Département Informatique
Année Spéciale - Mathématiques 1

Année 2021-2022

Graphes orientés

1 Généralités et vocabulaire

Définition 1.1

Un graphe orienté est un couple (S, A) où S est un ensemble non vide et fini et où A est une liste finie de couples de S^2. Les éléments de S sont appelés les sommets du graphe et les couples dans la liste A sont appelés les arêtes (ou arcs) du graphe.

On utilise fréquemment le vocabulaire et les notations qui suivent :

- le cardinal de S (c'est à dire le nombre de sommets) est appelé l'**ordre** du graphe.
- Une arête de la forme (s, s) est appelée une **boucle**.
- Si $a = (s, s')$ est une arête, le sommet s est appelé l'**extrémité initiale** de a et s' l'**extrémité terminale** de a. On dit aussi que a est une arête qui va de s à s'. De plus, s est appelé un **prédécesseur** de s' et s' un **successeur** de s.
- L'ensemble des prédécesseurs (resp. des successeurs) d'un sommet s se note $\Gamma^-(s)$ (resp. $\Gamma^+(s)$). Un sommet s vérifiant $\Gamma^-(s) = \emptyset$ (resp. $\Gamma^+(s) = \emptyset$) est appelé une **source** (resp. un **puits**). Si $\Gamma^-(s) = \emptyset = \Gamma^+(s)$ alors on dit que s est un sommet **isolé**.
- Deux arêtes sont dites **adjacentes** si elles ont au moins une extrémité commune.
- Un même couple peut apparaitre plusieurs fois dans la liste A. Dans ce cas, on dit que l'on a une arête **multiple** ou bien des arêtes **parallèles**. On parle de **p−graphe** quand aucun couple ne se répète plus de p fois. Dans la suite de ce texte, <u>les arêtes sont toujours comptées avec leurs multiplicités.</u>
- Un graphe **simple** est un 1-graphe sans boucle.

2 Représentations d'un graphe orienté

2.1 Représentation sagittale

Si $G = (S, A)$ est un graphe orienté, on représente chaque sommet $s \in S$ par un point du plan et chaque arête $(s, s') \in A$ par une flèche orientée de s vers s'.

Exemple 2.1 *Donner une représentation sagittale du graphe $G = (S, A)$ où $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \big((1, 2), (1, 4), (1, 4)(2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 1), (3, 1), (3, 2)\big)$.*

2.2 Matrices d'adjacences

Définition 2.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté d'ordre n où $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. La matrice d'adjacence booléenne de G est la matrice $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times n$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \qquad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (s_i, s_j) \text{ est une arête ;} \\ 0 & \text{si } (s_i, s_j) \text{ n'est pas une arête ;} \end{cases}$$

Lorsque 0 et 1 sont booléens, les règles d'addition et de multiplication sont données par les tables suivantes :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ceci sera utilisé plus loin lorsqu'on fera intervenir les puissances de M.
Il existe une variante de la notion de matrice d'adjacence, donnée par la définition suivante.

Définition 2.2

La matrice d'adjacence de G est la matrice $\widetilde{M} = (\widetilde{m}_{i,j})$ de taille $n \times n$ où $\widetilde{m}_{i,j}$ est le nombre d'arêtes allant de s_i à s_j.

Exemple 2.2 *Donner les matrices d'adjacence du graphe de l'Exemple 2.1.*

2.3 Tableaux des successeurs ou des prédécesseurs

Le tableau des successeurs donne, pour chaque sommet $s \in S$, l'ensemble $\Gamma^+(s)$. Le tableau des prédecesseurs donne, pour chaque $s \in S$, l'ensemble $\Gamma^-(s)$.

Exemple 2.3 *Donner les tableaux des successeurs et des prédécesseurs pour le graphe de l'Exemple 2.1.*

3 Degrés et demi-degrés

Définition 3.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- *Le demi-degré extérieur $d^+(s)$ d'un sommet $s \in S$ est le nombre d'arêtes de la forme (s, s').*
- *Le demi-degré intérieur $d^-(s)$ d'un sommet $s \in S$ est le nombre d'arêtes de la forme (s', s).*
- *Le degré d'un sommet s est $d(s) = d^-(s) + d^+(s)$.*

Propriété 3.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On note m_G le nombre d'arêtes dans la liste A. Alors on a

$$\sum_{s \in S} d^-(s) = \sum_{s \in S} d^+(s) = m_G \quad \text{et} \quad \sum_{s \in S} d(s) = 2 \times m_G.$$

4 Chemins dans un graphe orienté

Définition 4.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- *Un chemin dans G est une suite $(s_1, \cdots, s_k)$ de sommets telle que $(s_i, s_{i+1}) \in A$ pour tout entier $i \in \{1, \cdots, k-1\}$. Le nombre entier $k-1$ est appelé la **longueur** du chemin. En particulier, tout sommet $s \in S$ constitue un chemin de longueur 0.*

En reprenant les notations de la définition qui précède, on a aussi le vocabulaire habituel suivant pour un chemin de longueur ≥ 1.

- Le sommet s_1 est l'**extrémité initiale** du chemin ; on dit aussi que s_1 est l'**origine** du chemin. Le sommet s_k est l'**extrémité terminale** du chemin. On parle aussi simplement d'un chemin allant de s_1 à s_k. On dit de plus que le chemin passe par les arêtes (s_i, s_{i+1}) et aussi qu'il passe par les sommets s_i.
- Le chemin est dit **fermé** si son origine est égale à son extrémité terminale.
- Le chemin est dit **simple** s'il ne passe pas plusieurs fois par une même arête..
- Le chemin est dit **élémentaire** s'il ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- Le chemin est appelé **circuit** s'il est simple et fermé.

Proposition 4.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté où $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ dont la matrice d'adjacence booléenne est notée M et la matrice d'adjacence $\widetilde{M}$. Alors, pour tous sommets s_i, s_j et pour tout nombre entier $p \geq 0$, on a :

- $(M^p)_{i,j} = 1 \iff$ *il existe au moins un chemin de longueur p dans G allant de s_i à s_j.*
- $(\widetilde{M^p})_{i,j}$ *est égal au nombre de chemins de longueur p dans G allant de s_i à s_j.*

5 Sous-graphes

Définition 5.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- *Un sous-graphe de G est un graphe orienté $G' = (S', A')$ obtenu en enlevant certains sommets ou certaines arêtes de G.*
- *En particulier, étant donné $S' \subset S$, on appelle sous-graphe de G engendré par S' le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de S' et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S'.*

6 Décomposition en couches

Proposition 6.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté sans circuit. Alors
1) G admet au moins une source.
2) Il existe une fonction $N : S \to \mathbb{N}^*$ telle que
- *pour tout $s \in S$, on a $N(s) = 1$ si et seulement si s est une source ;*
- *pour tout arête (s, s'), on a $N(s) < N(s')$;*
- *pour tout sommet s qui n'est pas une source, il existe au moins une arête (s', s) telle que $N(s') = N(s) - 1$.*

Les ensembles $\{s \in S \mid N(s) = 1\}$, $\{s \in S \mid N(s) = 2\}$ etc sont appelés les ***couches*** *(ou* ***niveaux****) de G.*

Le 1) dans la proposition ci-dessus se justifie facilement. Pour la partie 2), on peut donner une construction algorithmique de N :

$S' := S$ et $x := 1$	% *initialisation*
Tant que $S' \neq \emptyset$	
| pour tout $s \in S$ tel que $\Gamma^-(s) \cap S' = \emptyset$ poser $N(s) := x$	
| $S' := S' \setminus \{s \in S \mid N(s) = x\}$	
| $x := x + 1$	
Fin tant que	

7 Connexité forte

7.1 Graphes orientés fortement connexes

Définition 7.1

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est dit fortement connexe si pour tous sommets $s \in S$ et $s' \in S$ il existe un chemin allant de s à s'.

Proposition 7.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté d'ordre n de matrice d'adjacence booléenne M. Alors G est fortement connexe si et seulement si la matrice $\sum_{p=0}^{n-1} M^p$ ne contient que des 1.

7.2 Composantes fortement connexes

Étant donné un graphe orienté $G = (S, A)$, on définit une relation binaire $\sim$ sur S en disant que $s \sim s'$ si et seulement si il existe un chemin allant de s à s' et un chemin allant de s' à s. On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence, ce qui permet de donner la définition suivante.

Définition 7.2

Les composantes fortement connexes d'un graphe orienté $G = (S, A)$ sont les sous-graphes de G engendrés par les classes d'équivalences de la relation $\sim$ ci-dessus. La composante fortement connexe contenant un sommet $s \in S$ est notée $Cf(s)$ par la suite.

Remarque 7.1 *Si un graphe orienté est fortement connexe alors il est sa seule composante fortement connexe.*

Proposition 7.2

Deux sommets $s \neq s'$ d'un graphe orienté $G = (S, A)$ sont des sommets de la même composante fortement connexe de G si et seulement si il existe un circuit passant par ces deux sommets.

7.3 Procédure de marquage

Il existe plusieurs algorithmes pour déterminer les composantes fortement connexes d'un graphe orienté $G = (S, A)$. Voici un exemple simple (mais non optimal). Étant donné un sommet $s \in S$, on veut déterminer la composante fortement connexe $Cf(s)$ qui le contient.

```
Marquer s avec les symboles − et +. Les autres sommets n'ont pas de marque.      % étape 0
Tant que l'on a marqué des sommets à l'étape précédente
|        pour tout sommet s marqué − à l'étape précédente, marquer − tout sommet s' ∈ Γ⁻(s)
|        qui n'est pas déjà marqué − ;
|        pour tout sommet s marqué + à l'étape précédente, marquer + tout sommet s' ∈ Γ⁺(s)
|        qui n'est pas déjà marqué +.
Fin tant que
```

À la sortie de cette boucle, les sommets marqués à la fois $-$ et $+$ sont exactement les sommets dans $Cf(s)$. Si l'on veut ensuite obtenir la composante fortement connexe $Cf(s')$ contenant un sommet s' qui n'est pas dans $Cf(s)$, on reprend l'algorithme précédent en remplaçant G par le sous-graphe engendré par les sommets de S qui ne sont pas dans $Cf(s)$.

7.4 Graphe réduit

Définition 7.3

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Le graphe réduit de G est le graphe orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ où
- *$\mathcal{S}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$ ci-dessus ;*
- *un couple $(c, c') \in \mathcal{S}^2$ est une arête de $\mathcal{G}$ si et seulement si $c \neq c'$ et s'il existe une arête (s, s') de G telle que $s \in c$ et $s' \in c'$.*

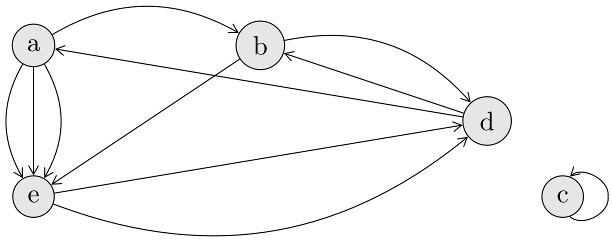
Intuitivement, le graphe réduit de G est le graphe obtenu en « écrasant » chaque composante fortement connexe sur un point.

Propriété 7.1

Le graphe réduit d'un graphe orienté est sans circuit.

8 Exercices

Exercice 1. On considère le graphe orienté G ayant la représentation sagittale suivante :



1) Déterminer S et A tels que $G = (S, A)$.
2) Donner $\Gamma^-(s)$, $\Gamma^+(s)$, $d^-(s)$ et $d^+(s)$ pour tout $s \in S$. Ce graphe a-t-il des puits ou des sources ?
3) Donner la matrice d'adjacence booléenne M de G puis sa matrice d'adjacence $\widetilde{M}$.
4) Existe-t-il un chemin de longueur 2 allant de a à b ? de longueur 3 ? de longueur 4 ? Le cas échéant, combien en existe-t-il ?
6) Donner le sous-graphe engendré par $S' = \{a, b, c\}$.

Exercice 2. Trouver tous les 1-graphes orientés correspondant aux tableaux suivants :

s	a	b	c	d	e	f
$d^+(s)$	1	3	2	0	1	0
$d^-(s)$	0	2	2	0	3	0

s	a	b	c	d	e	f
$d^+(s)$	2	3	1	0	3	2
$d^-(s)$	3	0	3	0	5	0

Exercice 3. On considère les tableaux suivants :

s	a	b	c	d	e	f
$d^+(s)$	1	3	4	1	1	1
$d^-(s)$	3	2	2	0	3	2

s	a	b	c	d	e	f
$d^+(s)$	1	5	0	0	1	0
$d^-(s)$	0	2	2	0	3	0

1) Existe-t-il des 1-graphes orientés correspondant à ces données ?
2) Si l'on considère seulement des 1-graphes
a) que peut-on dire de la condition vue en cours concernant l'égalité des sommes des demi-degrés ?
b) Trouver deux autres conditions nécessaires pour que le problème ait une solution.

Exercice 4. 1) On dispose de trois bouteilles d'eau de contenances respectives 6 litres, 5 litres et 1 litre. La bouteille de 6 litres est pleine et les autres vides. Comment procéder pour obtenir 3 litres dans au moins une des bouteilles, seulement en transvasant du liquide d'une bouteille à une l'autre et sans aucun instrument de mesure ?
a) Trouver un graphe orienté $G = (S, A)$ modélisant les contraintes du problème. *Indication :* on prendra $S \subset \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \mid a+b+c = 6\}$, chaque triplet $(a, b, c) \in S$ représentant les volumes d'eau présents dans les différentes bouteilles.
b) Quel sommet correspond à la situation initiale ?
c) Déterminer les successeurs de chaque sommet.
d) Déterminer les chemins de longueur 4 dont l'origine est le sommet du b).
e) Trouver deux solutions différentes au problème posé.
2) Reprendre le problème du 1) avec cette fois trois bouteilles de 8 litres, 5 litres et 3 litres, et en supposant que l'on veut avoir 4 litres dans deux bouteilles.

Exercice 5. Dans un problème classique, un passeur se trouve avec un loup, une chèvre et un

choux d'un côté d'une rivière. Il veut les changer de rive mais sa barque ne lui permet d'en transporter qu'un seul à la fois et il ne peut pas laisser la chèvre sans surveillance ni avec le choux, ni avec le loup. Comment doit-il procéder ?
1) Trouver un 1-graphe orienté $G = (S, A)$ modélisant les contraintes du problème. *Indication :* les sommets de G représenteront les personnages de l'histoire se tenant sur la rive de départ quand le passeur n'est pas dans sa barque et les arêtes symboliseront les traversées du passeur.
2) Traduire le problème posé en termes de chemins dans G puis le résoudre.

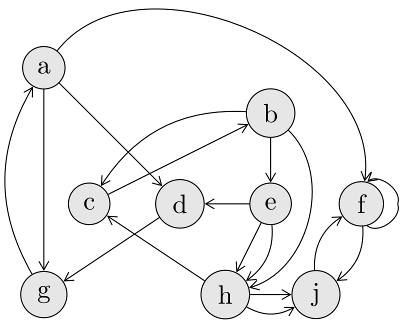
Exercice 6. Dans une version du jeu de Fan Tan, on dispose au début du jeu de deux tas de trois cailloux chacun ; deux joueurs enlèvent ensuite à tour de rôle un ou deux cailloux du tas de leur choix ; celui qui ramasse le dernier caillou perd la partie.
1) Trouver un 1-graphe orienté $G = (S, A)$ modélisant ce jeu.
2) Montrer à l'aide du graphe précédent que le premier joueur peut être certain de gagner la partie en jouant convenablement son premier coup.

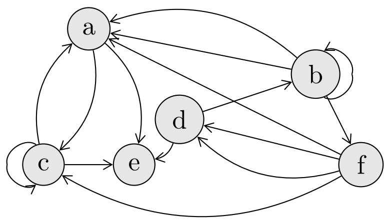
Exercice 7. On considère le 1-graphe orienté $G = (S, A)$ où $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$ donné par le tableau d'adjacences suivant :

s	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$\Gamma^+(s)$	$\{s_2, s_4, s_7\}$	$\{s_4, s_6\}$	$\{s_5, s_6, s_7\}$	$\emptyset$	$\{s_7\}$	$\{s_5\}$	$\emptyset$

Vérifier que G est sans circuit puis effectuer sa décomposition en couches.

Exercice 8. Déterminer les composantes fortement connexes des graphes représentés ci-dessous puis former leurs graphes réduits.





Exercice 9. On considère le 1-graphe $G = (S, A)$ où $S = \{1, 2 \cdots, 10\}$ et où un couple $(m, n) \in S^2$ est dans A si et seulement si il existe des nombres premiers p et q tels que $p < q$, p divise m et q divise n.
1) Donner la matrice d'adjacence booléenne de G.
2) Trouver les composantes fortement connexes de G puis donner son graphe réduit.

Département Informatique
AS & FC - Mathématiques 1

Année 2021-2022

Graphes non orientés

1 Généralités

Définition 1.1

Un graphe non orienté est un couple (S, A) où S est un ensemble fini et où A est une liste finie de paires ou de singletons inclus dans S. Les éléments de S sont appelés les sommets du graphe et les paires et singletons dans la liste A sont appelés les arêtes (ou arcs) du graphe.

- Comme pour les graphes orientés, le cardinal de S (c'est à dire le nombre de sommets) est appelé l'**ordre** du graphe.
- Une arête qui est un singleton est appelée une **boucle**.
- Par la suite, un singleton $\{s\} \subset S$ sera aussi désigné par $\{s, s\}$. Ceci permet d'utiliser la même notation $\{s, s'\}$ pour toute arête, qu'elle soit une boucle (quand $s = s'$) ou non (quand $s \neq s'$).
- Si $a = \{s, s'\}$ est une arête, on dit que s' est un **voisin** de s ou bien que s et s' sont **adjacents**. Les sommets s et s' sont appelés les **extrémités** de l'arête a.
- L'ensemble des voisins d'un sommet s se note $\Gamma(s)$.
- Deux arêtes sont dites **adjacentes** si elles ont au moins une extrémité commune.
- Comme pour les graphes orientés, une même arête peut apparaitre plusieurs fois dans la liste A. On dit alors que l'on a une arête **multiple** ou bien des arêtes **parallèles**. On parle de **p−graphe** quand aucune arête n'est répétée plus de p fois dans la liste A. Par la suite, les arêtes sont toujours comptées avec leurs multiplicités.
- Un graphe **simple** est un 1-graphe sans boucle.

Remarque 1.1. *À tout graphe orienté on peut associer naturellement un graphe non orienté en « oubliant » les orientations des arêtes de G, c'est à dire en gardant les mêmes sommets et en remplaçant chaque arête (s, s') de G par $\{s, s'\}$.*

1.1 Représentation sagittale

Si $G = (S, A)$ est un graphe non orienté, on représente chaque sommet $s \in S$ par un point du plan et chaque arête $\{s, s'\} \in A$ par un segment ou une courbe reliant s et s'. À la différence des graphes orientés, ces segments et ces lignes ne portent pas de flêche.

Exemple 1.1. *Donner une représentation sagittale du graphe $G = (S, A)$ où $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \big(\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 1\}, \{2\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 1\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3\}\big)$.*

1.2 Matrices d'adjacences

Définition 1.2

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté d'ordre n où $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. La matrice d'adjacence booléenne de G est la matrice $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times n$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \qquad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{s_i, s_j\} \text{ est une arête ;} \\ 0 & \text{si } \{s_i, s_j\} \text{ n'est pas une arête.} \end{cases}$$

Comme pour les graphes orientés, on peut aussi définir une matrice qui retient plus d'informations sur le graphe :

Définition 1.3

La matrice d'adjacence de G est la matrice $\widetilde{M} = (\widetilde{m}_{i,j})$ de taille $n \times n$ où $\widetilde{m}_{i,j}$ est le nombre d'arêtes d'extrémités s_i et s_j.

Remarque 1.2. *La matrice d'adjacence (booléenne ou non) d'un graphe non orienté est toujours symétrique.*

1.3 Degrés

Définition 1.4

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Le degré $d(s)$ d'un sommet $s \in S$ est le nombre d'arêtes dont s est un extrémité, <u>les boucles $\{s\}$ éventuelles étant comptées deux fois chacune</u>.

Propriété 1.1

Pour tout graphe non orienté $G = (S, A)$ on a

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2 \times m_G$$

où m_G désigne le nombre d'arêtes dans la liste A. De plus, le nombre de sommets de degré impair est pair.

2 Chaînes dans un graphe non orienté

Définition 2.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une chaîne dans G est une suite de sommets $(s_1, s_2, \cdots, s_k)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, k-1\}$, l'ensemble $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête. L'entier $k-1$ est appelé la longueur de la chaîne. En particulier tout sommet $s \in S$ constitue une chaîne de longueur 0.

Avec les notations de la définition précédente, on a le vocabulaire habituel suivant pour une chaîne de longueur ≥ 1.

- On dit que les sommets s_1 et s_k sont les extrémités de la chaîne. On dit de plus que la chaîne passe par les arêtes $a_i = \{s_i, s_{i+1}\}$ et aussi qu'elle passe par les sommets s_i.
- La chaîne est dite **fermée** si $s_1 = s_k$.
- La chaîne est dite **simple** si elle ne passe pas plusieurs fois par une même arête.
- La chaîne est dite **élémentaire** si elle ne passe pas plusieurs fois par un même sommet.
- La chaîne est appelée **cycle** si elle est simple et fermée.
- un **cycle élémentaire** est un cycle dont tous les sommets sont distincts, sauf le premier et le dernier.

Remarque 2.1. • *Si G possède une chaîne d'extrémités s et s' où $s \neq s'$ alors il admet aussi une chaîne élémentaire ayant les mêmes extrémités s, s'.*
• *Il n'est pas vrai que si G possède une chaîne fermée alors G admet un cycle élémentaire, ni même un cycle. Cependant si G possède un cycle élémentaire passant par un sommet s alors il existe aussi un cycle élémentaire passant par s.*

Proposition 2.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté avec $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ et de matrice d'adjacence booléenne M. Alors, pour tous sommets s_i,s_j et pour tout entier $p \geq 0$, on a :

$$(M^p)_{i,j} = 1 \Leftrightarrow \text{il existe une chaîne de longueur } p \text{ ayant pour extrémités } s_i \text{ et } s_j.$$

3 Sous-graphes

Les notions de sous-graphes et de sous-graphe engendré par un ensemble S' sont définies exactement comme pour les graphes orientés.

4 Connexité

4.1 Graphes non orientés connexes

Définition 4.1

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est connexe si pour tous sommets $s \in S$ et $s' \in S$ il existe une chaîne d'extrémités s et s'.

Proposition 4.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté d'ordre n dont on note M la matrice d'adjacence booléenne. Alors G est connexe si et seulement si la matrice $\sum_{p=0}^{n-1} M^p$ ne contient que des 1.

4.2 Composantes connexes

Étant donné un graphe non orienté $G = (S, A)$, on définit une relation binaire $\equiv$ sur S en disant que $s \equiv s'$ si et seulement si il existe une chaîne d'extrémités s et s'. On vérifie que $\equiv$ est une relation d'équivalence, ce qui permet de donner la définition suivante.

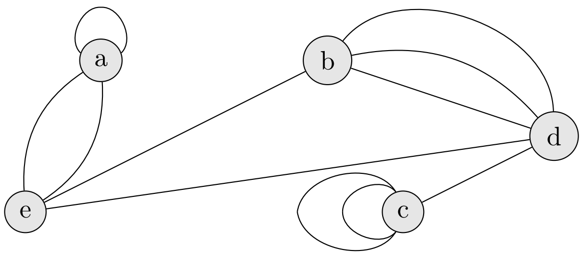
Définition 4.2

Les composantes connexes d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ sont les sous-graphes de G engendrés par les classes d'équivalences de la relation $\equiv$ ci-dessus.

Remarque 4.1. *Si un graphe non orienté est connexe alors il est sa seule composante connexe.*

5 Exercices

Exercice 1. On considère le graphe non orienté G ayant la représentation sagittale suivante :



1) Déterminer S et A tels que $G = (S, A)$.
2) Donner $\Gamma(s)$ et $d(s)$ pour tout $s \in S$.
3) Quels sommets s, s' constituent les extrémités d'une chaîne de longueur 3 ?
4) Donner le sous-graphe engendré par $S' = \{c, d, e\}$.

Exercice 2. Dans un 1-graphe non orienté d'ordre n, combien existe-t-il d'arêtes au maximum ?

Exercice 3. Démontrer que dans une assemblée de n personnes ($n \geq 2$), au moins deux individus ont le même nombre d'amis parmi les membres de cette assemblée.

Exercice 4. 1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'un graphe non orienté est k-régulier si c'est un graphe simple et si tous les sommets ont pour degré k. Montrer qu'il existe un graphe non orienté, 3-régulier et d'ordre n si et seulement si n est un entier pair ≥ 4.
2) a) Est-il possible de tracer sur une feuille 7 segments de droites de telle façon que chacun d'eux en rencontre exactement trois autres ?
   b) Même question avec 8 segments.

Exercice 5. Soit G un graphe non orienté simple d'ordre pair $n = 2p \geq 2$. Montrer que si pour tout sommet s on a $d(s) \geq p$ alors G est connexe.

Exercice 6. 1) Soit G un 1-graphe non orienté d'ordre n.
   a) Justifier que si G est connexe alors il possède au moins $n - 1$ arêtes.
   b) Justifier que si G est sans cycle alors il possède au plus $n - 1$ arêtes.
2) On appelle **arbre** tout 1-graphe non orienté, connexe et sans cycle. Montrer que, pour un graphe non orienté simple G d'ordre n, toutes les phrases suivantes sont équivalentes :
   (i) G est un arbre ;

(ii) Pour tous sommets $s \neq s'$ de G il existe une unique[1] chaîne élémentaire ayant pour extrémités s et s' ;

(iii) G est connexe et possède $n-1$ arêtes ;

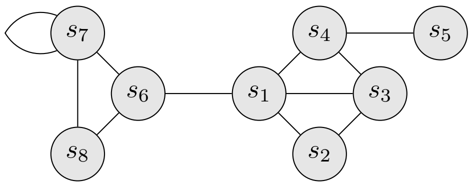
(iv) G est sans cycle et possède $n-1$ arêtes ;

(v) G est connexe et si l'on supprime une arête quelconque de G alors le sous-graphe obtenu n'est pas connexe ;

(vi) G n'a pas de cycle et si l'on ajoute une arête entre deux sommets non adjacents de G alors le graphe obtenu possède un cycle.

Exercice 7. Soit $G = (S, A)$ un 1-graphe non orienté et connexe. On dit qu'une arête de G est **un isthme** si le sous-graphe G' obtenu en enlevant cette arête (mais en gardant les mêmes sommets) n'est plus connexe.

1) Trouver (au moins) un isthme pour le graphe G suivant :



2) Donner une exemple de 1-graphe non orienté, connexe, ayant plusieurs sommets et ne possédant aucun isthme.

3) On suppose dans cette question que $G = (S, A)$ est un 1-graphe connexe possédant au moins un isthme $a = \{s, s'\}$. On note G' le sous-graphe de G obtenu en enlevant l'arête a et G'_1 la composante connexe de G' contenant le sommet s.

a) Justifier que l'arête a n'est pas une boucle.

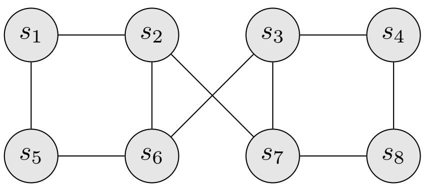
b) Justifier que s' n'est pas un sommet de G'_1.

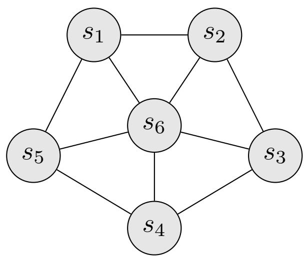
c) Pour un sommet x de G'_1, quelle relation a-t-on entre $d_{G'_1}(x)$ (le degré de x dans G'_1) et $d_G(x)$ (le degré de x dans G) ?

d) Déduire de ce qui précède que G a au moins deux sommets de degrés impairs.

Exercice 8. Le **nombre chromatique** d'un graphe non orienté simple G est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier les sommets de G de telle façon que deux sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur.

1) Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants :





2) Dans un établissement scolaire, six matières $M_1, M_2, \cdots, M_6$ sont optionnelles. Certains élèves ont choisi les trois options M_1, M_2, M_3, d'autres les deux options M_4, M_6, d'autres M_5, M_6 et

1. L'unicité doit se comprendre « au renversement de l'ordre des sommets près » ; autrement dit si l'on ne distingue pas une chaîne $(s_1, s_2, \cdots, s_{k-1}, s_k)$ de la chaîne $(s_k, s_{k-1}, \cdots, s_2, s_1)$.

enfin d'autres M_3, M_5. Si chacun de ces cours occupe une demi-journée par semaine, quel est le temps minimal qui sera consacré à ces options ?

IUT de Villetaneuse
Département Informatique
AS & FC - Mathématiques 1 **Année 2021-2022**

Chemins optimaux dans les graphes pondérés

1 Graphes pondérés

Définition 1

*- Un **graphe pondéré** (ou **valué**) est un graphe (S, A) (orienté ou non) où chaque arête a est affectée d'un nombre $v(a)$. On dit que $v(a)$ est le **poids** ou la **longueur** de a. On désigne un tel graphe valué par $G = (S, A, v)$.*
*- Soit μ un chemin (dans le cas d'un graphe orienté) ou une chaîne (dans le cas d'un graphe non orienté) constitué d'une suite d'arêtes $a_1, \cdots, a_k$. On définit $v(\mu)$ comme étant la somme des $v(a_i)$, c'est à dire on pose $v(\mu) = \sum_{i=1}^{k} v(a_i)$. On dit alors que $v(\mu)$ est le **poids** ou la **longueur** de μ.*

Remarque 1. *- Dans les applications concrètes, le nombre $v(a)$ peut représenter une distance, un coût, une durée, un débit, ...*
- Sur une représentation sagittale du graphe, le nombre $v(a)$ est inscrit à coté de l'arête a.
- Il ne faut pas confondre la notion de longueur d'un chemin (ou d'une chaîne) ci-dessus avec celle vue dans les chapitres précédents, où l'on comptait simplement le nombre d'arêtes dans le chemin ou la chaîne considéré. Ces deux notions coïncident si et seulement si $v(a) = 1$ pour toute arête a.

2 L'algorithme de Dijkstra

Soit $G = (S, A, v)$ un 1-graphe valué d'ordre n. On suppose de plus que
- un sommet « de départ » $r \in S$ est spécifié ;
- La fonction de poids v prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, c'est à dire $v(a) \geq 0$ pour toute arête a dans A

2.1 Cas d'un graphe orienté

L'algorithme de Djikstra permet de déterminer, pour tout $s \in S$, un chemin de poids minimal parmi tous les chemins allant de r à s. On notera $d(s)$ ce poids minimal, en convenant que $d(s) = +\infty$ s'il n'y a pas de chemin de r à s. Si, pour tout chemin μ, on désigne $v(\mu)$ par le terme « longueur de μ », alors il est légitime d'appeler « distance de r à s » le nombre $d(s)$.

L'algorithme de Djikstra peut se présenter sous la forme du pseudo-code suivant. La fonction $\delta : S \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ dans cet algorithme majore la fonction $d : S \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et est réévaluée au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme ; en sortie on a $\delta = d$.

$\delta(r) := 0$ et $\delta(s) := +\infty$ pour tout $s \in S \setminus \{r\}$ et $T = \emptyset$. *% initialisation*
tant que $T \neq S$ *% boucle principale*
| choisir $s \in S \setminus T$ minimisant δ
| $T := T \cup \{s\}$ *% actualisation de T*
| pour tout $s' \in \Gamma^+(s) \setminus T$ *% actualisation de δ*
| | si $\delta(s) + v\big(s, s'\big) < \delta(s')$ alors
| | | $\delta(s') := \delta(s) + v\big(s, s'\big)$
| | | père$(s') := s$
| | fin si
| fin pour tout
fin tant que

Remarque 2. - *L'algorithme ajoute un nouveau sommet dans T à chaque passage dans la boucle principale ; il y a donc exactement n passages dans cette boucle. Le premier sommet mis dans T est r.*

- *Pour tout $s \in S$, la valeur de $\delta(s)$ ne change pas ou décroit à chaque nouveau passage dans la boucle.*
- *Une fois qu'un sommet s est choisi pour être rajouté dans T, le nombre $\delta(s)$ n'évolue plus dans la suite du déroulement de l'algorithme. Si en outre $\delta(s) \neq +\infty$ et $s \neq r$, alors père(s) est l'un sommets choisis précédemment et ne changera plus par la suite. Si par contre $\delta(s) = +\infty$ alors père(s) n'est pas défini et on peut arrêter l'algorithme car la fonction δ n'évoluera plus.*

La proposition suivante justifie que l'algorithme de Djikstra fait bien ce qu'on attend de lui, à savoir le calcul du poids minimal $d(s)$ d'un chemin de r à s, pour tout $s \in S$. Dans la version proposée ici, il fait même un peu mieux : il donne aussi un chemin de r à s ayant pour poids $d(s)$.

Proposition 1

Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note r_k le sommet choisi lors du k^{ieme} passage dans la boucle (en particulier $r_1 = r$). Alors

1) *Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a $\delta(r_k) = d(r_k)$ dès le k^{ieme} passage dans la boucle. En conséquence on obtient en sortie de l'algorithme $\delta(s) = d(s)$ pour tout $s \in S$.*
2) *Pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$, si $d(r_k) \neq +\infty$ alors un chemin allant de r à r_k et de poids $d(r_k)$ est donné par la suite d'arêtes $a_1, \cdots, a_{l-1}, a_l$ où*

$$a_l = (\text{père}(r_k), r_k), a_{l-1} = \big(\text{père}(\text{père}(r_k)), \text{père}(r_k)\big),$$
$$a_{l-2} = \Big(\text{père}\big(\text{père}(\text{père}(r_k))\big), \text{père}(\text{père}(r_k))\Big) \text{ etc.}$$

2.2 Cas d'un graphe non orienté

Le problème et l'algorithme sont presque les mêmes que pour un graphe orienté : il suffit de remplacer dans ce qui précède le mot « chemin » par le mot « chaîne » et $\Gamma^+(s)$ par $\Gamma(s)$.

3 Algorithme de Bellman-Ford

Soit $G = (S, A, v)$ un 1-graphe valué d'ordre n avec un sommet « de départ » spécifié, noté r. À nouveau, le problème posé est la recherche, pour tout sommet s, d'un chemin de poids minimal allant de r à s. Ce poids minimal est noté à nouveau $d(s)$. À la différence de l'algorithme de Djikstra, la fonction v peut prendre des valeurs négatives. En sortie, ou bien l'algorithme de Bellman fournit des chemins souhaités, ou bien il indique la présence d'un circuit de poids strictement négatif inclus dans un chemin dont l'origine est r ; dans ce second cas il n'existe pas de chemin de poids minimal allant de r à s pour les sommets s dans un tel circuit.

```
δ(r) := 0 et δ(s) := +∞ pour tout s ∈ S \ {r}                    % initialisation
δ_new(s) := δ(s) pour tout s ∈ S
circuit := faux                                                    % booléen
pour k variant de 1 à n − 1
|     pour toute arête (s, s')                                     % actualisation de δ
|     |     si δ_new(s') > δ(s) + v((s, s') alors
|     |     |     δ_new(s') := δ(s) + v((s, s'))
|     |     |     père(s') := s
|     |     fin si
|     fin pour toute
|     δ(s) := δ_new(s) pour tout s ∈ S
fin pour
pour toute arête (s, s')              % pour détecter un éventuel circuit de poids < 0
|     si δ(s') > δ(s) + v((s, s')) alors
|     |     circuit := vrai
|     fin si
fin pour toute
```

Remarque 3. - *Pour tout $s \in S$, la valeur de $\delta(s)$ ne change pas ou décroit au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme.*

- *On peut en fait arêter l'algorithme si la fonction δ n'est pas modifiée après une incrémentation de k.*

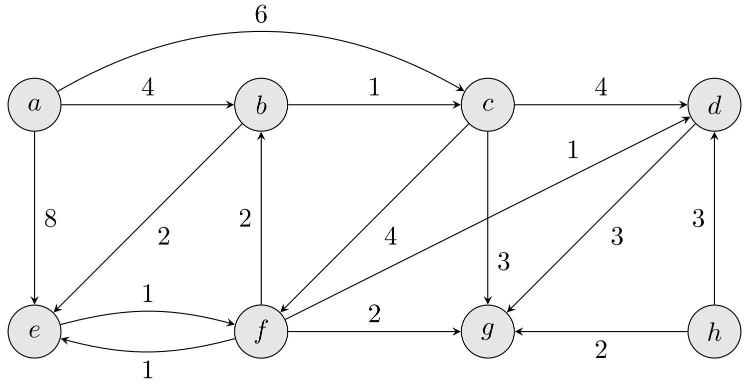
Proposition 2

- *Le graphe G possède un circuit de poids strictement négatif inclus dans un chemin d'origine r si et seulement si, en sortie de l'algorithme, on a circuit = vrai.*
- *Si, en sortie de l'algorithme, on a circuit = faux alors $\delta(s) = d(s)$ pour tout $s \in S$. Si de plus $d(s) \neq +\infty$ alors un chemin de poids $d(s)$ allant de r à s est donné par une suite d'arêtes $a_1, \cdots, a_{l-1}, a_l$ comme dans la Proposition 1.*

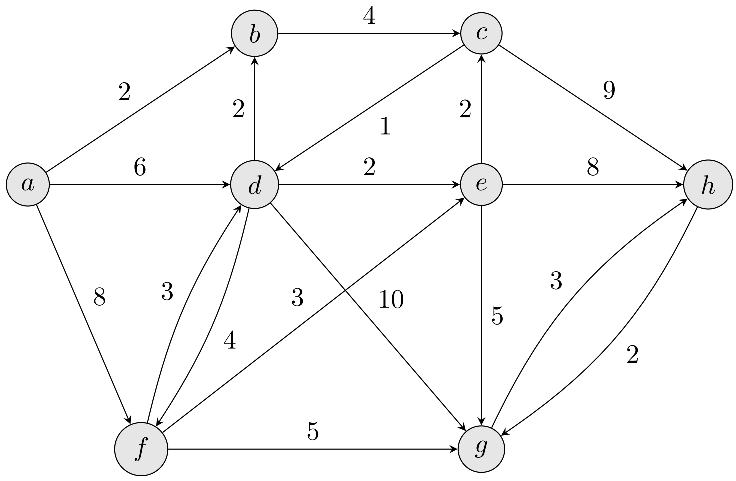
4 Exercices

Exercice 1. Appliquer l'algorithme de Djikstra aux graphes pondérés suivants en prenant a comme sommet de départ.

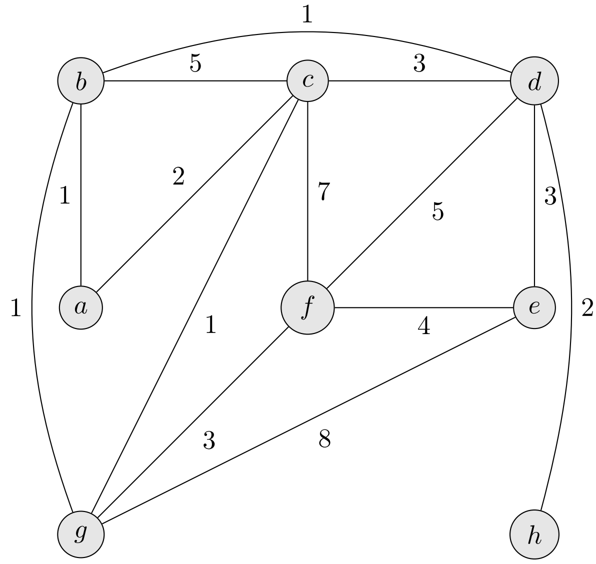
1)



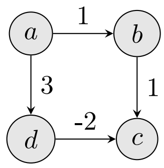
2)



Exercice 2. Un réseau de sentiers entre différents lieux géographiques est représenté par le graphe non orienté suivant, le poids $v(a)$ d'une arête a étant la longueur (en km) du sentier correspondant.
1) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, calculer la distance minimale que doit parcourir un promeneur se trouvant en h et désirant se rendre en f par ces chemins. Préciser son itinéraire.
2) Quelle est la distance minimale parcouru par ce même individu s'il souhaite de plus faire une halte au point a ?



Exercice 3. Que constatez-vous si vous appliquez l'algorithme de Djikstra au graphe valué suivant ?

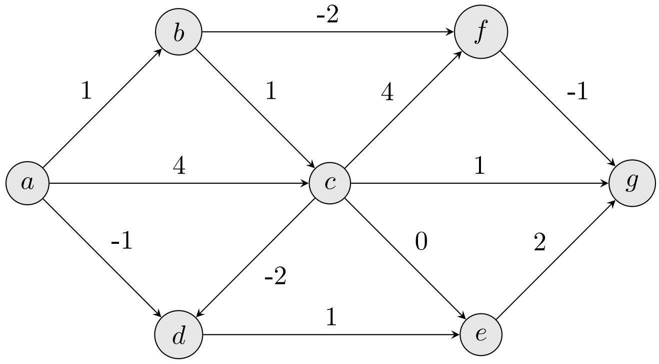


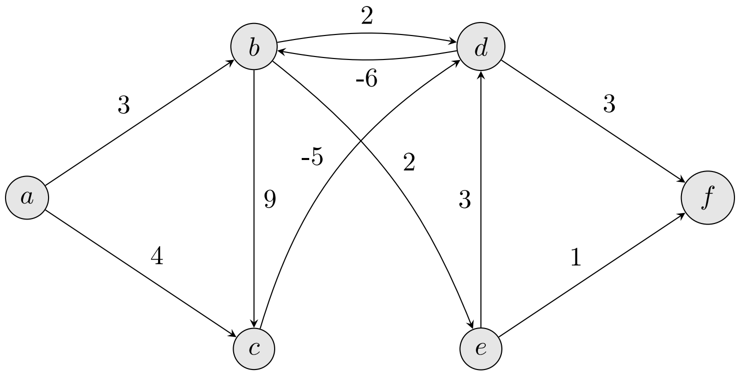
Exercice 4. Soit $G = (S, A, v)$ un 1-graphe valué orienté où v prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. La *capacité* $C(\mu)$ d'un chemin μ constitué d'une suite d'arêtes $a_1, \cdots, a_k$ est définie par

$$C(\mu) = \min_{1 \leq i \leq k} v(a_i).$$

1) Proposer une situation concrète illustrant cette notion de capacité.
2) En vous inspirant de l'algorithme de Djikstra, donner un nouvel algorithme permettant de trouver, pour tout $s \in S$, un chemin de capacité maximale d'un chemin allant de r à s.
3) Appliquer cet algorithme à l'un des graphes du premier exercice.

Exercice 5. 1) Appliquer l'algorithme de Bellman-Ford aux graphes valués suivants, à partir du sommet a.





2) Enlever une arête au second graphe de façon à obtenir un graphe sans circuit de poids < 0 puis appliquer l'algorithme de Bellman-Ford à ce nouveau graphe.

Exercice 6. Expliquer comment adapter l'algorithme de Bellman-Ford pour qu'il calcule le poids *maximal* d'un chemin entre un sommet donné r donné et les autres sommets.

Exercice 7. On considère des villes portuaires a, b, c, d, e, f, g et un navigateur qui part de a pour aller à f. Son voyage doit comporter des étapes parmi ces villes et on connait, pour chaque trajet d'une étape à une autre, la probabilité de rencontrer une tempête. Les tableaux suivants résument les trajets intermédiaires possibles et, pour chacun d'eux, la probabilité de tempête.

départ	arrivée	probabilité
a	b	0,1
a	c	0,2
b	d	0,3
c	d	0,3
c	e	0,2

départ	arrivée	probabilité
d	f	0,7
d	g	0,1
e	f	0,5
e	g	0,4
f	h	0,6
g	f	0,2

On suppose que la présence d'une tempête sur les divers trajets intermédiaires sont des évènements aléatoires indépendants les uns des autres. En utilisant un graphe convenablement pondéré, trouver un itinéraire permettant à ce navigateur de voyager en minimisant le risque d'essuyer une tempête.