 2.3** *Soient* $]a,b[$ *un intervalle ouvert avec* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et* $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On dit que* ***l'intégrale généralisée*** $\int_a^b f(t)dt$ ***converge*** *si, pour un réel* $c \in ]a,b[$, *les deux intégrales généralisées* $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *convergent ; dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

*Dans le cas contraire, on dit que* ***l'intégrale généralisée*** $\int_a^b f(t)dt$ ***diverge.***

# 3 Intégrales généralisées des fonctions positives

### 3.1 Deux critères de convergence/divergence

**Théorème 3.1** *Soient* $[a,b[$ *un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, avec* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *et* $f,g : [a,b[ \to \mathbb{R}^+$ *deux fonctions continues telles que* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in [a,b[$. *On a*

1. *si* $\int_a^b g(t)dt$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge ;*
2. *si* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge, alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*

**Théorème 3.2** *Soient* $[a,b[$ *un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, avec* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *et* $f,g : [a,b[ \to \mathbb{R}^+$ *deux fonctions continues telles que* $f(x) \sim_b g(x)$. *Alors les intégrales généralisées* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *sont de même nature.*

**Remarque 3.3** *Il y a bien sûr des résultats similaires aux théorèmes 3.1 et 3.2 pour des fonctions continues positives sur un intervalle semi-ouvert* $]a,b]$.

### 3.2 Intégrales généralisées en $+\infty$ et séries

**Théorème 3.4** *Soit* $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que*

$$x_0 = a, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [a,+\infty[ \text{ avec } x_n < x_{n+1} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

*Alors l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *et la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ *sont de même nature. Si elles convergent, on a*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt.$$

**Corollaire 3.5** *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue et décroissante. Alors l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *et la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ *sont de même nature.*

# 4 Intégrales généralisées absolument convergentes

**Définition 4.1** *Soient* $[a,b[$ *un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, avec* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *et* $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ *est* ***absolument convergente*** *si l'intégrale généralisée* $\int_a^b |f(t)|\, dt$ *est convergente.*

**Remarque 4.2** *On a une définition similaire dans le cas d'un intervalle semi-ouvert* $]a, b]$ *ou d'un intervalle ouvert* $]a, b[$.

**Théorème 4.3** *Si une intégrale généralisée est absolument convergente, alors elle est convergente.*

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

Analyse - TD N$^o$ 3
Intégrales généralisées.

**Exercice 1.** Calculer, si elles convergent, les intégrales généralisées suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt \qquad b) \int_0^1 \ln(t) dt \qquad c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t) dt \qquad d) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

**Exercice 2.**
1) On considère la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t) = \frac{1-2\ln(t)}{t^3}$.
  a) Vérifier que la fonction $F(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est une primitive de $f$ sur $]0,+\infty[$.
  b) Calculer, si elle converge, l'intégrale généralisée

$$\int_2^{+\infty} \frac{1-2\ln(t)}{t^3} \, dt.$$

2) On considère la fonction $g(t) = \frac{cos(t)}{\sin(t)}$.
  a) Déterminer l'ensemble de définition $D_g$ de $g$.
  b) Vérifier que la fonction $G(t) = \ln(\sin(t))$ est une primitive de $g$ sur $]0,\pi[$. Donner une primitive de $g$ sur $]\pi, 2\pi[$.
  c) Calculer, si elle converge, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \, dt.$$

**Exercice 3 (intégrales de Riemann).** Étudier, en fonction du réel $\alpha$, la nature des intégrales généralisées suivantes et calculer leur valeur en cas de convergence.

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \qquad b) \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \qquad c) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

**Exercice 4.** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
1) Justifier que si $f$ est impaire, alors $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$ pour tout réel $x \geq 0$.
2) a) Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

  b) Trouver un exemple montrant que $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$ peut exister et être finie alors que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ diverge. **Indication** : On pourra utiliser le 1).

**Exercice 5.** Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}+3t^2} \qquad b) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{\sqrt{t}} dt \qquad c) \int_0^1 \frac{dt}{t\sin(t)} \qquad d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}$$

**Indication pour c)** : on pourra vérifier que $\sin(t) \sim_0 t$, par exemple en utilisant $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

**Exercice 6.**
1) Étant donné $x \in \mathbb{R}$, montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $x > 0$. On définit une fonction $\Gamma : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

2) Montrer à l'aide d'un intégration par parties que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3) Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 7.** Étudier la convergence absolue puis la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$a) \int_0^1 \sin(\frac{1}{t})dt \qquad b) \int_2^{+\infty} \frac{\cos(3t+1)}{t\sqrt{t}+1}dt \qquad c) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$$

**Indications pour c)** :

- Pour la convergence absolue, on pourra étudier la convergence de $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ en utilisant le théorème 3.4 du cours avec la suite $x_n = (n+1)\pi$.
- Pour la convergence, on intégrera par parties $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt$.

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

# Fonctions trigonométriques réciproques

## 1 Fonction arcsinus

On rappelle que la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

**Définition 1.1** *La fonction arcsinus (*$\arcsin$*) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*. Ainsi on a*

$$\arcsin : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & y \ \textit{ tel que } \ \sin(y) = x. \end{array}$$

Autrement dit, $\arcsin(x)$ désigne l'angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut $x$.

**Propriété 1.2** *La fonction* $\arcsin$ *est*
- *strictement croissante et continue,*
- *impaire,*
- *dérivable sur* $]-1, 1[$*, avec* $(\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pour tout* $x \in ]-1, 1[$.

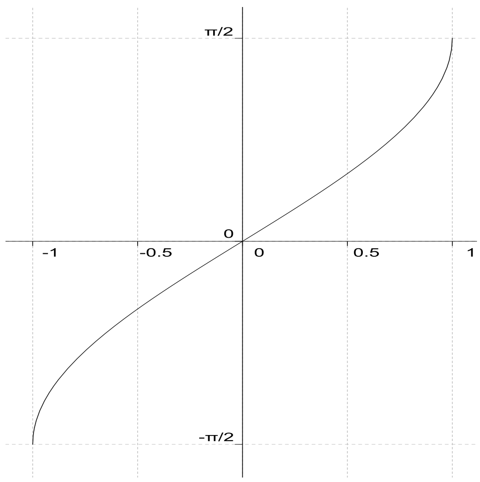


FIG. 1 – courbe de la fonction arcsin

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin(x)$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

## 2 Fonction arccosinus

On rappelle que la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

**Définition 2.1** *La fonction arccosinus (*$\arccos$*) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle* $[0, \pi]$*. Ainsi on a*

$$\arccos : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ x & \mapsto & y \;\; \textit{tel que} \;\; \cos(y) = x. \end{array}$$

Autrement dit, $\arccos(x)$ désigne l'angle entre 0 et $\pi$ dont le cosinus vaut $x$.

**Propriété 2.2** *La fonction* $\arccos$

- *est strictement décroissante et continue,*
- *vérifie* $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *pour tout* $x \in [-1, 1]$*,*
- *est dérivable sur* $]-1, 1[$*, avec* $(\arccos)'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pour tout* $x \in ]-1, 1[$.

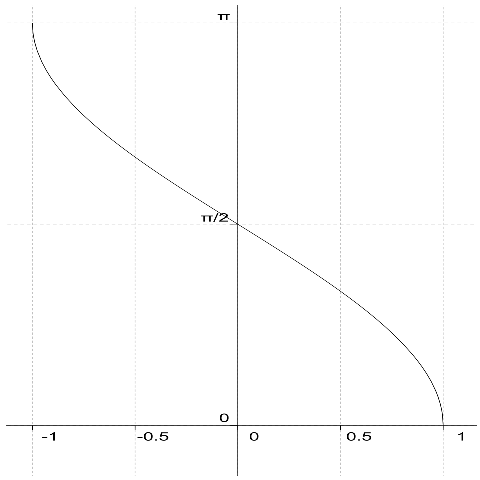


FIG. 2 – courbe de la fonction arccos

| $x$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arccos(x)$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $0$ |

## 3 Fonction arctangente

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

**Définition 3.1** *La fonction arctangente (*$\arctan$*) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*. Ainsi on a*

$$\arctan : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x & \mapsto & y \;\; \textit{tel que} \;\; \tan(y) = x. \end{array}$$

Autrement dit, $\arctan(x)$ désigne l'angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut $x$.

**Propriété 3.2** *La fonction* arctan *est*
- *strictement croissante,*
- *impaire,*
- *dérivable (et donc continue) sur* $\mathbb{R}$ *, avec* $(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

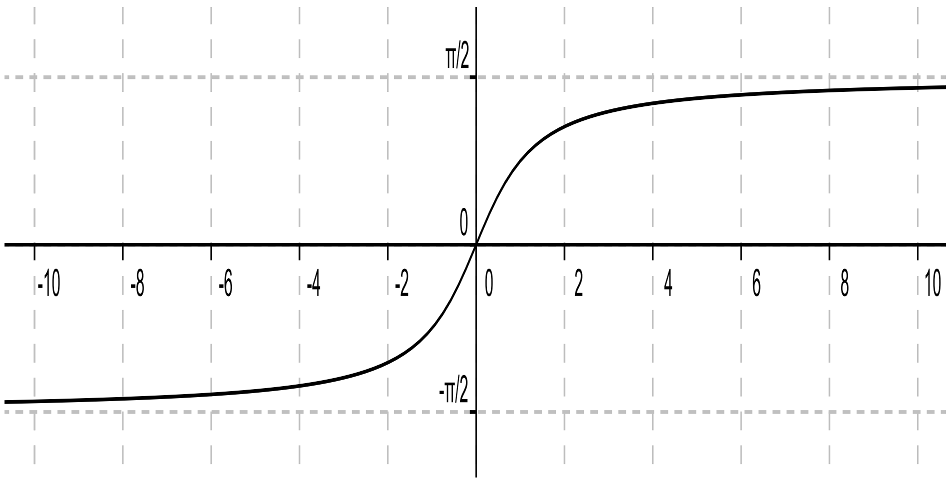


FIG. 3 – courbe de la fonction arctan

| $x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\arctan(x)$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |

**IUT de Villetaneuse - Département informatique**
**Année 2012-2013 (Semestre 2)**

Analyse - TD N$^o$ 5
Fonctions trigonométriques réciproques.

**Exercice 1.**
1) Calculer arcsin(sin($x$)), arccos(cos($x$), arctan(tan($x$)) pour $x = \frac{5\pi}{4}$ et pour $x = \frac{59\pi}{5}$.
2) Vérifier à l'aide du théorème de Pythagore que $\tan(\arcsin(\frac{1}{3})) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et que $\sin(2\arcsin(\frac{3}{5})) = \frac{24}{25}$.
On rappelle que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

**Exercice 2.** On considère la fonction $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.
Déterminer son ensemble de définition puis la dérivée $f'(x)$ aux points où elle existe. Que peut-on en déduire pour $f$ ?

**Exercice 3.** On considère la fonction $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
Préciser l'ensemble de définition de $f$ et calculer $f'(x)$ aux points $x$ où cette dérivée existe. En déduire une relation simple entre $f(x)$ et $\arcsin(x)$.

**Exercice 4.**
1) Trouver des réels $a, b$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{(1+t^2)^2}.$$

2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt.$$

3) Déduire de ce qui précède que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x)\Big).$$

4) Calculer, si elle converge, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}dt$.

**Exercice 5.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1) \times \arctan(x)$.
1) Étudier les variations de $f$.
2) Vérifier, en utilisant le résultat de l'exercice 2, que

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} (1+\frac{1}{x}) \times (\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})) & \text{si } x > 0 \\ (1+\frac{1}{x}) \times (-\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3) On définit une fonction $g : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R}$ par $g(y) = y \times f(\frac{1}{y})$.
a) Donner explicitement $g(y)$ et déterminer son $DL_2(0)$.
b) En déduire que la courbe de $f$ admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Qu'aurait-on pu dire si l'on avait seulement calculé un développement limité à l'ordre 1 au a) ?
4) De façon analogue au 3), montrer que la courbe de $f$ admet une droite asymptote au voisinage de $-\infty$ et préciser la position de cette courbe par rapport à l'asymptote.

**Exercice 6.**
1) Vérifier que $\arcsin(t) \sim_0 t$. <u>Indication :</u> on pourra utiliser le fait que $\arcsin'(0) = 1$.
2) Déterminer la nature de l'íntégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{2+t}{t\arcsin(t)}dt.$$

**Exercice 7.**
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n}).$$

1) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2) a) Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{3n^3}$ à l'aide des développements limités de sin et arccos en 0.
   b) En déduire que, pour $n$ assez grand, on a $u_n \geq 0$ puis la nature de la série de terme général $u_n$.