

UNIVERSITÉ PARIS 13

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité: Mathématiques

**TOPOLOGIE ET DYNAMIQUE SUR LES SURFACES**

MARC BONINO

Soutenue le 17 décembre 2007 devant le jury composé de

Christian BONATTI  
John GUASCHI  
Lucien GUILLOU  
Toby HALL  
Patrice LE CALVEZ  
Ricardo PEREZ-MARCO

Rapporteurs:

Christian BONATTI  
Michael HANDEL  
Patrice LE CALVEZ



## Remerciements

Je remercie tout d'abord Patrice Le Calvez d'avoir accepté de présenter mes travaux pour l'habilitation à diriger des recherches. Mon travail a bénéficié des échanges scientifiques que nous avons pu avoir, et pour lesquels je le remercie à nouveau.

Je remercie aussi Christian Bonatti et Michael Handel pour leur travail de rapporteurs. Christian me fait de plus un réel plaisir en prenant part au jury.

Lucien Guillou, après avoir dirigé ma thèse, a manifesté un intérêt constant pour mes recherches. Ses encouragements à "passer l'habilitation" ont aussi été décisifs. Je tiens à le remercier pour son soutien et pour sa présence dans ce jury.

John Guaschi et Toby Hall me font un grand plaisir en participant au jury. Je leur adresse mes plus vifs remerciements de me consacrer ce temps.

Je suis reconnaissant envers Ricardo Perez-Marco pour sa participation à ce jury. Il est ainsi le second représentant de Paris 13 et je saisis ici l'occasion de saluer tous les membres du LAGA, qui font de ce laboratoire un lieu où l'on travaille avec plaisir.

Je souhaite aussi saluer mes collègues de l'IUT de Villetaneuse, où se déroule l'autre partie de ma vie à Paris 13, et en particulier ceux qui m'ont chaleureusement accueilli au sein de l'équipe de maths du département d'informatique.

Mes remerciements vont enfin à mes parents, à Laurence et mes enfants Vincent et Claire, pour leur soutien ou simplement pour leur présence.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	5
2. Autour de la notion d'indice d'un point fixe	7
2.1. Indice de Lefschetz	7
2.2. Mise en position canonique autour d'un point fixe	7
2.3. L'indice de point fixe pour les homéomorphismes renversant l'orientation	13
3. Sur les homéomorphismes de la sphère renversant l'orientation	16
3.1. Un analogue de la théorie de Brouwer	16
3.2. Une application de la théorie de Nielsen	25
4. Une nouvelle variation sur le théorème de Poincaré-Birkhoff	27
4.1. Différentes versions du théorème de Poincaré-Birkhoff	27
4.2. Homéomorphismes préservant l'homologie de l'anneau	29
Bibliographie	33

## 1. INTRODUCTION

Je présente dans ce mémoire quelques résultats sur la dynamique des homéomorphismes de surfaces. Soulignons tout de suite qu'il est remarquable que l'on puisse étudier des homéomorphismes d'un point de vue dynamique, sans aucune hypothèse de régularité, et que cette situation ne persiste pas en dimension supérieure. On peut dire, en quelque sorte, que la dimension 2 possède une "rigidité topologique" qui lui est propre. Malgré cela, il existe une littérature abondante sur le sujet, qui remonte au début du vingtième siècle. Parmi les problèmes abordés très tôt, l'étude des points fixes, ou plus généralement des points périodiques, est sans doute le plus naturel. On peut citer le classique théorème de Poincaré-Birkhoff, issu des travaux de Poincaré en mécanique céleste, ou encore le théorème de translation plane de Brouwer. Une autre question essentielle a été attaquée précocément, et avec succès: celle de la classification des homéomorphismes de surfaces. Ainsi les travaux de Brouwer, Kerékjártó puis Nielsen contiennent l'essentiel de la classification à conjugaison près des homéomorphismes *périodiques* des surfaces compactes. Dans le cas général, il faut renoncer à des résultats aussi définitifs mais Nielsen a par ailleurs initié une classification à isotopie près, redécouverte et approfondie par W. Thurston dans les années 1970.

Ce type de problèmes et les travaux classiques que l'on vient d'évoquer rapidement ont continué de susciter l'intérêt jusqu'à aujourd'hui. Nous verrons ainsi que l'on continue de donner de nouvelles variantes du théorème de Poincaré-Birkhoff et de développer la théorie de Brouwer des homéomorphismes du plan. La théorie de Nielsen-Thurston a engendré à elle seule toute une littérature concernant, entre autres, la persistance des orbites périodiques par isotopie ou la coexistence d'orbites périodiques. Rappelons

finalement, à propos des points fixes et périodiques des homéomorphismes hamiltoniens, la résolution récente, dans le cas des surfaces, de la conjecture d'Arnold suite aux travaux de A. Floer ([23]), J. Franks ([29]), S. Matsumoto ([54]) et J.C. Sikorav ([61], ainsi que de la conjecture de Conley par Franks et M. Handel ([31]) et P. Le Calvez ([48, 49]).

Ce texte est divisé en trois parties. J'y expose les résultats des articles [B1] à [B5] de la bibliographie. Toutes les autres références sont numérotées par un entier [n].

- La première partie (Section 2) concerne l'indice de point fixe des homéomorphismes de surfaces. J'expose les résultats de [B1, B2] et d'une petite partie de [B3]. L'article [B1] traite d'une notion assez technique mais possédant des applications intéressantes, la mise en position canonique d'un homéomorphisme autour d'un point fixe isolé. On s'intéresse ensuite au cas d'un homéomorphisme qui renverse l'orientation. Je présente alors l'article [B2] établissant que l'indice de point fixe ne peut prendre que les trois valeurs  $0, \pm 1$  puis je donne un critère simple, extrait de [B3], assurant l'existence de la suite des indices des itérés.

- La deuxième partie (Section 3) est constituée de l'essentiel de l'article [B3] et de [B4]; elle est consacrée aux homéomorphismes de la sphère  $S^2$  qui renversent l'orientation. Nous verrons que la présence ou l'absence d'une orbite périodique de période (minimale) 2 est décisive pour ce qui concerne les propriétés dynamiques de l'homéomorphisme. Le principal théorème de [B3] peut se regarder comme un analogue du théorème de translation plane de Brouwer. On peut l'énoncer de façon informelle en disant que, pour un homéomorphisme de la sphère renversant l'orientation, toute forme de récurrence dans le complémentaire de l'ensemble des points fixes impose l'existence d'une orbite périodique de période 2. En particulier la présence d'une orbite périodique  $\mathcal{O}$  de période  $k \geq 3$  implique qu'il existe une orbite périodique  $\mathcal{O}'$  de période 2. L'article [B4] est une incursion dans la théorie de Nielsen établissant que, en un certain sens, l'orbite  $\mathcal{O}'$  peut être choisie enlacée avec  $\mathcal{O}$ .

- J'expose dans la troisième et dernière partie (Section 4) les résultats de [B5]. Cet article propose une variation sur le théorème de Poincaré-Birkhoff dans une nouvelle direction: on montre qu'il existe des résultats proches de ce théorème classique dans la classe d'isotopie de la symétrie qui permute les deux composantes du bord de l'anneau compact  $A = S^1 \times [-1, 1]$ . A nouveau, on peut présenter ces résultats de façon informelle en écrivant qu'un homéomorphisme conservatif dans cette classe d'isotopie satisfaisant de plus une hypothèse de "twist" possède nécessairement une orbite périodique de période (minimale) 2. Nous donnons deux théorèmes précisant cette idée.

2. AUTOUR DE LA NOTION D'INDICE D'UN POINT FIXE

**2.1. Indice de Lefschetz.** Pour une large classe d'espaces topologiques (en particulier pour les variétés topologiques), on sait définir l'*indice de Lefschetz* d'une application continue  $\varphi : U \rightarrow X$  où  $U$  est un ouvert de  $X$  et où l'ensemble  $\text{Fix}(\varphi)$  des points fixes de  $\varphi$  est supposé compact; voir par exemple [21] pour une théorie générale. Cet indice à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  possède de nombreuses propriétés; en particulier  $\text{Fix}(\varphi)$  est non vide dès que l'indice de  $\varphi$  est non nul. Dans le cadre de la dimension 2, il s'interprète de façon très intuitive. Considérons une application continue  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  où  $V \subset \mathbb{R}^2$  contient l'adhérence  $\overline{U}$  d'un domaine de Jordan <sup>1</sup>  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Si  $f$  est sans point fixe sur la frontière  $\partial U$  de  $U$ , alors l'indice de  $\varphi = f|_U$  n'est rien d'autre que le degré de l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \frac{f(u(t)) - u(t)}{\|f(u(t)) - u(t)\|} \end{aligned}$$

où  $u$  est une paramétrisation de la courbe de Jordan  $\partial U$  dans le sens direct. On dit aussi que c'est l'indice de  $f$  sur  $U$  ou sur  $\partial U$  et on le note  $\text{Ind}(f, U)$  ou  $\text{Ind}(f, \partial U)$ . Ainsi  $\text{Ind}(f, U)$  est simplement le nombre de tours effectués par le vecteur  $v(z) = f(z) - z$  lorsque  $z$  parcourt  $\partial U$ . Si maintenant  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $p$  un point fixe isolé de  $f$ , l'indice de  $f$  est le même sur tout domaine de Jordan  $U \subset \mathbb{R}^2$  vérifiant  $p \in U \subset \overline{U} \subset V$  et  $\text{Fix}(f) \cap \overline{U} = \{p\}$ . Cette valeur commune est appelée l'indice (de Lefschetz) du point  $p$  et se note  $\text{Ind}(f, p)$ .

**2.1.1. Une famille de modèles.** Il est bien connu que pour chaque entier  $n \in \mathbb{Z}$  il existe un homéomorphisme  $h_n$  du plan  $\mathbb{R}^2$  possédant l'origine  $o$  comme unique point fixe et tel que  $\text{Ind}(h_n, o) = n$ . On peut obtenir les  $h_n$  de la façon suivante.

- $h_1$  est une homothétie de rapport  $\lambda \neq 1$ ;
- pour  $n \geq 2$ ,  $h_n$  est le temps 1 du flot construit en collant  $2(n - 1)$  copies d'un "secteur hyperbolique" (voir figure 1 pour  $n = 2$  et 3).
- pour  $n \leq 0$ ,  $h_n$  est le temps 1 du flot construit en collant  $2(1 - n)$  copies d'un "secteur elliptique" (voir figure 1 pour  $n = 0$  et  $-1$ ).

Remarquons que tous ces  $h_n$  préservent l'orientation puisqu'ils sont les temps 1 de flots.

**2.2. Mise en position canonique autour d'un point fixe.**

---

<sup>1</sup>Dans ce texte, une *courbe de Jordan* est une partie d'une surface qui est homéomorphe à un cercle. On utilisera l'expression *domaine de Jordan* pour désigner la composante connexe *bornée* du complémentaire d'une courbe de Jordan  $J \subset \mathbb{R}^2$  mais aussi pour désigner une composante connexe du complémentaire d'une courbe de Jordan  $J \subset \mathbb{S}^2$ . Pour éviter une éventuelle ambiguïté liée à l'inclusion  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , on écrira  $U \subset \mathbb{R}^2$  ou  $U \subset \mathbb{S}^2$  pour préciser si l'on utilise la première ou la seconde définition. Le contexte suffit en fait pour éviter toute confusion.

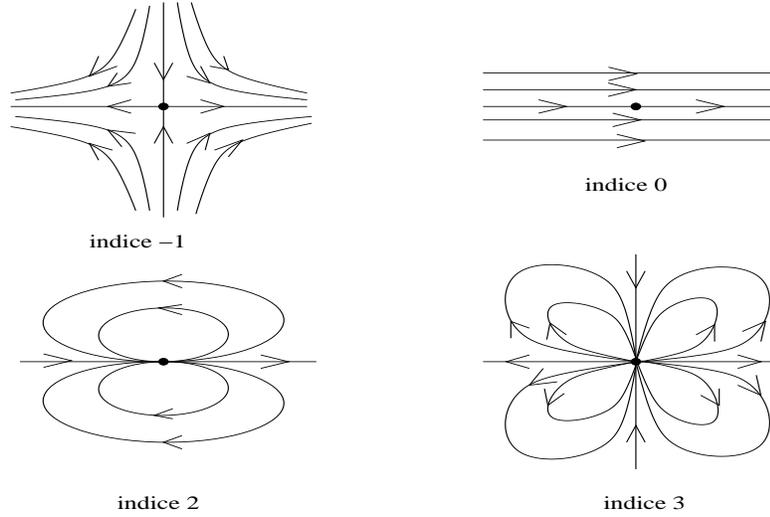


FIGURE 1. Flots donnant les modèles d'indice -1,0,2 et 3

2.2.1. *Motivation.* De façon informelle, mettre en position canonique un homéomorphisme  $h$  autour d'un point fixe isolé  $p$  consiste à le perturber pour obtenir, sur un cercle entourant  $p$ , une situation modèle qui ne dépend que de l'indice  $\text{Ind}(h, p)$ . Nous donnerons plus loin une définition précise. Un tel procédé a été utilisé pour obtenir des résultats intéressants sur les homéomorphismes de surfaces mais sans avoir reçu de preuve entièrement satisfaisante. L'idée de ce résultat de perturbation semble due à B. Schmitt qui considère dans [59] l'ensemble  $\mathcal{H}_n$  des homéomorphismes  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation, fixant uniquement l'origine  $o$  et vérifiant  $\text{Ind}(h, o) = n$ . Il est assez naturel de chercher à savoir si l'on peut passer continûment d'une dynamique de  $\mathcal{H}_n$  à une autre. Schmitt résout exactement ce problème.

**Théorème 2.1** (B. Schmitt, [59]). *Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , l'ensemble  $\mathcal{H}_n$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est connexe par arcs.*

Cependant sa démonstration est très difficile à suivre et est en fait reconnue comme fautive (voir [8] ou [9] pour une discussion plus détaillée). En s'appuyant sur l'article de Schmitt, M. Brown utilise cette notion de mise en position canonique pour étudier l'indice de point fixe des itérés d'un homéomorphisme:

**Théorème 2.2** (M. Brown, [14]). *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et possédant l'origine  $o$  comme unique point fixe. Si  $\text{Ind}(h, o) \neq 1$  alors  $\text{Ind}(h^n, o)$  est bien défini et égal à  $\text{Ind}(h, o)$  pour tout entier  $n \neq 0$ .*

Mentionnons que Le Calvez ([45]) puis F. Le Roux ([53]) ont redémontré ce théorème avec d'autres méthodes. Rappelons que si l'indice de  $o$  est égal

à 1, la suite  $(\text{Ind}(h^k, o))_{k \geq 1}$  peut ne pas être définie (considérer une rotation périodique) et, lorsqu'elle est définie, peut ne pas être constante: un tel exemple s'obtient en composant un homéomorphisme modèle  $h_n$  ( $n \leq -1$  ou  $n \geq 3$ ) avec une rotation d'angle  $2\pi/|n-1|$ , qui envoie chaque branche stable (resp. instable) du flot définissant  $h_n$  sur la suivante. L'indice  $\text{Ind}(h^k, o)$  vaut alors  $n$  pour les entiers  $k$  multiples de  $|n-1|$  et vaut 1 pour tous les autres entiers. On déduit cependant du théorème 2.2 que la suite  $(\text{Ind}(h^k, o))_{k \geq 1}$  prend au plus une valeur différente de 1. Plus précisément, Le Calvez obtient dans [45] la description suivante: si  $h$  est un germe d'homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation au voisinage d'un point fixe  $o$  et si la suite  $(\text{Ind}(h^n, o))_{n \geq 1}$  est bien définie, alors il existe deux entiers  $q \geq 1$  et  $r \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\text{Ind}(h^n, o) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \notin q\mathbb{Z}, \\ r & \text{si } n \in q\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Après Schmitt, S. Pelikan et E.E. Slaminka donneront leurs propres versions de cette mise en position canonique dans plusieurs articles ([55, 62, 63]). Un de leurs résultats relie la valeur de l'indice du point fixe aux propriétés conservatives de l'homéomorphisme:

**Théorème 2.3** (S. Pelikan et E. E. Slaminka, [55]). *Soit  $h : M^2 \rightarrow M^2$  un homéomorphisme préservant l'aire et l'orientation d'une surface orientable  $M^2$ . Si  $p$  est un point fixe isolé de  $h$  alors  $\text{Ind}(h, p) \leq 1$ .*

On peut aussi citer le théorème suivant de Slaminka qui exprime que l'on peut "effacer" un point fixe d'indice 0 dans la classe des homéomorphismes de surfaces préservant l'aire et dont l'auteur donne plusieurs applications.

**Théorème 2.4** (E. E. Slaminka, [63]). *Soit  $h : M^2 \rightarrow M^2$  un homéomorphisme préservant l'aire et l'orientation d'une surface orientable  $M^2$  et possédant un point fixe isolé  $p$  d'indice 0. Pour tout voisinage  $N$  de  $p$  tel que  $N \cap \text{Fix}(h) = \{p\}$ , il existe un homéomorphisme  $\hat{h} : M^2 \rightarrow M^2$  préservant l'aire et tel que*

- (i)  $\hat{h} = h$  sur  $M^2 \setminus N$ ,
- (ii)  $\hat{h}$  n'a pas de point fixe dans  $N$ .

A nouveau, ces travaux restent plus ou moins incomplets mais un obstacle à la mise en position canonique autour d'un point fixe d'indice 1 apparaît clairement pour la première fois dans [63]: l'auteur utilise une version du lemme de Brouwer affirmant que pour un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et sans courbe de Jordan d'indice 1, l'ensemble non-errant  $\Omega(h)$  est réduit à l'ensemble des points fixes (voir Section 3). Intéressé par d'autres applications à la topologie de l'espace des homéomorphismes de Brouwer (i.e. des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  qui préservent l'orientation et sont sans point fixe) j'avais complété dans ma thèse [8] (voir aussi [9]) les arguments manquants de [63]. Le but de l'article [B1], écrit peu après [8], est donc de traiter le cas d'indice 1 qui restait en suspens et qui est en fait le

plus difficile puisque c'est le seul où une dynamique récurrente est possible au voisinage du point fixe. Notons que les preuves des théorèmes 2.3 et 2.4 proposées dans [55] et [63] nécessitent en fait des versions *conservatives* de la mise en position canonique, ce qui les rend plus délicates. Ce problème n'est pas abordé dans [8, 9, B1], de sorte que le théorème 2.4 ne semble pas encore clairement démontré. Le théorème 2.3 a quant à lui été retrouvé et amélioré (avec d'autres arguments) par Le Calvez ([44, 45]) et par Le Roux ([53]). En particulier, on sait maintenant que si un homéomorphisme de surface  $h$  possède un point fixe  $p$  d'indice  $\geq 2$ , alors tout voisinage de  $p$  contient la demi-orbite  $\{h^n(U)\}_{n \geq 0}$  d'un ouvert  $U$  tel que les  $h^n(U)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont deux à deux disjoints (voir [44] ou [45]), ce qui empêche bien sûr  $h$  de préserver une aire localement finie. On pourra trouver dans [53] une description plus précise en termes de pétales attractifs et répulsifs. A ma connaissance, le lemme de mise en position canonique reste indispensable pour prouver le théorème 2.1 de même que pour effacer les points fixes d'indice 0 comme dans le théorème 2.4 (avec ou sans la contrainte supplémentaire de préservation de l'aire).

2.2.2. *Les résultats de [B1].* Considérons un point fixe isolé  $p$  d'un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  qui préserve l'orientation et un disque topologique fermé  $D$  contenant  $p$  dans son intérieur et tel que  $D \cap \text{Fix}(h) = \{p\}$ . On dit que  $h$  est *en position canonique* sur la courbe de Jordan  $C = \partial D$  s'il existe un homéomorphisme  $H$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que

$$H(C) = \mathbb{S}^1 \text{ et } h|_C = H^{-1} \circ h_n \circ H|_C,$$

où  $n = \text{Ind}(h, p)$  et où  $h_n$  est un homéomorphisme modèle évoqué au paragraphe 2.1.1 (cette définition est équivalente à la définition 3.2 de [B1]): voir figure 2. Soient maintenant deux homéomorphismes  $h$  et  $h'$  de  $\mathbb{R}^2$ . Suivant Brown ([13]), nous dirons que  $h'$  est une *modification libre* [**free modification**] de  $h$  s'il existe une suite finie  $h_1 = h, \dots, h_n = h'$  d'homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  tels que, pour tout  $i = 1, \dots, n-1$  on ait  $h_{i+1} = \varphi_i \circ h_i$  (ou  $h_{i+1} = h_i \circ \varphi_i$ ) où  $\varphi_i$  est à support dans une réunion  $\coprod_j D_{i,j}$  de disques topologiques fermés  $D_{i,j}$  deux à deux disjoints et vérifiant  $h_i(D_{i,j}) \cap D_{i,j} = \emptyset$ . Dans ce cas,  $h$  et  $h'$  ont exactement les mêmes points fixes et le même indice sur toute courbe de Jordan évitant ces points fixes; on passe en effet de  $h$  à  $h'$  par un chemin d'homéomorphismes ayant tous les mêmes points fixes en utilisant une isotopie d'Alexander dans chaque disque  $D_{i,j}$ .

Le résultat principal de [B1] peut alors s'énoncer ainsi:

**Théorème 2.5.** [B1, Theorem 3.4] *Soient  $p$  un point fixe isolé d'un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation,  $C$  un cercle entourant  $p$  et bordant un disque  $D$  tel que  $D \cap \text{Fix}(h) = \{p\}$ . Alors il existe une modification libre  $h'$  de  $h$  et une courbe de Jordan  $C'$  bordant un disque topologique fermé  $D' \subset D$  tel que*

- (1)  $p$  est dans l'intérieur de  $D'$ ,
- (2)  $h'$  est en position canonique sur  $C'$ .

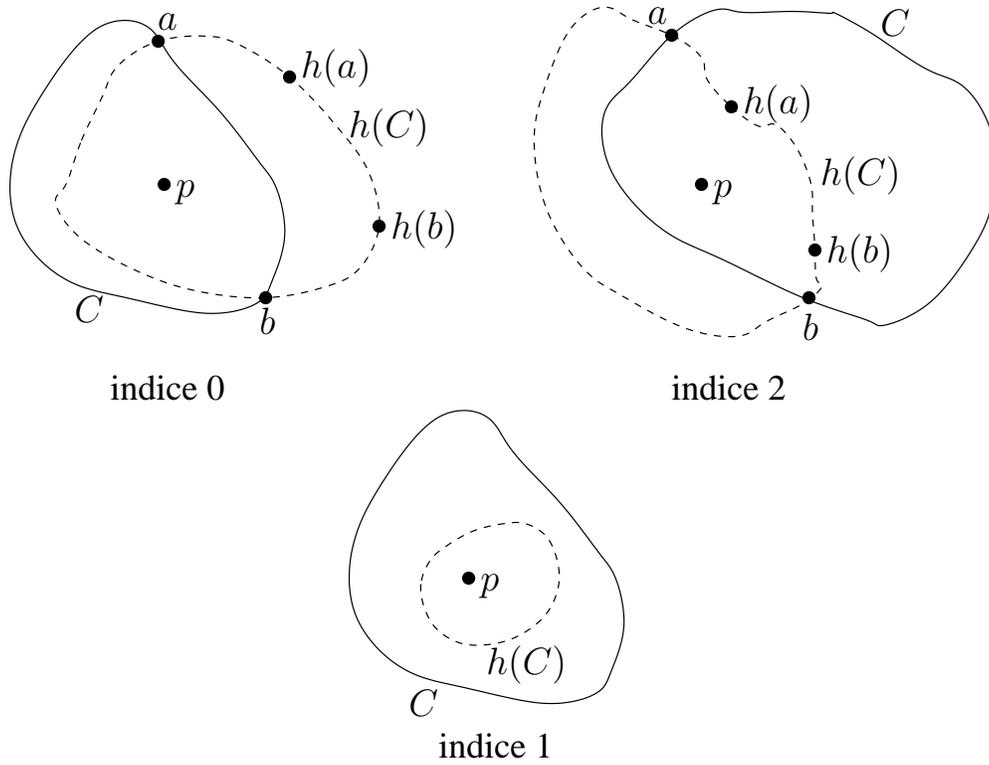


FIGURE 2. Exemples de positions canoniques sur la courbe de Jordan  $C$  entourant le point fixe  $p$

Ceci permet notamment de combler les lacunes de la preuve du théorème 2.1 de Schmitt.

Nous avons rappelé que la mise en position canonique de Slaminka utilise fortement une version du lemme de Brouwer: si un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation est sans courbe de Jordan d'indice 1, on a  $\Omega(h) = \text{Fix}(h)$ . On va maintenant expliquer la façon dont ce résultat est utilisé dans [63] (ainsi que dans [8, 9]) et pour quelles raisons on peut en fait l'éviter, ce qui est l'objet de l'article [B1]. On déduit de l'égalité  $\Omega(h) = \text{Fix}(h)$  que, pour tout disque topologique fermé  $F \subset \mathbb{R}^2$ , on a

$$F \cap \text{Fix}(h) = \emptyset \implies \bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(F) = \emptyset.$$

En effet, si la demi-orbite  $\{h^n(m)\}_{n \geq 0}$  d'un point  $m$  est contenue dans un compact  $F \subset \mathbb{R}^2$  disjoint de  $\text{Fix}(h)$ , alors tout point d'accumulation de cette suite appartient à  $\Omega(h)$  mais pas à  $\text{Fix}(h)$ . Cette implication est un point crucial dans la construction des perturbations  $\varphi_i$  ci-dessus: elle permet d'obtenir une modification libre  $h'$  de  $h$  et un disque  $D'$  voisinage du point

fixe  $p$  tel que  $h'(D') \cap D'$  soit connexe, ce qui est le point posant les problèmes les plus sérieux depuis les travaux de Schmitt.

On remarque dans [B1] qu'il suffit en fait d'obtenir cette implication pour certains disques topologiques et que l'on peut alors s'affranchir du lemme de Brouwer en utilisant des résultats plus fins de topologie plane. Précisément, on démontre le résultat le suivant:

**Théorème 2.6.** [B1, Theorem 2.1] *Soient  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  (préservant ou renversant l'orientation) et  $D \subset \mathbb{R}^2$  un disque topologique fermé. On suppose que la frontière de  $D$  s'écrit comme la réunion de deux arcs  $\alpha$  et  $\beta$  qui ne se rencontrent qu'en leurs extrémités  $a, b$  et que  $D \cap h^{-1}(\beta) = \emptyset = h^{-1}(D) \cap \alpha$  (voir figure 3). Alors, si  $\bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(D) \neq \emptyset$ , il existe un point  $m \in D$  tel que  $h(m) \in D$  et  $h^2(m) = m$ . De plus, si  $h$  préserve l'orientation, on peut choisir  $m$  tel que  $m = h(m)$ .*

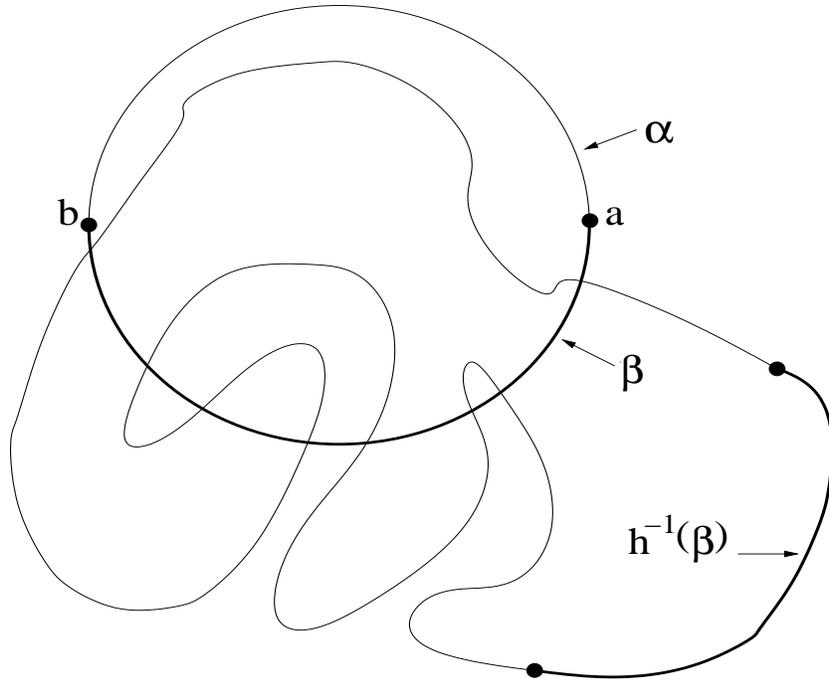


FIGURE 3. Un disque satisfaisant les hypothèses du théorème 2.6

La preuve du théorème 2.6 consiste à ordonner convenablement les composantes connexes de l'ensemble  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} h^{-n}(D)$  pour en trouver une, que l'on note  $C$ , qui vérifie  $h^2(C) \subset C$  et même  $h(C) \subset C$  quand  $h$  préserve l'orientation. Le théorème de Cartwright-Littlewood ([18]) appliqué à  $K = \bigcap_{n \geq 0} h^{2n}(C)$  ou à  $K = \bigcap_{n \geq 0} h^n(C)$  permet de conclure. Rappelons que le théorème de Cartwright-Littlewood affirme que tout homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et admettant un compact connexe non séparant

globalement invariant  $K$  possède un point fixe dans  $K$ . Ce résultat peut aussi se déduire du lemme de Brouwer (voir [12, 40]) et a été généralisé par H. Bell ([2]) à tous les homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.3. L'indice de point fixe pour les homéomorphismes renversant l'orientation.

2.3.1. *Valeurs de l'indice.* On démontre dans [B2] le résultat suivant.

**Théorème 2.7.** *Soient  $V, W$  deux ouverts connexes de  $\mathbb{R}^2$  contenant l'origine  $o$  et  $h : V \rightarrow W = h(V)$  un homéomorphisme renversant l'orientation et pour lequel  $o$  est un point fixe isolé. Alors  $\text{Ind}(h, o) \in \{-1, 0, 1\}$ .*

Ceci avait été annoncé sans preuve par Brown dans [14] et doit bien sûr être opposé au fait que, pour un homéomorphisme préservant l'orientation, toute valeur entière de l'indice est possible. Esquibsons maintenant la démonstration de ce théorème. On peut exprimer l'indice du point  $o$  suivant une relation de la forme

$$\text{Ind}(h, o) = 1 - \sum_{j \in I} \text{Ind}(H, C_j)$$

où les  $C_j$  sont des courbes de Jordan cycliquement ordonnées autour de  $o$  et où  $H$  est une fonction dont l'indice sur chaque  $C_j$  vaut, de façon standard, 0 ou 1. Les courbes  $C_j$  sont obtenues à l'aide d'un résultat classique de Kerékjártó affirmant que toute composante connexe de l'intersection de deux domaines de Jordan  $U, U' \subset \mathbb{R}^2$  est encore un domaine de Jordan, résultat dont Le Calvez et J.C. Yoccoz ont donné dans [52] une présentation moderne adaptée à notre propos. En choisissant  $U' = h^{-1}(U)$ , où  $U$  est un petit disque ouvert de centre  $o$ , on obtient que la composante connexe de  $U \cap U'$  qui contient  $o$  est aussi un domaine de Jordan; sa frontière, notée  $\partial U \wedge \partial U'$ , est donc une courbe de Jordan et vérifie

$$(\partial U \wedge \partial U') \cap U = \bigcup_{j \in J} \beta_j$$

où les  $\beta_j$  sont des composantes connexes de  $\partial U' \cap U = h^{-1}(\partial U) \cap U$  cycliquement ordonnées autour de  $o$  ( $J$  est un ensemble fini ou dénombrable). On obtient les courbes de Jordan  $C_j$  en posant  $C_j = \overline{\beta_j} \cup \phi(\overline{\beta_j})$  où  $\phi$  est une inversion par rapport au cercle  $\partial U$  (voir figure 4). La fonction  $H$  est définie sur  $(\partial U \wedge \partial U') \cup \phi(\partial U \wedge \partial U')$  par

$$H(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \partial U \wedge \partial U, \\ h(\phi(z)) & \text{si } z \in \phi(\partial U \wedge \partial U'). \end{cases}$$

De cette façon, on a  $H(C_j) = h(\overline{\beta_j}) \subset \partial U$  et l'indice  $\text{Ind}(H, C_j)$  se calcule facilement en examinant la position de l'arc  $h(\overline{\beta_j})$  par rapport à  $C_j$ . En effet, (après avoir éventuellement remplacé  $h$  par  $h^{-1}$ ) on peut se ramener à la situation idéale où chaque arc  $h(\overline{\beta_j})$  est contenu dans l'intérieur de  $C_j$  (cas d'indice 1) ou dans l'extérieur de  $C_j$  (cas d'indice 0). Un autre argument,

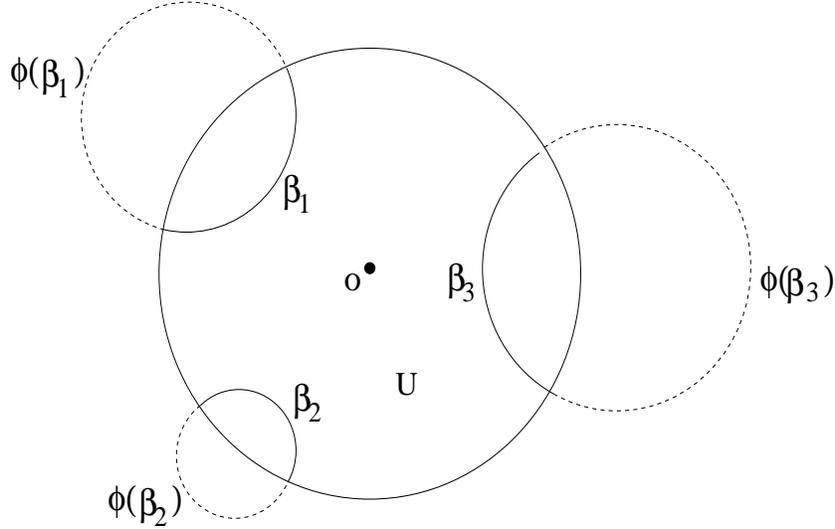


FIGURE 4. Le disque  $U$  et les courbes de Jordan  $C_j = \overline{\beta_j} \cup \phi(\overline{\beta_j})$

bien que très simple, joue un rôle essentiel: toute application d'un ensemble cycliquement ordonné dans lui-même qui renverse l'ordre cyclique possède 0, 1 ou 2 points fixes. Ceci explique pour une large part qu'il y ait au plus trois indices  $j$  tels que  $\text{Ind}(H, C_j) = 1$  et permet de conclure.

**Remarques et questions.** Pour chaque entier  $k \in \{0, \pm 1\}$  on trouve facilement un homéomorphisme  $h_k$  de  $\mathbb{R}^2$  renversant l'orientation, vérifiant  $\text{Fix}(h) = \{o\}$  et  $\text{Ind}(h_k, o) = k$ , et se comportant très simplement autour de  $o$ ; par exemple

$$\begin{aligned} h_{-1}(x, y) &= \lambda(x, -y) \text{ avec } \lambda > 1, \\ h_0(x, y) &= (x, -y) + \frac{1}{2}(\|(x, y)\|, 0), \\ h_1(x, y) &= \lambda(x, -y) \text{ avec } 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

peuvent servir de modèles. Il serait intéressant de savoir si l'on peut aussi obtenir une mise en position canonique pour les homéomorphismes  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  qui renversent l'orientation. En cas de réponse positive, on obtiendrait un résultat analogue au théorème de Schmitt (théorème 2.1) et l'on pourrait aussi effacer les points fixes d'indice 0. Le théorème 2.6 ne permet pas de reprendre ce qui est fait dans le cadre des homéomorphismes préservant l'orientation pour traiter le cas d'un homéomorphisme qui renverse l'orientation. En effet, il n'exclut pas la possibilité d'avoir simultanément  $D \cap \text{Fix}(h) = \emptyset$  et  $\bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(D) \neq \emptyset$  lorsque l'homéomorphisme  $h$  renverse l'orientation. Néanmoins, si cette situation se produit, le disque  $D$  contient une orbite périodique de période 2 et l'on pourrait donc penser se limiter d'abord au cas où  $h$  n'a pas de point de période 2 (ce qui est aussi une hypothèse naturelle au vu du théorème 2.8 ci-dessous). Cependant il n'est pas clair qu'une suite  $h_1 = h, h_2, \dots, h_n = h'$  comme celle menant au

théorème 2.5 puisse être construite de telle façon que cette propriété persiste pour chaque homéomorphisme  $h_i$ ,  $i \geq 2$ .

2.3.2. *Suite des indices des itérés.* Etant donnée une application continue  $h$  possédant un point fixe isolé  $o$ , il est naturel de s'interroger sur la suite des indices des itérés  $h^n$  au point  $o$ . Cette suite est-elle bien définie, autrement dit  $o$  est-il point fixe isolé de chaque  $h^n$ ,  $n \geq 1$ ? Cette suite a-t-elle des propriétés remarquables, en particulier est-elle bornée ou même périodique? De telles questions ont été abordées dans d'autres cadres que celui des homéomorphismes de surfaces; notamment M. Shub et D. Sullivan ([60]) ont montré que pour une application  $h$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^k$  dans lui-même, la suite  $(\text{Ind}(h^n, o))_{n \geq 1}$ , est bornée dès lors qu'elle est bien définie. Ils ont aussi souligné que ce résultat ne persiste pas sans l'hypothèse de régularité. En dimension 2, le théorème 2.2 de Brown (et ses extensions par Le Calvez et Le Roux) montre que l'on peut obtenir des résultats de cette nature dans la classe des homéomorphismes.

J'ai montré dans [B3] le résultat suivant:

**Théorème 2.8.** [B3, Theorem 4.3] *Soient  $V, W$  deux ouverts connexes de  $\mathbb{R}^2$  contenant l'origine  $o$  et  $h : V \rightarrow W = h(V)$  un homéomorphisme renversant l'orientation et pour lequel  $o$  est un point fixe isolé. La suite  $(\text{Ind}(h^n, o))_{n \geq 1}$  est bien définie si et seulement si le second terme  $\text{Ind}(h^2, o)$  est défini.*

Ceci est une version locale d'un autre théorème de [B3] affirmant que, pour un homéomorphisme renversant l'orientation de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , la présence d'une orbite périodique de période  $k \geq 3$  implique l'existence d'une orbite périodique de période 2 (voir Section 3.1). On remarquera que, contrairement au cas où  $h$  préserve l'orientation, les valeurs de l'indice n'interviennent pas dans cet énoncé.

**Commentaires sur la suite  $(\text{Ind}(h^n, o))_{n \geq 1}$  du théorème 2.8.**

En s'appuyant sur le théorème 2.7 et sur des propriétés arithmétiques fines de l'indice de Lefschetz (les formules de congruence de Dold), G. Graff et P. Nowak-Przygodzki ont obtenu dans [35] le résultat suivant: si  $h : V \rightarrow W$  est un homéomorphisme comme dans le théorème 2.7 et si la suite  $(\text{Ind}(h^n, o))_{n \geq 1}$  est bien définie, alors la sous-suite  $(\text{Ind}(h^{2n+1}, o))_{n \geq 0}$  des indices des itérés impairs est constante. En fait, et bien que cela n'apparaisse pas explicitement dans la littérature d'aujourd'hui, il est vraisemblable que l'on puisse adapter les techniques de [45] pour montrer que les deux sous-suites  $(\text{Ind}(h^{2n+1}, o))_{n \geq 0}$  et  $(\text{Ind}(h^{2n}, o))_{n \geq 1}$  sont constantes. Donnons quelques arguments dans cette direction. Dans le cas où  $\{o\}$  est un ensemble invariant localement maximal (i.e.  $\{o\} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} h^{-n}(\overline{U})$  pour un domaine de Jordan  $U \subset \mathbb{R}^2$  assez petit contenant  $o$ ) ce résultat se trouve dans l'article [57] de F. R. Ruiz Del Portal et J. M. Salazar et est aussi implicite dans [52]. Comme l'a montré Le Calvez dans [45], on peut utiliser les résultats obtenus dans ce cas particulier pour traiter le cas général en éclatant le point fixe  $o$  à l'aide de la théorie des bouts premiers de Carathéodory. Il pourrait être

intéressant de vérifier dans les détails que cette démarche conduit à nouveau au résultat attendu.

### 3. SUR LES HOMÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE RENVERSANT L'ORIENTATION

#### 3.1. Un analogue de la théorie de Brouwer.

3.1.1. *Rappels sur la théorie de Brouwer.* La théorie de Brouwer traite des homéomorphismes  $h$  du plan  $\mathbb{R}^2$  qui préservent l'orientation. On énonce souvent différentes versions, plus ou moins précises, par exemple de la façon suivante:

- Si  $h$  admet une orbite périodique de période  $k \geq 2$  alors  $h$  possède au moins un point fixe.
- Si l'ensemble  $\text{Fix}(h)$  des points fixes de  $h$  est vide, alors il en est de même de l'ensemble non errant  $\Omega(h)$ .
- Théorème de translation plane de Brouwer: Si  $\text{Fix}(h) = \emptyset$ , il existe pour tout  $m \in \mathbb{R}^2$  un plongement topologique  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que
  - $m \in \varphi(\mathbb{R}^2)$ ,
  - $h \circ \varphi = \varphi \circ \tau$  où  $\tau$  est la translation  $\tau(x, y) = (x + 1, y)$ ,
  - $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(\{x\} \times \mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

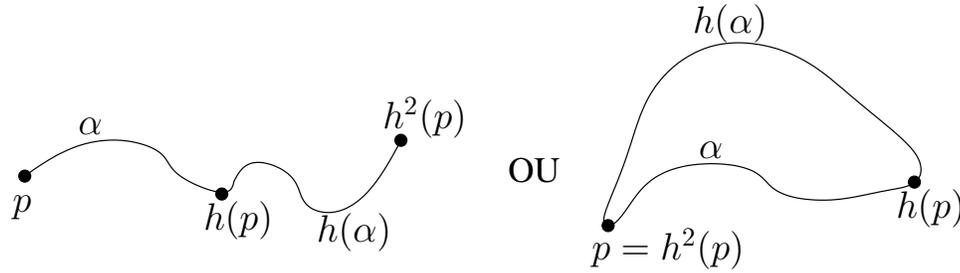
Chaque ensemble  $\varphi(\{x\} \times \mathbb{R})$  est une *droite de Brouwer*, c'est à dire une droite topologique proprement plongée dans le plan<sup>2</sup> qui sépare ses images par  $h^{-1}$  et  $h$ . Réciproquement, la donnée d'une droite de Brouwer passant par  $m$  permet de construire, à l'aide du théorème de Schoenflies, un plongement  $\varphi$  comme ci-dessus. Ainsi, le théorème de translation plane peut aussi se formuler en disant que si  $h$  est sans point fixe alors tout point  $m \in \mathbb{R}^2$  appartient à une droite de Brouwer.

D'autre part, on déduit du deuxième énoncé que si  $h$  est sans point fixe alors l'orbite  $\{h^n(m)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de tout point  $m$  converge vers l'infini, ce qui fait parfois penser à une version à temps discret du théorème de Poincaré-Bendixon.

Il est clair que les trois énoncés ci-dessus sont de plus en plus forts; néanmoins, toutes les preuves connues du théorème de translation plane utilisent le premier résultat (ou une variante très proche) comme lemme intermédiaire. Pour obtenir l'existence d'un point fixe, Brouwer définit la notion d'*arc de translation*, c'est à dire un arc  $\alpha \subset \mathbb{R}^2$  joignant un point  $p$  à son image  $h(p) \neq p$  et vérifiant  $(\alpha \setminus \{h(p)\}) \cap h(\alpha \setminus \{h(p)\}) = \emptyset$  (voir figure 5). Une astuce montre que tout point  $m$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$  est contenu dans un arc de translation et on démontre alors le résultat suivant (voir [11] ou [13, 22, 37] pour des références modernes).

---

<sup>2</sup>Une *droite topologique proprement plongée dans le plan*  $\mathbb{R}^2$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^2$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ . De façon équivalente, c'est l'image d'une droite euclidienne par un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .


 FIGURE 5. Un arc de translation  $\alpha$  pour  $h$ 

**Proposition 3.1** (Lemme de Brouwer). *Soient  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et  $\alpha$  un arc de translation. Si on a  $(\alpha \setminus \{h(p)\}) \cap h^n(\alpha \setminus \{h(p)\}) \neq \emptyset$  pour un entier  $n \neq 0$ , i.e si  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(\alpha)$  n'est pas une courbe simple, alors  $h$  admet un point fixe; mieux, il existe un domaine de Jordan  $U \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $\text{Ind}(h, U) = 1$ .*

Par exemple, l'existence d'un domaine de Jordan d'indice 1 apparaît explicitement chez Brown ([13]) et dans l'article [37] de L. Guillou. Ainsi, le lemme de Brouwer reste intéressant même si l'on sait déjà que l'homéomorphisme  $h$  possède un point fixe; en particulier, on en déduit qu'il existe au moins un point fixe d'indice  $\geq 1$  si l'on suppose de plus que  $\text{Fix}(h)$  est discret. Ceci joue souvent un rôle important, voir notamment [27, 38, 45, 53]. Bien sûr, les hypothèses du lemme de Brouwer sont satisfaites lorsque l'homéomorphisme  $h$  possède un point périodique  $m$  de période au moins 2 (on fait alors passer un arc de translation par  $m$ ) mais il n'est pas difficile de voir qu'il s'applique aussi lorsque  $\text{Fix}(h) \subsetneq \Omega(h)$ . On obtient donc qu'un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et sans domaine de Jordan d'indice 1 vérifie nécessairement  $\text{Fix}(h) = \Omega(h)$ , ce qui est un argument clef dans les travaux de Slaminka sur la mise en position canonique (cf. Section 2.2)

Nous allons maintenant décrire un autre énoncé de la théorie de Brouwer, moins classique, mais jouant un rôle important dans plusieurs articles, par exemple [27, 38, 51, 46, 53]). On le nomme souvent "lemme de Franks" car il se trouve pour l'essentiel dans [27]. On peut le voir comme un intermédiaire entre le deuxième et le troisième énoncé du début de ce paragraphe.

**Proposition 3.2** (Lemme de Franks). *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui préserve l'orientation. On suppose qu'il existe une suite  $D_1, \dots, D_n$  de disques topologiques fermés vérifiant les propriétés suivantes:*

- (i)  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad D_i = D_j$  ou  $\text{Int}(D_i) \cap \text{Int}(D_j) = \emptyset$ ,
- (ii)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad h(D_i) \cap D_i = \emptyset$ ,
- (iii)  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \exists k_i \geq 1$  tel que  $h^{k_i}(D_i) \cap D_{i+1} \neq \emptyset$  et  $\exists k_n \geq 1$  tel que  $h^{k_n}(D_n) \cap D_1 \neq \emptyset$ .

Alors  $h$  possède un point fixe. Mieux, il existe un domaine de Jordan  $U \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $\text{Ind}(h, U) = 1$ .

L'énoncé de Franks ([27, Proposition 1.3]) est en fait un peu différent car il concerne des disques ouverts. La version ci-dessus, plus facile à utiliser, est due à Guillou et à Le Roux et se trouve dans [53]. On peut expliquer dans les grandes lignes la preuve de la proposition 3.2. La suite des disques  $D_i$  permet d'obtenir une "pseudo-orbite" périodique  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$ , ce qui signifie que  $x_{j+1}$  est éventuellement différent, mais néanmoins proche, de  $h(x_j)$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Plus précisément, les points  $x_{j+1}$  et  $h(x_j)$  sont ou bien égaux ou bien dans un même disque  $D_i$ . On peut alors perturber  $h$  pour transformer cette pseudo-orbite en une vraie orbite périodique de période  $k \geq 2$ . Ces perturbations sont à support dans des disques  $D_i$  qui sont disjoints de leur image par  $h$ . On en déduit que la perturbation de  $h$  a exactement les mêmes points fixes que  $h$ , et le même indice sur toute courbe de Jordan évitant ces points fixes. On est ainsi ramené au lemme de Brouwer.

Revenons finalement sur le théorème de translation plane. La preuve donnée par Brouwer a souvent été contestée et plusieurs auteurs ont donné leurs propres démonstrations. On renvoie à l'article [37] de Guillou pour des références historiques à ce sujet. Citons seulement ici Kerékjártó ([42]) pour le lien qu'il a établi avec le théorème de Poincaré-Birkhoff (voir Section 4) et Franks ([28]), Guillou ([37]), Le Calvez et A. Sauzet ([51, 58]) pour des preuves récentes. Ces deux dernières références introduisent un outil que nous allons maintenant présenter puisqu'il a été utilisé dans [B3, B5] et qui est un développement de la notion de décomposition cellulaire libre apparaissant dans l'article [24] de M. Flucher (voir aussi [37]).

**Les décompositions en briques de Le Calvez et Sauzet** ([51, 58]). Décomposer le plan en briques consiste à écrire  $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i \in I} B_i$  où les  $B_i$  sont des disques topologiques fermés dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et de telle façon que, au voisinage de tout point  $z \in \mathbb{R}^2$ , on ait l'une des trois situations de la figure 6. En conséquence, pour tout ensemble  $J \subsetneq I, J \neq \emptyset$ , la frontière de  $X = \bigcup_{i \in J} B_i$  est une collection de courbes de Jordan et de droites topologiques proprement plongées dans  $\mathbb{R}^2$ . L'idée de Le Calvez et Sauzet est de combiner cette propriété topologique avec une dynamique naturelle sur l'ensemble des briques  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$  : on pourra penser qu'une brique  $B'$  succède à une brique  $B$  si  $h(B) \cap B' \neq \emptyset$  ou plus généralement s'il existe une suite de briques  $B_0 = B, B_1, \dots, B_n = B'$  telle que  $h(B_k) \cap B_{k+1} \neq \emptyset$  pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ . Pour leur démonstration du théorème de translation plane, la propriété suivante est essentielle: si les briques  $B_i$  vérifient  $h(B_i) \cap B_i = \emptyset$  alors aucune brique ne succède à elle-même. Ceci résulte directement du lemme de Franks. On peut alors résumer la preuve dans [51] (voir aussi [58]) de la façon suivante: étant donné  $m \in \mathbb{R}^2$ , on considère une décomposition en briques de  $\mathbb{R}^2$  telle que

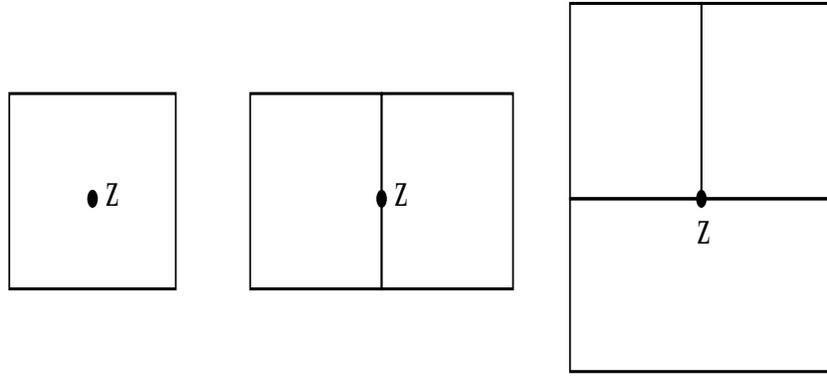


FIGURE 6. Voisinage d'un point  $z$  dans une décomposition en briques

$m$  soit dans la frontière d'une brique  $B_0$  et telle que toute brique  $B_i$  est disjointe de son image. Désignons par  $X$  la réunion de toutes les briques qui succèdent à  $B_0$ . Si cette décomposition est assez soigneusement construite près de  $B_0$ , les propriétés ci-dessus montrent que  $m$  est dans une composante connexe  $\Delta_m$  de la frontière de  $X$  et que  $\Delta_m$  est une droite de Brouwer.

On trouvera dans [B3, B5] mais aussi dans [1, 38, 46, 47, 48, 53, 58] d'autres applications et généralisations de ces idées.

**Difficultés cachées.** A priori, la description donnée par le théorème de translation plane est plutôt satisfaisante: si  $h$  est sans point fixe, on peut recouvrir le plan par des domaines de translation, c'est à dire des ouverts connexes simplement connexes invariants sur lesquels  $h$  est conjugué à une simple translation. Considérons le temps 1 du flot représenté sur la figure 7. Cet exemple, déjà remarqué par Brouwer, montre qu'il faut en général

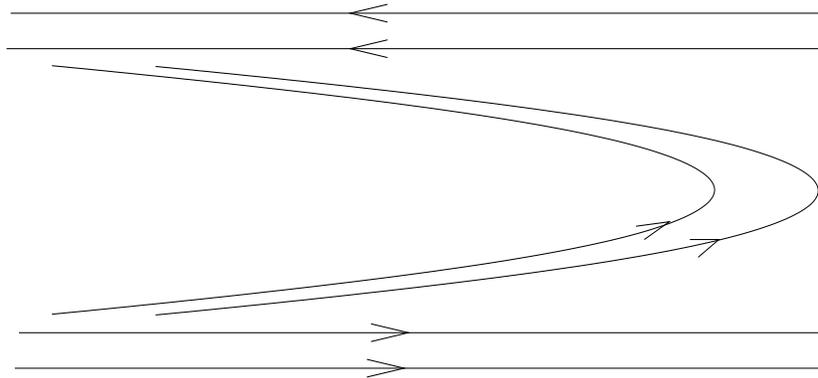


FIGURE 7. Le temps 1 de ce flot n'est pas conjugué à une translation

plusieurs domaines de translation pour recouvrir  $\mathbb{R}^2$ , autrement dit que  $h$  n'est pas toujours conjugué à une translation. Par la suite, de nombreux

auteurs ont souligné à quel point la dynamique d'un homéomorphisme de Brouwer  $h$  (i.e. un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et sans point fixe) pouvait être peu intuitive et différente de celle d'une translation. Citons, entre autres, Brown, Slaminka et W. Transue ([16]) qui donnent un exemple ne possédant aucune droite topologique proprement plongée dans  $\mathbb{R}^2$  et globalement invariante; E. W. Daw ([19]) qui construit un homéomorphisme de Brouwer n'agissant proprement discontinûment sur aucun fermé invariant non vide du plan; F. Béguin et Le Roux ([3]) qui montrent que dans la figure 7 sont cachées une infinité de classes de conjugaison, c'est à dire qu'il existe une infinité d'homéomorphismes de Brouwer préservant le feuilletage de la figure 7 et deux à deux non conjugués. De façon générale, une classification à conjugaison près des homéomorphismes de Brouwer semble hors de portée puisqu'elle se ramène à une classification topologique de surfaces *non séparées*. En effet, puisque tout point erre sous l'action d'un tel homéomorphisme  $h$ , la projection naturelle de  $\mathbb{R}^2$  sur l'espace des orbites  $\mathbb{R}^2/(h)$  est un revêtement et  $\mathbb{R}^2/(h)$  une surface; celle-ci est séparée si et seulement si  $h$  est conjugué à une translation. En outre, un autre homéomorphisme de Brouwer  $h'$  est conjugué à  $h$  ou  $h^{-1}$  si et seulement les surfaces  $\mathbb{R}^2/(h)$  et  $\mathbb{R}^2/(h')$  sont homéomorphes.

**Exemples d'applications et de développements.** Malgré les pathologies évoquées ci-dessus, la théorie de Brouwer a de nombreuses applications à la dynamique des homéomorphismes de surfaces. Donnons quelques exemples, de natures et de difficultés très différentes.

- Si un homéomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  préserve l'orientation et l'aire, alors il admet au moins deux points fixes. En effet, la formule de Lefschetz donne un premier point fixe  $p$ ; comme la restriction de  $h$  au plan  $\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$  ne peut avoir d'ouvert errant d'après l'hypothèse de conservation de l'aire, c'est qu'il existe un deuxième point fixe dans  $\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ .
- Le théorème de Cartwright-Littlewood ([18]): si un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préserve l'orientation et laisse globalement invariant un compact connexe non séparant  $K$ , alors il possède un point fixe dans  $K$ . Brown ([12]) et Hamilton ([40]) ont donné des preuves courtes de ce résultat à l'aide de la théorie de Brouwer.
- Le théorème de Poincaré-Birkhoff. Nous reviendrons plus longuement sur ce théorème important dans la Section 4; contentons-nous ici d'un énoncé un peu vague disant qu'un homéomorphisme conservatif de l'anneau compact  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  avec une propriété de twist admet au moins un point fixe. L'idée que ce résultat se déduit du théorème de translation plane est due à Kerékjártó.
- Les versions topologiques, données par Le Roux ([53]), des théorèmes de la variété stable/instable et de la fleur de Leau-Fatou.

- Les versions feuilletée ([46]) puis feuilletée équivariante ([47]) du théorème de translation plane obtenues par Le Calvez, avec de nombreuses applications ([47, 48, 49]). L' article [46] montre que l'on peut feuilletter (et non pas seulement recouvrir) le plan par des droites de Brouwer. Dans [47],  $\mathbb{R}^2$  est regardé comme le revêtement universel d'une surface  $S$  et les homéomorphismes de Brouwer considérés sont des relevés d'homéomorphismes de  $S$  isotopes à l'identité. Il est démontré que le feuilletage précédent peut être construit invariant par le groupe des automorphismes.

3.1.2. *Le cas des homéomorphismes renversant l'orientation.* On peut se demander ce qu'il reste des résultats de Brouwer si l'on s'intéresse aux homéomorphismes qui renversent l'orientation ou, ce qui revient au même sur le plan ou la sphère, aux homéomorphismes qui ne sont pas isotopes à l'identité. Dans un premier temps, on peut observer que même la forme la plus faible de la théorie ne persiste pas dans ce cadre: il est facile, pour tout entier  $k \geq 2$ , de construire un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  (ou de  $\mathbb{S}^2$ ) renversant l'orientation, sans point fixe, mais possédant un point périodique de période  $k$ . Par exemple, on peut donner explicitement un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui renverse l'orientation, ne possède aucun point fixe, mais admet de nombreux points périodiques de période 2: il suffit de poser

$$h(x, y) = (-x, y) \text{ si } |x| \geq 1 \text{ et } h(x, y) = (-x, y + 1 - |x|) \text{ si } |x| \leq 1.$$

Les analogies avec la théorie de Brouwer apparaissent en fait dès que l'on considère les points périodiques de période (minimale) égale à 2. Ainsi le premier résultat de [B3] est le suivant:

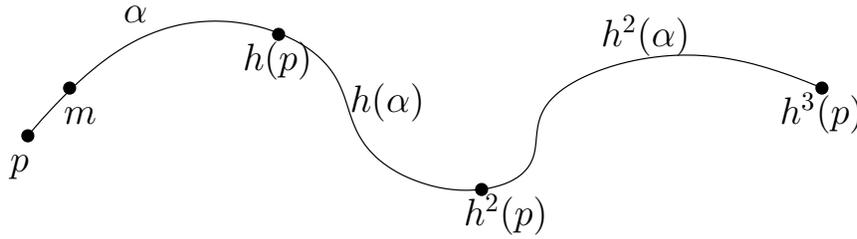
**Théorème 3.3.** [B3, Theorem 3.1] *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  qui renverse l'orientation. Si  $h$  admet un point périodique de période  $k \geq 3$  alors il possède aussi un point périodique de période 2.*

Ceci était déjà connu pour des  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes (vérifiant de plus quelques hypothèses techniques) avec une preuve de nature très différente puisque reposant sur la théorie de Nielsen-Thurston (voir [32]). On verra d'ailleurs dans la Section 3.2 un raffinement du théorème 3.3 utilisant seulement la théorie de Nielsen: en un certain sens, on peut choisir l'orbite 2-périodique enlacée avec celle de période  $k \geq 3$ . La démonstration donnée dans [B3] est purement topologique; elle consiste à trouver un domaine de Jordan  $U \subset \mathbb{S}^2$ , bordé par une courbe de Jordan  $C \subset \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h^2)$ , tel que  $\text{Ind}(h^2, U) \neq \text{Ind}(h^2, U \cap h(U))$ ; ceci assure l'existence d'un point  $z$  tel que  $z = h^2(z) \in U$  et  $h(z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \overline{U}$ . Plus précisément ce domaine de Jordan vérifie  $\text{Ind}(h^2, U) = 1$ ,  $\text{Ind}(h^2, U \cap h(U)) = 0$  et même  $\text{Ind}(h, U) = 0$ . Comme pour le lemme de Brouwer, on utilise des arcs de translation mais la situation est plus compliquée. En particulier, il est nécessaire de considérer à la fois les homéomorphismes  $h$  et  $h^2$ . On commence par montrer le lemme suivant, qui exprime que tout point  $m \neq h^2(m)$  est contenu ou bien dans

un arc de translation de  $h$  dont les itérés “ne reviennent pas trop vite”, ou bien dans un arc de translation de  $h^2$  qui est disjoint de son image par  $h$ .

**Lemme 3.4.** [B3, Lemma 2.8] *Soient  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  tel que  $h^2 \neq Id_{\mathbb{S}^2}$  et  $m$  un point dans  $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h^2)$ . Alors au moins l’une des deux affirmations suivantes est vraie.*

- A1 : *Il existe un arc de translation  $\alpha$  pour  $h$ , d’extrémités  $p$  et  $h(p)$ , tel que  $\alpha \cap h(\alpha) = \{h(p)\}$ ,  $\alpha \cap h^2(\alpha) = \{p\} \cap \{h^3(p)\}$  et  $m \in \alpha \setminus \{p, h(p)\}$  (voir figure 8).*
- A2 : *Il existe un arc de translation  $\beta$  pour  $h^2$ , d’extrémités  $q$  et  $h^2(q)$ , tel que  $\beta \cap h(\beta) = \emptyset$  et  $m \in \beta \setminus \{q, h^2(q)\}$  (voir figure 9).*



$p = h^3(p)$  éventuellement

FIGURE 8. Un arc de translation  $\alpha$  pour  $h$  donné par l’affirmation A1 du lemme 3.4

Les deux prochaines propositions jouent alors un rôle analogue au lemme de Brouwer et prouvent le théorème 3.3.

**Proposition 3.5.** [B3, Proposition 3.2] *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  renversant l’orientation. On suppose qu’il existe un arc de translation  $\alpha$  pour  $h$ , d’extrémités  $p$  et  $h(p)$ , tel que*

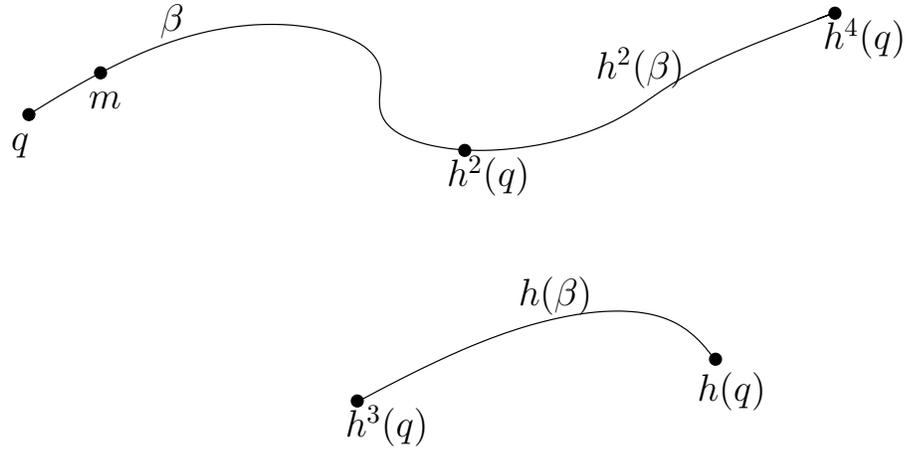
- $\alpha \cap h(\alpha) = \{h(p)\}$  et  $\alpha \cap h^2(\alpha) = \{p\} \cap \{h^3(p)\}$ ,
- $\alpha \cap h^k(\alpha) \neq \emptyset$  pour un entier  $k \geq 2$ , i.e. l’ensemble  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} h^k(\alpha)$  n’est pas une courbe simple.

Alors il existe un domaine de Jordan  $U \subset \mathbb{S}^2$  comme annoncé ci-dessus.

**Proposition 3.6.** [B3, Proposition 3.7] *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  renversant l’orientation. On suppose qu’il existe un arc de translation  $\beta$  pour  $h^2$ , d’extrémités  $q$  et  $h^2(q)$ , tel que*

- $\beta \cap h(\beta) = \emptyset$ ,
- on a  $q = h^4(q)$  ou  $h^k(\beta) \cap \beta \neq \emptyset$  pour un entier  $k \geq 3$ , i.e. les ensembles  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} h^{2i}(\beta)$  et  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} h^{2j+1}(\beta)$  ne sont pas deux courbes simples disjointes.

Alors il existe un domaine de Jordan  $U \subset \mathbb{S}^2$  comme annoncé ci-dessus.



$q = h^4(q)$  éventuellement

FIGURE 9. Un arc de translation  $\beta$  pour  $h^2$  donné par l'affirmation A2 du lemme 3.4

En dehors du fait qu'elle évite le recours aux théories difficiles de Nielsen et de Thurston, signalons un autre avantage de la démarche de [B3]: les arguments s'adaptent sans peine pour donner une version locale du théorème 3.3, c'est à dire pour obtenir le théorème 2.8: si un point fixe isolé  $o$  est accumulé par des orbites périodiques de période  $k \geq 3$ , alors il l'est aussi par des orbites périodiques de période 2.

Pour approfondir l'analogie avec la théorie de Brouwer, il est naturel de considérer les homéomorphismes de  $\mathbb{S}^2$  qui renversent l'orientation et qui n'ont pas de point périodique de période 2, c'est à dire qui satisfont  $\text{Fix}(h) = \text{Fix}(h^2)$ . Ainsi, par un argument facile de perturbation, on déduit du théorème 3.3:

**Proposition 3.7.** [B3, Corollary 3.11] *Soit  $h$  un homéomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  renversant l'orientation et sans point 2-périodique. Alors l'ensemble non errant  $\Omega(h)$  est réduit à  $\text{Fix}(h)$ .*

En conséquence, on a le résultat suivant sur les homéomorphismes conservatifs.

**Corollaire 3.8.** [B3, Remark 3.12] *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ , ou du disque fermé  $\mathbb{D}^2$ , qui renverse l'orientation et qui préserve l'aire (ou plus généralement qui n'a pas de point errant). Alors  $h$  admet un point périodique de période 2.*

**Remarque.** On sait que si  $g \neq \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$  est un homéomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  préservant l'orientation, sans point errant et possédant au moins trois points fixes alors il admet des points périodiques de période arbitrairement

grande: ceci est un théorème de Le Calvez ([49, Theorem 0.3']) généralisant un résultat antérieur de Franks et Handel obtenu pour des difféomorphismes ([31]). Considérons maintenant un homéomorphisme de  $M = \mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{D}^2$  comme dans le corollaire 3.8; dans le cas  $M = \mathbb{S}^2$  on suppose de plus que  $h$  possède au moins un point fixe. Si  $M = \mathbb{D}^2$  alors  $h$  a deux points fixes sur le cercle bordant  $M$  car il renverse l'orientation. L'homéomorphisme  $g = h^2$  admet donc au moins trois points fixes et l'on déduit du théorème de Le Calvez que ou bien  $h^2 = \text{Id}_M$  ou bien  $h$  admet des points périodiques de période arbitrairement grande.

Il reste à comprendre ce que pourrait être un analogue du théorème de translation plane. Les homéomorphismes  $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$  et  $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x, -y)$  sont des exemples élémentaires d'homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  renversant l'orientation et sans point 2-périodique. Une variante de ce premier exemple est définie par  $(x, y) \mapsto (x + |y|, -y)$  lorsque  $|y| \leq 1$ , ce qui ajoute de nombreux points fixes. Le théorème suivant dit grossièrement que ces trois modèles suffisent pour reconstituer la dynamique d'un homéomorphisme  $h$  comme dans la proposition 3.7.

**Théorème 3.9.** [B3, Theorem 5.1] *Soit  $h$  un homéomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  renversant l'orientation et sans point 2-périodique. Alors, pour tout point  $m \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ , il existe un plongement topologique  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h)$  tel que*

- $\mathcal{O}$  est égal à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$  ou  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,
- $m \in \varphi(\mathcal{O})$ ,
- si  $\mathcal{O}$  est égal à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$  alors
  - (i)  $h \circ \varphi = \varphi \circ G|_{\mathcal{O}}$ , où  $G(x, y) = (x + 1, -y)$ ,
  - (ii) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\{x\} \times \mathbb{R} \cap \mathcal{O})$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ ,
- si  $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  alors
  - (iii)  $h \circ \varphi = \varphi \circ H|_{\mathcal{O}}$ , où  $H(x, y) = \frac{1}{2}(x, -y)$ .

**Un point de vocabulaire.** Je profite de ce texte pour faire la remarque suivante. Dans [B3] je qualifie de *propre* [proper] un plongement  $\varphi$  satisfaisant (ii) ci-dessus (voir l'énoncé de [B3, Theorem 5.1]). Malgré l'emploi de ce mot, je n'affirme pas que l'image inverse  $\varphi^{-1}(K)$  d'un compact  $K \subset \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h)$  est compacte. D'ailleurs, on construit facilement un exemple montrant que cette propriété n'est pas vraie en général. Le mot *propre* doit donc plutôt être lu comme une abréviation de *propre sur chaque verticale*  $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{O}$ .

Comme évoqué précédemment, les décompositions en briques de Le Calvez et Sauzet sont utiles pour démontrer ce résultat. Il s'agit cette fois de décomposer la surface  $S = \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h) = \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(h^2)$  et de considérer la restriction de  $h$  à  $S$ . La décomposition est choisie assez fine pour que deux briques quelconques  $B, B'$  vérifient

- $h(B) \cap B = \emptyset = h^2(B) \cap B$ ,
- $B'$  rencontre au plus l'un des deux ensembles  $h^{-1}(B)$  ou  $h(B)$ .

On a comme dans [51] une dynamique naturelle sur l'ensemble des briques. La propriété importante qu'aucune brique ne succède à elle-même est cette fois assurée par le lemme suivant, qui peut se voir comme un analogue du lemme de Franks (Proposition 3.2):

**Lemme 3.10.** [B3, Lemma 5.4] *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  renversant l'orientation. Supposons qu'il existe une suite finie de disques topologiques fermés  $D_1, \dots, D_n$  satisfaisant*

- (i)  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad D_i = D_j$  ou  $Int(D_i) \cap Int(D_j) = \emptyset$ ,
- (ii)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad h(D_i) \cap D_i = \emptyset = h^2(D_i) \cap D_i$ ,
- (iii)  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad D_j$  rencontre au plus l'un des deux ensembles  $h^{-1}(D_i)$  ou  $h(D_i)$ ;  
de façon équivalente:  $h(D_i) \cap D_j \neq \emptyset \implies h(D_j) \cap D_i = \emptyset$ ,
- (iv)  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \exists k_i \geq 1$  tel que  $h^{k_i}(D_i) \cap D_{i+1} \neq \emptyset$  et  $\exists k_n \geq 1$  tel que  $h^{k_n}(D_n) \cap D_1 \neq \emptyset$ .

Alors  $h$  possède un point périodique de période 2.

**3.2. Une application de la théorie de Nielsen.** La question suivante est naturelle après le théorème 3.3: si  $h$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  qui renverse l'orientation et  $\mathcal{O}$  une orbite  $k$ -périodique de  $h$ , où  $k \geq 3$ , peut-on trouver une orbite 2-périodique  $\mathcal{O}'$  telle que  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  soient enlacées? Comme nous le discuterons plus loin, la difficulté de cette question dépend beaucoup du sens précis que l'on donne au mot enlacé. Voici une définition possible proposée par J.M. Gambaudo.

**Définition 3.11** (J. M. Gambaudo, [33]). *Soient  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  deux orbites périodiques d'un homéomorphisme  $h$  d'une surface  $S$ . On dit que  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont non enlacées [unlinked] s'il existe deux disques topologiques fermés  $D_i \subset S$  ( $i = 1, 2$ ) satisfaisant les propriétés suivantes:*

- $\forall i = 1, 2 \quad$  l'orbite  $\mathcal{O}_i$  est contenue dans l'intérieur de  $D_i$ ,
- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ,
- $\forall i = 1, 2 \quad h(\partial D_i)$  est librement isotope à  $\partial D_i$  dans  $S \setminus (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ .

Dans le cas contraire, les orbites  $\mathcal{O}_1$  and  $\mathcal{O}_2$  sont dites enlacées [linked].

L'article [B4] apporte, pour cette définition, une réponse positive à la question ci-dessus. Précisément on a:

**Théorème 3.12.** [B4] *Soit  $h$  un homéomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui renverse l'orientation et possède une orbite périodique  $\mathcal{O}$  de période  $k \geq 3$ . Alors il existe une orbite périodique  $\mathcal{O}'$  de période 2 telle que l'on ne peut trouver aucune courbe de Jordan  $C \subset \mathbb{S}^2$  séparant  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  et qui soit librement isotope à son image  $h(C)$  dans  $\mathbb{S}^2 \setminus (\mathcal{O} \cup \mathcal{O}')$ .*

On peut reformuler ce résultat en énonçant, suivant une définition de P. Boyland ([10]), que l'orbite  $\mathcal{O}$  n'est pas trivialement plongée dans l'anneau ouvert  $A_{\mathcal{O}'} = \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{O}'$ . L'article [B4] a notamment été inspiré par un

travail de B. Kolev ([43]) où un résultat similaire est démontré concernant l'enlacement d'une orbite  $k$ -périodique ( $k \geq 2$ ) et d'un point fixe pour un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme préservant l'orientation de  $\mathbb{R}^2$ . Décrivons les éléments de la théorie de Nielsen utiles à la preuve du théorème 3.12. Classiquement, le revêtement universel  $\tilde{S}$  d'une surface hyperbolique  $S$  s'identifie à une partie convexe du disque de Poincaré  $\mathbb{H}^2$  ( $\tilde{S} = \mathbb{H}^2$  si  $S$  est sans bord). Un premier résultat important de Nielsen dit que si  $\psi$  est un homéomorphisme de  $S$ , tout relevé  $\tilde{\psi}$  de  $\psi$  à  $\tilde{S}$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\tilde{S} \cup E_\infty$ , où  $E_\infty \subset \mathbb{S}^1$  est l'ensemble des points à l'infini ( $E_\infty = \mathbb{S}^1$  si  $S$  est sans bord). Nielsen, qui considère des homéomorphismes  $\psi$  préservant l'orientation d'une surface  $S$  compacte, associe à chaque  $\tilde{\psi}$  une paire d'entiers  $\mu(\tilde{\psi}), \nu(\tilde{\psi}) \geq 0$ . L'entier  $\nu(\tilde{\psi})$  est le nombre minimal de générateurs du groupe  $N(\tilde{\psi})$  constitué des automorphismes du revêtement commutant avec  $\tilde{\psi}$  et  $\mu(\tilde{\psi})$  est le nombre de  $N(\tilde{\psi})$ -orbites de points fixes attractifs de  $\tilde{\psi}|_{E_\infty}$ . La collection de ces paires d'entiers, lorsque  $\tilde{\psi}$  décrit tous les relevés de  $\psi$ , ne dépend que la classe d'isotopie de  $\psi$ . Comme l'a montré J. Gilman ([34]), on peut d'ailleurs exprimer la classification bien connue de Thurston en termes de toutes les paires d'entiers obtenues en considérant les relevés de  $\psi$  et de ses itérés  $\psi^n$ . Plus simplement, le résultat de Nielsen jouant un rôle essentiel dans [B4] (ainsi que dans [43]) affirme que si  $X$  est la classe de Nielsen de  $\psi$  déterminée par  $\tilde{\psi}$  (i.e. la projection dans  $S$  de  $\text{Fix}(\tilde{\psi}) \subset \tilde{S}$ ) alors l'indice de  $X$  vérifie

$$\text{Ind}(\psi, X) = 1 - \mu(\tilde{\psi}) - \nu(\tilde{\psi}).$$

Notons qu'il faut exclure de cet énoncé le cas où  $S$  est sans bord et où  $\psi$  est isotope à l'identité, ce qui est sans conséquence pour nous. On renvoie à [B4] pour des références sur ce résultat. Le théorème 3.12 se démontre alors en quelques étapes:

- On se ramène d'abord au cas où  $h$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme en chaque point de  $\mathcal{O}$ . Classiquement,  $h|_{\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{O}}$  se prolonge alors en un homéomorphisme  $\varphi$  de la surface  $S$  obtenue en compactifiant  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{O}$  avec  $k$  cercles. La surface  $S$  est hyperbolique puisque de caractéristique d'Euler  $\chi(S) = 2 - k \leq -1$ . Par construction,  $h$  et  $\varphi$  ont exactement les mêmes orbites 2-périodiques.
- On montre que si une orbite 2-périodique  $\mathcal{O}'$  de  $\varphi$  ne vérifie pas la conclusion du théorème, alors elle est contenue dans une classe de Nielsen  $X$  de  $\psi = \varphi^2$ . En conséquence on a  $\varphi(X) = X$ .
- Le théorème de Nielsen précédent permet de montrer que toute classe de Nielsen  $X$  de  $\psi = \varphi^2$  telle que  $\varphi(X) = X$  vérifie  $\text{Ind}(\psi, X) \leq 0$ . Ici intervient le fait que  $h$ , et donc  $\varphi$ , renverse l'orientation: le bord de  $\tilde{S} \cup E_\infty$  étant topologiquement un cercle, la restriction à cet ensemble d'un relevé  $\tilde{\varphi}$  de  $\varphi$  a deux point fixes.
- Une version de la formule de Lefschetz montre que  $\psi = \varphi^2$  a une classe de Nielsen d'indice positif, ce qui conclut.

**Un prolongement possible.** Il existe une autre notion d'enlacement, plus exigeante, dûe à Franks. Intuitivement on cherche à savoir si une orbite périodique  $\mathcal{O}$  de période  $k \geq 2$  d'un homéomorphisme  $h$  préservant l'orientation du plan  $\mathbb{R}^2$  tourne toujours autour d'un point fixe. Cette idée peut se formaliser de la façon suivante. Si  $z$  est un point fixe de  $h$ , considérons un revêtement universel  $\pi : \widetilde{A}_z = \mathbb{R}^2 \rightarrow A_z$  de l'anneau ouvert  $A_z = \mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$  et notons  $\tau$  le générateur du groupe des automorphismes naturellement associé à un cercle entourant  $z$  orienté dans le sens direct. Pour tout relevé  $H$  de  $h|_{A_z}$  à  $\widetilde{A}_z$  et pour tout point  $\tilde{m} \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$ , il existe un entier  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $H^k(\tilde{m}) = \tau^p(\tilde{m})$ . Comme  $h|_{A_z}$  est isotope à  $\text{Id}_{A_z}$ , on a  $H \circ \tau = \tau \circ H$  d'où l'on déduit que la classe modulo  $\mathbb{Z}$  du nombre rationnel  $p/k$  ne dépend que de  $h$  et de  $\mathcal{O}$ . On notera  $\rho(\mathcal{O}, A_z)$  cette classe modulo  $\mathbb{Z}$  qui définit le *nombre de rotation* de l'orbite périodique  $\mathcal{O}$  dans l'anneau  $A_z$ . La question de Franks consiste alors à demander si l'on peut toujours trouver un point fixe  $z$  tel que le nombre de rotation  $\rho(\mathcal{O}, A_z) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  soit non nul. Les seuls résultats publiés à ce jour sont ceux de J. Guaschi ([36]) et de C. Bonatti et Kolev ([7]): ils apportent une réponse positive lorsque, respectivement,  $k$  est petit ( $k \in \{2, 3, 4\}$ ) et lorsque  $h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  est une application Lipschitz de constante inférieure ou égale à 1. Le problème vient cependant d'être résolu en toute généralité par Le Calvez ([50]).

Comme indiqué dans [B4], il y a une question analogue pour une orbite  $k$ -périodique  $\mathcal{O}$  ( $k \geq 3$ ) d'un homéomorphisme  $h$  qui reverse l'orientation de la sphère  $\mathbb{S}^2$ : il suffit de remplacer l'anneau  $A_z$  ci-dessus par un anneau  $A_{\mathcal{O}'} = \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{O}'$  où  $\mathcal{O}'$  est une orbite 2-périodique. La question de Franks garde bien un sens dans ce cadre puisque  $h|_{A_{\mathcal{O}'}}$  reverse l'orientation et permute les deux bouts de  $A_{\mathcal{O}'}$  donc ses relevés au revêtement universel  $\widetilde{A}_{\mathcal{O}'} = \mathbb{R}^2$  commutent avec les automorphismes, ce qui permet de définir le nombre de rotation  $\rho(\mathcal{O}, A_{\mathcal{O}'})$  comme ci-dessus. On vérifie sans difficulté que la conclusion du théorème 3.12 est une condition nécessaire pour avoir  $\rho(\mathcal{O}, A_{\mathcal{O}'}) \neq 0$  dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . En regardant  $\mathbb{S}^2$  comme la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , la situation modèle est celle d'un homéomorphisme  $h = S \circ R|_{\mathbb{S}^2}$  où  $S$  est la symétrie  $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$  et  $R$  une rotation autour de l'axe des  $z$ . Toute orbite périodique de période  $k \geq 3$  d'un tel homéomorphisme est enlacée en ce sens plus fort avec l'orbite 2-périodique  $\mathcal{O}'$  constituée des deux pôles  $S = (0, 0, -1)$  et  $N = (0, 0, 1)$ .

#### 4. UNE NOUVELLE VARIATION SUR LE THÉORÈME DE POINCARÉ-BIRKHOFF

**4.1. Différentes versions du théorème de Poincaré-Birkhoff.** Commençons par quelques rappels sur ce que l'on nomme aujourd'hui le théorème de Poincaré-Birkhoff (ou dernier théorème géométrique de Poincaré). Dans un langage actuel, le résultat conjecturé par Poincaré dans [56] est le suivant.

**Théorème 4.1.** *Soit  $h$  un homéomorphisme de l'anneau compact  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  isotope à l'identité, préservant l'aire et vérifiant de plus la propriété de twist sur le bord<sup>3</sup>. Alors  $h$  admet au moins deux points fixes.*

Très tôt, ce résultat a suscité de nombreuses discussions et variantes. En particulier, le passage de un à deux points fixes est apparu comme une difficulté non négligeable et nous verrons d'ailleurs que certaines versions du théorème se contentent d'un seul point fixe. On sait par exemple que Birkhoff a d'abord omis la possibilité d'avoir un homéomorphisme de  $A$  avec un seul point fixe d'indice nul (voir [4]) avant de donner une première preuve complète dans [5], où il considère en fait une situation un peu plus générale que celle du théorème 4.1. On renvoie à l'article de Brown et W.D. Neumann ([15]) pour une démonstration reprenant et éclaircissant les arguments de Birkhoff.

Un idée importante déjà présente chez Poincaré ([56]) est de remplacer l'hypothèse de préservation de l'aire par une propriété plus topologique disant à peu près qu'il n'existe pas de sous-anneau essentiel  $B \subset A$  contenant strictement son image. A cause de la question du deuxième point fixe, il faudra attendre P. Carter en 1982 pour avoir un énoncé définitif dans ce sens.

**Théorème 4.2** (P. Carter, [17]). *Soit  $h$  un homéomorphisme de  $A$  isotope à l'identité et avec la propriété de twist sur le bord. Si  $h$  admet au plus un point fixe, alors il existe une courbe de Jordan essentielle  $J \subset A$  telle que  $J \cap h(J) \subset \text{Fix}(h)$ .*

Guillou en donnera une preuve plus simple utilisant les décompositions en briques ([38]). Carter montre aussi sur un exemple que l'on ne peut pas en général obtenir  $J \cap h(J) = \emptyset$  si  $h$  admet (exactement) un point fixe. Cependant, sous l'hypothèse plus forte  $\text{Fix}(h) = \emptyset$ , Kerékjártó avait déjà obtenu ce résultat comme une conséquence d'une version équivariante du théorème de translation plane de Brouwer ([42]). Plus précisément, si le relevé  $H$  de  $h^{\pm 1}$  donné par la propriété de twist est sans point fixe, Kerékjártó construit une droite de Brouwer de  $H$  contenue dans l'intérieur de  $\tilde{A}$  et invariante par les automorphismes du revêtement. Elle se projette donc dans  $A$  sur une courbe de Jordan essentielle disjointe de son image par  $h$ . C'est là une idée importante jouant encore un rôle central dans plusieurs publications modernes ([1, 37, 64]). Elle a aussi été un guide pour les résultats de l'article [B5] que je présente ci-dessous. Citons aussi Franks qui a obtenu le même résultat que Kerékjártó à l'aide d'une version à temps discret de la théorie de Conley des ensembles récurrents par chaînes et des fonctions de Lyapunov ([26]).

---

<sup>3</sup>i.e. il existe un relevé  $H$  de  $h$  ou  $h^{-1}$  au revêtement universel  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$  tel que  $p_1(H((x, 1))) < x < p_1(H((x, -1)))$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , où  $p_1 : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$  est la projection sur l'axe des  $x$ . Intuitivement,  $h$  déplace les points des deux bords de  $A$  dans des sens opposés.

Les généralisations de l’hypothèse de twist semblent plus récentes. Leur caractéristique essentielle est de tenir compte du comportement de l’homéomorphisme  $h$  dans l’anneau tout entier et non plus seulement sur le bord. Dans un premier temps, mentionnons celle proposée par Guillou consistant à regarder  $h$  comme “twisté” si tout arc  $\alpha$  joignant les deux composantes connexes du bord de  $A$  vérifie  $h(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$  (voir [37, Théorème 5.1]).

**4.2. Homéomorphismes préservant l’homologie de l’anneau.** On présente ici les résultats obtenus dans [B5]. Si  $h$  est un homéomorphisme de l’anneau  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  isotope à l’identité (i.e. préservant l’orientation et les deux composantes connexes du bord de  $A$ ) alors tout relevé  $H$  de  $h$  au revêtement universel  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$  commute avec les automorphismes. Cette propriété est à la base de toutes les preuves du théorème de Poincaré-Birkhoff et de ses extensions, et est aussi satisfaite par les homéomorphismes de  $A$  isotopes à la symétrie  $S_A : (z, r) \mapsto (z, -r)$ . D’après le théorème d’isomorphisme de Hurewicz, on peut la formuler de façon plus topologique en disant que  $h$  induit l’identité sur le premier groupe d’homologie  $H_1(A, \mathbb{Z})$ . Puisque, selon Kerékjártó, le théorème de Poincaré-Birkhoff se déduit du théorème de translation plane de Brouwer, on peut espérer au vu de la Section 3.1 un résultat disant grosso modo qu’un homéomorphisme conservatif de  $A$  isotope à la symétrie  $S_A$  et satisfaisant une propriété de twist possède nécessairement un point périodique de période 2. Dans cet esprit, on obtient d’abord:

**Théorème 4.3.** [B5, Theorem 1.2] *Soit  $h$  un homéomorphisme de l’anneau compact  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  isotope à la symétrie  $S_A : A \rightarrow A, (z, r) \mapsto (z, -r)$ ; de façon équivalente,  $h$  renverse l’orientation et permute les composantes connexes du bord de  $A$ . On suppose de plus que  $h$  a un nombre fini de points fixes. Si  $h$  n’admet pas de point 2-périodique, i.e. si  $\text{Fix}(h) = \text{Fix}(h^2)$ , alors au moins l’une des deux propriétés suivantes est vraie.*

- (1) *Il existe une courbe de Jordan essentielle  $J \subset A$  telle que  $J \cap h^2(J) = J \cap \text{Fix}(h)$  et telle que  $h^2(J)$  ne rencontre pas  $J$  transversalement (voir figure 10).*
- (2) *Il existe un arc  $\alpha$  joignant les deux composantes connexes du bord de  $A$  tel que*
  - $\alpha \cap h(\alpha) = \alpha \cap h^2(\alpha) = \alpha \cap \text{Fix}(h)$ ,
  - *l’ensemble  $h(\alpha) \cup h^2(\alpha)$  ne rencontre pas les deux côtés (locaux) de  $\alpha$ ; en particulier les arcs  $h(\alpha), h^2(\alpha)$  ne rencontrent pas  $\alpha$  transversalement et  $h^2(\alpha)$  ne rencontre pas les deux côtés de  $h(\alpha)$ ,*
  - *les trois arcs  $h^i(\alpha), i \in \{0, 1, 2\}$ , sont dans l’ordre cyclique  $\alpha, h(\alpha), h^2(\alpha)$  ou  $h^2(\alpha), h(\alpha), \alpha$  (voir figure 11).*

On notera que le caractère conservatif ou non de  $h$  se voit en fait sur le deuxième itéré  $h^2$ . D’autre part, on pourra rapprocher l’hypothèse de twist de celle proposée par Guillou. L’hypothèse que  $\text{Fix}(h)$  est un ensemble fini

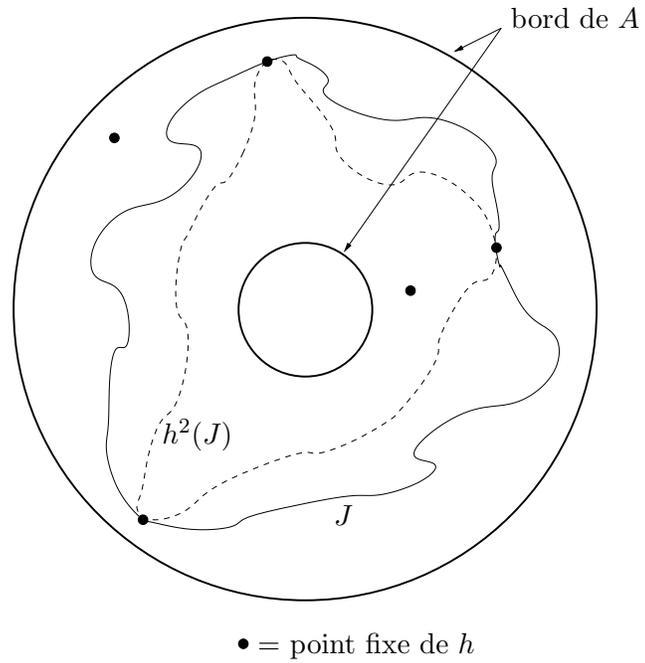


FIGURE 10. La situation dissipative (1) du théorème 4.3

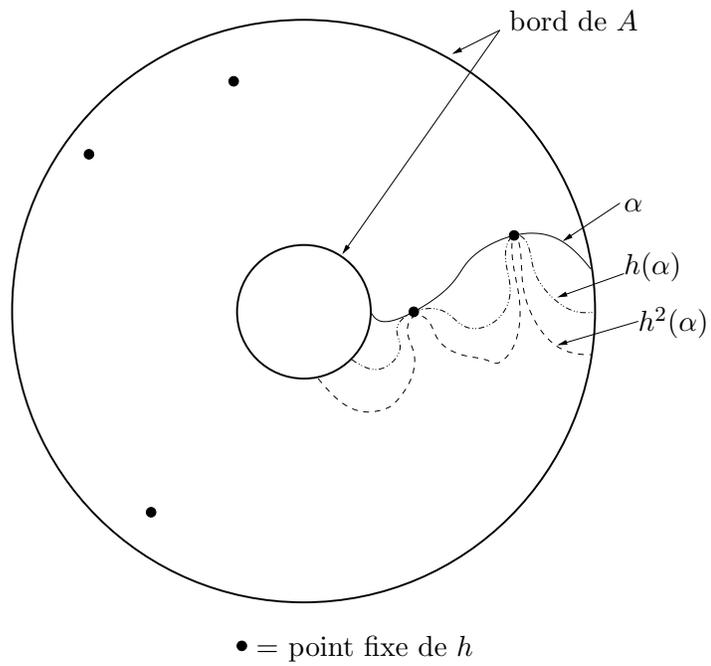


FIGURE 11. La situation "non twistée" (2) du théorème 4.3

est purement technique. Elle permet d'exprimer les hypothèses conservative et de twist en étudiant l'action de  $h$  sur des ensembles agréables, les courbes  $J$  et  $\alpha$ . Insistons sur le fait qu'il n'y a guère de chances d'obtenir un résultat dans la veine du théorème 4.3 en se contentant d'appliquer une version du théorème de Poincaré-Birkhoff à l'homéomorphisme  $h^2$ . Cependant, la version suivante de H.E. Winkelnkemper est l'un des ingrédients de la démonstration.

**Théorème 4.4** (H. E. Winkelnkemper, [64]). *Soient  $h$  un homéomorphisme de  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  isotope à l'identité et  $H$  un relevé de  $h$  au revêtement universel  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ . Si  $H$  n'est pas conjugué à la translation  $\tau(x, y) = (x + 1, y)$  alors  $H$  admet un point fixe ou il existe une courbe de Jordan essentielle  $J \subset A$  telle que  $J \cap h(J) = \emptyset$ .*

Comme pour le théorème 3.9, le lemme 3.10 et les décompositions en briques sont des outils importants; on doit cette fois considérer des décompositions de  $\tilde{A} \setminus \text{Fix}(H)$  équivariantes par les automorphismes du revêtement, où  $H$  est un relevé bien choisi de  $h$  ou  $h^{-1}$ .

Une autre façon de généraliser l'hypothèse de twist, due à Franks ([25, 27]), consiste à considérer les ensembles de rotation  $\rho(H)$  des relevés  $H$  de  $h$  à  $\tilde{A}$ . On considèrera  $h$  comme twisté si 0 est dans l'intérieur d'un certain  $\rho(H)$ . En notant  $p_1 : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$  la projection  $(x, y) \mapsto x$ , rappelons que  $\rho(H)$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  (éventuellement réduit à un point) pouvant par exemple se définir par

$$\rho(H) = \left\{ \int_A \phi d\mu \mid \mu \text{ mesure de probabilité borélienne } h\text{-invariante sur } A \right\}$$

où  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $\phi(m) = p_1 \circ H(\tilde{m}) - p_1(\tilde{m})$  pour tout  $m \in A$  et pour tout  $\tilde{m} \in \tilde{A}$  se projetant sur  $m$ . Le fait que  $H$  commute avec les automorphismes du revêtement assure que la fonction  $\phi$  est bien définie. On a alors le théorème suivant:

**Théorème 4.5** (J. Franks, [27]). *Soient  $h$  un homéomorphisme de l'anneau  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  isotope à l'identité, sans point errant, et  $H$  un relevé de  $h$  au revêtement universel  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ . Si 0 est dans l'intérieur de  $\rho(H)$  alors  $h$  possède au moins deux points fixes.*

Les points fixes de  $h$  peuvent en fait s'obtenir comme les projections de points fixes de  $H$ , ce qui est souvent important en pratique. Bien sûr l'hypothèse  $\Omega(h) = A$  doit être vue comme une hypothèse conservative, légèrement plus contraignante que l'absence de courbe de Jordan  $J$  comme dans le théorème 4.2. Si l'on suppose seulement  $0 \in \rho(H)$ , on sait aussi d'après Franks ([25]) que l'on peut conclure à l'existence d'un seul point fixe de  $h$  (projection d'un point fixe de  $H$ ), ce qui se vérifie aussi sans peine à l'aide du théorème 4.4. Ce théorème 4.5 apparaît dans [27] comme un corollaire d'une version du théorème de Poincaré-Birkhoff dans l'anneau ouvert

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  où l'hypothèse de twist s'exprime par la notion de disque de retour positif/négatif [**positively/negatively returning discs**] (voir [27, Theorem 2.1] ainsi que [30]). Un disque de retour positif (resp. négatif) est un disque dans  $\hat{A}$  dont un itéré positif rencontre l'un de ses translatés situé sur sa droite (resp. sur sa gauche). On peut en fait voir ce résultat comme une nouvelle application de l'idée de Kerékjártó mais utilisant un résultat moins fort que le théorème de translation plane, à savoir la proposition 3.2. On trouvera d'autres extensions du théorème de Poincaré-Birkhoff à l'anneau ouvert dans les articles de S. Addas-Zanata ([1]) et de Guillou ([39]). Dans l'appendice de [B5] j'explique comment cette démarche et ces résultats de Franks s'étendent à des homéomorphismes de  $A$  isotopes à la symétrie  $S_A$ . Une remarque simple est que les notions de nombre de rotation et d'ensemble de rotation sont encore bien définies et pertinentes pour les homéomorphismes de  $A$  isotopes à  $S_A$ . En effet, la propriété importante pour définir ces objets est que les relevés  $H$  de  $h$  commutent avec les automorphismes du revêtement, ce qui, à nouveau, est vérifié par les homéomorphismes  $h$  isotopes à  $\text{Id}_A$  mais aussi par ceux isotopes à  $S_A$ . Curieusement, ceci ne semble pas avoir été relevé jusqu'à présent, bien qu'il existe dans la littérature des adaptations de la notion d'ensemble de rotation pour des homéomorphismes de surfaces non isotopes à l'identité: voir les travaux de E. Doeff ([20]) sur le tore  $\mathbb{T}^2$ .

En modifiant convenablement les notions de disques de retour positif/négatif et en utilisant à nouveau le lemme 3.10, les raisonnements de Franks s'adaptent pour donner en particulier:

**Théorème 4.6.** [B5, Theorem 4.4] *Soient  $h$  un homéomorphisme de l'anneau  $A = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  isotope à la symétrie  $S_A$ , sans point errant, et  $H$  un relevé de  $h$  au revêtement universel  $\tilde{A}$ . Si  $0$  est dans l'intérieur de  $\rho(H)$  alors  $H$  possède une orbite périodique de période 2 (et donc il en est de même pour  $h$ ).*

On en déduit

**Corollaire 4.7.** [B5, Corollary 4.9] *Soit  $h$  comme dans le théorème 4.6. On suppose qu'il existe un relevé  $H$  de  $h$  au revêtement universel  $\tilde{A}$  tel que  $\rho(H) = [a, b]$  avec  $a < b$ . Alors, pour tout rationnel  $p/q$  écrit sous forme irréductible et vérifiant  $a < p/q < b$ , on a*

- si  $q$  est pair alors  $h$  possède un point  $q$ -périodique  $m$  de nombre de rotation  $p/q$ ,
- si  $q$  est impair alors  $h$  possède un point  $2q$ -périodique  $m$  de nombre de rotation  $p/q$ .

Notons que ce dernier résultat permet seulement de détecter des orbites périodiques de  $h$  qui sont de périodes paires. Ceci n'est en fait pas surprenant car, d'après P. Blanchard et Franks ([6]) ou Handel ([41]), la présence de deux périodes impaires différentes impliquerait une entropie positive. Or on construit facilement un homéomorphisme  $h$  satisfaisant les hypothèses du

corollaire 4.7, d'entropie nulle, permutant les deux côtés du cercle  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$  et préservant globalement ce cercle. Il y a alors au plus une période impaire, réalisée par des points dans  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

## TRAVAUX PRÉSENTÉS DANS CE MEMOIRE.

- [B1] M. BONINO. A dynamical property for planar homeomorphisms and an application to the problem of canonical position around an isolated fixed point. *Topology* **40** (2001), 1241-1257.
- [B2] M. BONINO. Lefschetz index for orientation reversing planar homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 2173-2177.
- [B3] M. BONINO. A Brouwer-like theorem for orientation reversing homeomorphisms of the sphere, *Fund. Math.* **182** (2004), 1-40.
- [B4] M. BONINO. Nielsen theory and linked periodic orbits of homeomorphisms of the sphere, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **140** (2006), 425-430.
- [B5] M. BONINO. On the dynamics of homology-preserving homeomorphisms of the annulus, prépublication, 27 pages, à paraître dans *Trans. Amer. Math. Soc.*

## AUTRES RÉFÉRENCES.

- [1] S. ADDAS-ZANATA. Some extensions of the Poincaré-Birkhoff theorem to the cylinder and a remark on mapping of the torus homotopic to Dehn twists, *Nonlinearity* **18** (2005), 2243-2260.
- [2] H. BELL. A fixed point theorem for plane homeomorphisms, *Fund. Math.* **100** (1978), 119-128.
- [3] F. BÉGUIN et F. LE ROUX. Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer, homéomorphismes de Reeb, *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), 149-210.
- [4] G. D. BIRKHOFF. Proof of Poincaré last geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 14-22.
- [5] G. D. BIRKHOFF. An extension of Poincaré's last geometric theorem, *Acta Math.* **47** (1925), 297-311.
- [6] P. BLANCHARD and J. FRANKS. The dynamical complexity of orientation-reversing homeomorphisms of surfaces, *Invent. Math.* **62** (1980/81), 333-339.
- [7] C. BONATTI and B. KOLEV. Existence de points fixes enlacés à une orbite périodique d'un homéomorphisme du plan, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **12** (1992), 677-682.
- [8] M. BONINO. Sur l'espace des homéomorphismes de Brouwer, *Thèse de l'Université Joseph Fourier (Grenoble 1)* (1997).
- [9] M. BONINO. Propriétés locales de l'espace des homéomorphismes de Brouwer, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **19** (1999), 1405-1423.
- [10] P. BOYLAND. Topological methods in surface dynamics, *Topology Appl.* **58** (1994), 223-298.
- [11] L. E. J. BROUWER. Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.* **72** (1912), 37-54.
- [12] M. BROWN. A short proof of the Cartwright-Littlewood theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **65** (1977), 372.
- [13] M. BROWN. A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *Houston J. Math.* **10** (1984), 35-41.
- [14] M. BROWN. On the fixed point index of iterates of planar homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 1109-1114.
- [15] M. BROWN and W.D. NEUMANN. Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Michigan Math. J.* **24** (1977), 21-31.

- [16] M. BROWN and E.E. SLAMINKA and W. TRANSUE. An orientation preserving fixed point free homeomorphism of the plane which admits no closed invariant line *Topology Appl.* **29** (1988), 213-217.
- [17] P.H. CARTER. An improvement of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), 285-299.
- [18] M. L. CARTWRIGHT and J. E. LITTLEWOOD. Some fixed point theorems, *Annals of Math.* **54** (1951), 1-37.
- [19] E. W. DAW. A maximally pathological Brouwer homeomorphism, *Trans. Amer. Math. Soc.* **343** (1994), 559-573.
- [20] E. DOEFF. Rotation measures for homeomorphisms of the torus homotopic to a Dehn twist, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **17** (1997), 575-591.
- [21] A. DOLD. Lectures on Algebraic Topology, 2nd ed., Springer, Berlin, 1980.
- [22] A. FATHI. An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *Enseign. Math.* **33** (1987), 315-322.
- [23] A. FLOER. Proof of the Arnold conjectures for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds, *Duke Math. J.* **51** (1986), 1-32.
- [24] M. FLUCHER. Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms, *Manuscripta Math.* **68** (1990), 271-293.
- [25] J. FRANKS. Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **8\*** (1988), 99-107.
- [26] J. FRANKS. A variation on the Poincaré-Birkhoff Theorem , *Contemporary Mathematics* **81** (1988), 111-116.
- [27] J. FRANKS. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff Theorem, *Annals of Math.* **128** (1988), 139-151.
- [28] J. FRANKS. A new proof of the Brouwer plane translation theorem, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **12** (1992), 217-226.
- [29] J. FRANKS. Rotation vectors and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 2637-2662.
- [30] J. FRANKS. Erratum to "Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem", *Annals of Math.* **164** (2006), 1097-1098.
- [31] J. FRANKS and M. HANDEL. Periodic points of Hamiltonian surface diffeomorphisms, *Geometry and Topology* **7** (2003), 713-756.
- [32] J. FRANKS and J. LLIBRE. Periods of surface homeomorphisms, *Contemporary Mathematics* **117** (1991), 63-77.
- [33] J. M. GAMBAUDO. Periodic orbits and fixed points of a  $C^1$ -orientation-preserving embedding of  $D$ , *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **108** (1990), 307-310.
- [34] J. GILMAN On the Nielsen type and the classification for the mapping class group, *Adv. Math.* **40** (1981), 68-96.
- [35] G. GRAFF and P. NOWAK-PRZYGODZKI. Fixed point indices of iterations of planar homeomorphisms, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **22** (2003), 159-166.
- [36] J. GUASCHI. Representations of Artin's braid groups and linking numbers of periodic orbits, *J. Knot Theory Ramifications* **4** (1995), 197-212.
- [37] L. GUILLOU. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff, *Topology* **33** (1994), 331-351.
- [38] L. GUILLOU. A simple proof of P. Carter's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 1555-1559.
- [39] L. GUILLOU. Free lines for homeomorphisms of the open annulus, *prépublication*.
- [40] O. H. HAMILTON. A short proof of the Cartwright-Littlewood fixed point theorem, *Canadian J. Math.* **6** (1954), 522-524.
- [41] M. HANDEL. The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces, *Topology* **21** (1982), 291-296.
- [42] B. de KERÉKJÁRTÓ. The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré, *Acta. Sci. Math. Szeged* **4** (1928/29), 86-102.

- [43] B. KOLEV. Point fixe lié à une orbite périodique d'un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  *C. R. Acad. Sci. Paris* **310** (1990), 831-833.
- [44] P. LE CALVEZ. Une propriété dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice  $> 1$ , *Topology* **38** (1999), 23-35.
- [45] P. LE CALVEZ. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **36** (2003), 139-171.
- [46] P. LE CALVEZ. Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer, *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), 229-259.
- [47] P. LE CALVEZ. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **102** (2006), 1-98.
- [48] P. LE CALVEZ. Multivalued Lyapounov functions for homeomorphisms of the 2-torus *Fund. Math.* **189** (2006), 227-253.
- [49] P. LE CALVEZ. Hamiltonian homeomorphisms of surfaces, *Duke Math. J.* **133** (2006), 125-184.
- [50] P. LE CALVEZ. Pourquoi les points périodiques des homéomorphismes du plan tournent-ils autour de certains points fixes, *prépublication*.
- [51] P. LE CALVEZ et A. SAUZET Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer, *Exposition Math.* **14** (1996), 277-287.
- [52] P. LE CALVEZ et J.C. YOCCOZ. Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe, *Annals of Math.* **146** (1997), 241-293.
- [53] F. LE ROUX. Homéomorphismes de surfaces. Théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable, *Astérisque* **292** (2004).
- [54] S. MATSUMOTO. Arnold conjecture for surface homeomorphisms, Proceedings of the French-Japanese Conference "Hyperspace Topologies and applications" (La Bussière, 1997), *Topology Appl.* **104** (2000), 194-214.
- [55] S. PELIKAN and E.E. SLAMINKA. A bound for the fixed point index of area preserving homeomorphisms of two-manifolds, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **7** (1987), 463-479.
- [56] H. POINCARÉ. Sur un théorème de géométrie, *Rend. Circ. Math. Palermo* **33** (1912), 375-407.
- [57] F. R. RUIZ DEL PORTAL and J. M. SALAZAR. Fixed point index of iterations of local homeomorphisms of the plane: a Conley-index approach, *Topology* **41** (2002), 1199-1212.
- [58] A. SAUZET. Applications des décompositions libres à l'étude des homéomorphismes de surfaces, *Thèse de l'Université Paris 13* (2001).
- [59] B. V. SCHMITT. L'espace des homéomorphismes du plan qui admettent un seul point fixe d'indice donné est connexe par arcs, *Topology* **18** (1979), 235-240.
- [60] M. SHUB and D. SULLIVAN A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps, *Topology* **13** (1974), 189-191.
- [61] J.C. SIKORAV. Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité, *J. Differ. Geom.* **22** (1985), 49-79.
- [62] E. E. SLAMINKA. Area preserving homeomorphisms of two manifolds, *Contemporary Mathematics* **81** (1988), 153-167.
- [63] E. E. SLAMINKA. Removing index 0 fixed points for area preserving maps of two-manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **340** (1993), 429-445.
- [64] H. WINKELNKEMPER. A generalisation of the Poincaré-Birkhoff theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988), 1028-1030.