L'espace des homéomorphismes de Brouwer est connexe par arcs

Marc BONINO

RÉSUMÉ. Nous démontrons que l'espace des homéomorphismes du plan préservant l'orientation et sans point fixe, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, est connexe par arcs.

Un homéomorphisme de Brouwer est un homéomorphisme du plan préservant l'orientation et sans point fixe. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homéomorphismes de Brouwer, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Une isotopie sans point fixe $H : (m,t) \mapsto (h_t(m), t)$, où $(m,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$, s'identifie alors au chemin $t \mapsto h_t$, $0 \leq t \leq 1$, dans $\mathcal{H}$, de h_0 à h_1.

Le but de cette Note est le résultat suivant qui répond à une question de M. Brown ([1]).

Théorème 1 *$\mathcal{H}$ est connexe par arcs.*

On a tout d'abord le résultat bien connu suivant:

Lemme 0. *Si φ est un homéomorphisme du plan préservant l'orientation, il existe une isotopie $(\varphi_t)_{0\leq t\leq 1}$ de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ à φ. Ainsi, pour un homéomorphisme de Brouwer h, $(\varphi_t^{-1} \circ h \circ \varphi_t)_{0\leq t\leq 1}$ est une isotopie de h à son conjugué $\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$, dans la classe de conjugaison de h.*

Lemme 1. *Si $g \in \mathcal{H}$ est tel que $int(g(S^1)) \cap int(S^1) = \emptyset$ et $g(S^1) \cap S^1 \neq \emptyset$, alors il existe une isotopie sans point fixe de g à un $g_1 \in \mathcal{H}$ vérifiant $int(g_1(S^1)) \cap int(S^1) = \emptyset$ et $Card(g_1(S^1) \cap S^1) = 1$.*

Preuve. On choisit $z \in S^1 \cap g(S^1)$ et un disque topologique fermé D vérifiant $\mathring{D} \subset int(S^1)$ et $\partial D \cap S^1 = \{g^{-1}(z), z\}$. On a alors $\mathring{D} \cap g(\mathring{D}) = \emptyset$ et, comme

$g^{-1}(z) \neq g(z)$ (cf. [2, Corollaire 3.4]) $\partial D \cap g(\partial D) = \{z\}$. Soit φ_1 un homéomorphisme du plan préservant l'orientation tel que $\varphi_1(\overline{int(S^1)}) = D$. Le lemme 0 donne une isotopie sans point fixe de g à $g_1 = {\varphi_1}^{-1} \circ g \circ \varphi_1$, et $\mathrm{Card}(g_1(S^1) \cap S^1) = 1$.

Lemme 2. *On définit un homéomorphisme $\tilde{h} \in \mathcal{H}$ de la façon suivante:*

$$\tilde{h}(m) = \begin{cases} m + (1/2, 0) & si\ m \in \overline{int(S^1)} \\ m + (\|m\|/2, 0) & si\ m \in \overline{ext(S^1)} \end{cases}$$

Si g_1 vérifie la conclusion du lemme 1, il existe une isotopie sans point fixe de g_1 à un $g_2 \in \mathcal{H}$ tel que $g_2|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1}$.

Preuve. En se plaçant dans $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, on montre à l'aide du théorème de Schoënflies qu'il existe un homéomorphisme φ_1 à support dans $\overline{ext(S^1)}$ tel que $\varphi_1(g_1(S^1))$ soit un cercle C vérifiant $S^1 \cap C = S^1 \cap g_1(S^1)$. Le lemme 0 donne une isotopie sans point fixe de g_1 à $f_1 = \varphi_1 \circ g_1 \circ {\varphi_1}^{-1}$, et $f_1(S^1) = C$. Soit D un disque fermé centré sur l'unique point de $S^1 \cap f_1(S^1)$, assez petit pour que $D \cap f_1(D) = \emptyset$. Il existe une isotopie $(\psi_t)_{0 \leq t \leq 1}$, à support dans D, de $\psi_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$ à un homéomorphisme ψ_1 tel que $\psi_1(D \cap f_1(S^1)) = \alpha$, où α est un arc simple tel que $\alpha \subset D$, $\alpha \cap \partial D = \partial\alpha = \partial(D \cap f_1(S^1))$, $\alpha \cap int(S^1) \neq \emptyset$, et $\mathrm{Card}(\alpha \cap \mathrm{S}^1) = 2$ (fig 1).

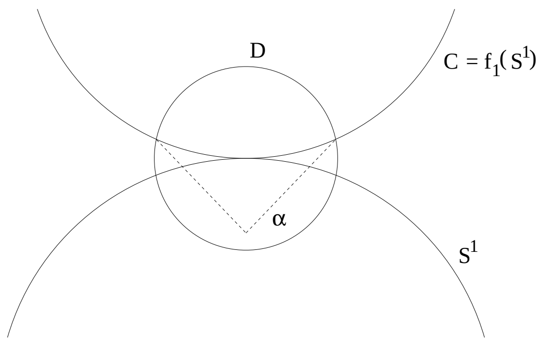

Fig. 1

L'isotopie $(\psi_t \circ f_1)_{0 \leq t \leq 1}$ est une isotopie sans point fixe (car $D \cap f_1(D) = \emptyset$) de f_1 à $f_2 = \psi_1 \circ f_1$, et $int(f_2(S^1)) \cap int(S^1) \neq \emptyset$, $Card(f_2(S^1) \cap S^1) = 2$. On note a_1 (resp. a_2) le point de $S^1 \cap f_2(S^1)$ où $f_2(S^1)$ parcouru dans le sens positif entre dans (resp. sort de) $\overline{int(S^1)}$, ${a_k}' = f_2(a_k)$, ${a_k}^{-1} = {f_2}^{-1}(a_k)$, pour $k = 1, 2$. Soit o un point de S^1 tel que $o' = f_2(o) \in D$; Comme

$D \cap f_2(D) = D \cap f_1(D) = \emptyset$, les points o, a_2, a_1 sont dans cet ordre sur S^1 orienté dans le sens direct, donc o', a_2', a_1' sont dans cet ordre sur $f_2(S^1)$. De même, $a_k' \in f_2(S^1) \setminus D$ pour $k = 1, 2$, ce qui donne l'ordre a_2, a_2', a_1', a_1 sur $f_2(S^1)$ et donc aussi l'ordre $a_2^{-1}, a_2, a_1, a_1^{-1}$ sur S^1(fig 2a).
Comparons cette situation à celle de $S^1 \cap \tilde{h}(S^1)$: on note b_1 (resp. b_2) le point de $S^1 \cap \tilde{h}(S^1)$ où $\tilde{h}(S^1)$ parcouru dans le sens positif entre dans (resp. sort de) $\overline{int(S^1)}$, $b_k' = \tilde{h}(b_k)$, $b_k^{-1} = \tilde{h}^{-1}(b_k)$, pour $k = 1, 2$ (fig 2b).

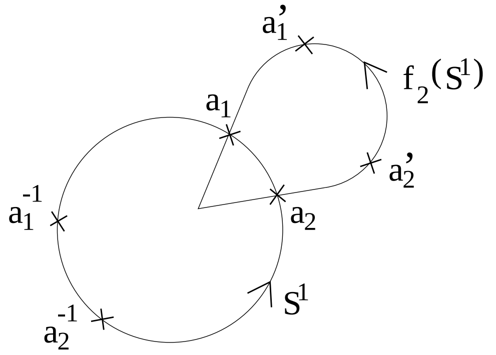

Fig. 2a

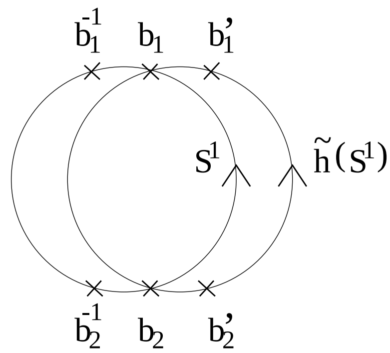

Fig. 2b

Il est clair qu'il existe un homéomorphisme direct ϕ de S^1 sur S^1 vérifiant $\phi(b_k) = a_k$ et $\phi(b_k^{-1}) = a_k^{-1}$ pour $k = 1$ et 2. On prolonge ϕ en un homéomorphisme de $S^1 \cup \tilde{h}(S^1)$ sur $S^1 \cup f_2(S^1)$ en posant $\phi|_{\tilde{h}(S^1)} = f_2 \circ \phi|_{S^1} \circ \tilde{h}^{-1}|_{\tilde{h}(S^1)}$. ϕ est bien défini sur $S^1 \cap \tilde{h}(S^1)$ car $f_2 \circ \phi|_{S^1} \circ \tilde{h}^{-1}(b_k) = a_k = \phi|_{S^1}(b_k)$ pour k = 1,2. Enfin, on prolonge ϕ en un homéomophisme de $\mathbb{R}^2$ préservant l'orientation à l'aide du théorème de Schoënflies. Le lemme 0 donne une isotopie sans point fixe de f_2 à $g_2 = \phi^{-1} \circ f_2 \circ \phi$, et $g_2|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1}$.

Lemme 3. *Si g_2 vérifie la conclusion du lemme 2, il existe une isotopie sans point fixe de g_2 à un $g_3 \in \mathcal{H}$ tel que $g_3|_{ext(S^1)} = \tilde{h}|_{ext(S^1)}$.*

Preuve. Comme $\tilde{h}(m) = \|m\| \tilde{h}(\frac{m}{\|m\|})$ pour $\|m\| \geq 1$, il suffit de poser

$$\text{pour } 0 \leq t < 1, \;\; f_t(m) = \begin{cases} g_2(m) & \text{si } m \in \overline{int(S^1)} \\ \tilde{h}(m) & \text{si } 1 \leq \|m\| \leq 1/(1-t) \\ \dfrac{1}{1-t} g_2((1-t)m) & \text{si } \|m\| \geq 1/(1-t) \end{cases}$$

et

$$g_3(m) = f_1(m) = \begin{cases} g_2(m) & \text{si } m \in \overline{int(S^1)} \\ \tilde{h}(m) & \text{si } m \in \overline{ext(S^1)} \end{cases}$$

Lemme 4. *Si f_* est un homéomorphisme du plan conjugué à la translation τ de vecteur (1,0) et si $f \in \mathcal{H}$ coïncide avec f_* hors d'un compact K, alors f est aussi conjugué à τ.*

Preuve. Il suffit de faire la démonstration pour $f_* = \tau$. On peut supposer que K est un carré, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq a \ et\ |y| \leq a\}$. Si L est la droite $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = -a\}$, vérifions qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que K soit à gauche de $f^N(L)$: si ce n'est pas vrai, il existe un point $p \in K$ qui est à droite de $f^n(L)$ pour tout $n \geq 0$, et donc $f^{-n}(p)$ à droite de L pour tout $n \geq 0$. Comme le domaine $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > a \ ou\ |y| > a\}$ vérifie $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ (car $f = \tau$ sur K^c), on a aussi $f^{-n}(p) \notin \mathcal{R}$ pour tout $n \geq 0$, et donc $f^{-n}(p) \in K$ pour tout $n \geq 0$, ce qui contredit l'errance de tout point . En notant $\mathcal{U}$ la région du plan entre la droite L et son image $f(L)$, on déduit de ce qui précède que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{\mathcal{U}}) = \mathbb{R}^2$ et on construit alors facilement une conjugaison entre f et τ en utilisant le fait que $\overline{U}$ est homéomorphe à $[0,1] \times \mathbb{R}$.

Démonstration du théorème. Soit $m_0 \in \mathbb{R}^2$, soit $h \in \mathcal{H}$. On note C_ρ le cercle de centre m_0 et de rayon $\rho > 0$. Puisque h est sans point fixe, il existe $\rho > 0$ tel que $\overline{int(h(C_\rho))} \subset ext(C_\rho)$.
On note $R = sup\{\rho > 0 \ / \ \overline{int(h(C_\rho))} \subset ext(C_\rho)\} > 0$; ainsi $C_R \cap h(C_R) \neq \emptyset$ et $int(C_R) \cap h(int(C_R)) = \emptyset$. On peut supposer que $C_R = S^1$. Grâce aux lemmes 1 à 3, on peut aussi supposer que $h|_{ext(S^1)} = \tilde{h}|_{ext(S^1)}$; on vérifie que $\tilde{h}$ est conjugué à τ [par exemple, en considérant la région $\mathcal{U}$ comprise entre une droite verticale L et son image $\tilde{h}(L)$, et en s'assurant que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}^n(\overline{\mathcal{U}}) = \mathbb{R}^2$], donc, d'après le lemme 4, h est aussi conjugué à τ: $h = \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ pour un homéomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$, que l'on peut choisir préservant l'orientation. Une nouvelle utilisation du lemme 0 termine la preuve. □

Je tiens à remercier Lucien Guillou et Alexis Marin pour les améliorations apportés à la démonstration.

References

[1] M. BROWN, Problem 3.11, page 179 in Continuum theory and dynamical systems, *Contemporary Math.*, 117, (1991).

[2] L. GUILLOU, Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff, *Topology*, 33, (1994), 331-351.