

# Propriétés locales de l'espace des homéomorphismes de Brouwer

Marc BONINO

## 1 Introduction

Un homéomorphisme de Brouwer est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation et sans point fixe. La dynamique de ces transformations du plan restant mal comprise, il est naturel de s'intéresser à l'espace de tous ces homéomorphismes (qui sera muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts). Nous répondons dans cet article aux questions posées par Morton Brown dans [Br3]. En particulier, nous obtenons le résultat suivant:

**Théorème principal:** *l'espace  $\mathcal{H}$  des homéomorphismes de Brouwer est localement contractible.*

Nous donnerons aussi une autre preuve de la connexité par arcs de  $\mathcal{H}$  (déjà démontrée dans [Bo1]) par l'intermédiaire d'un résultat de densité. Enfin, nous verrons que l'inclusion de  $\mathcal{H}$  dans l'espace des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation induit l'application nulle sur les groupes fondamentaux.

Ces résultats sont tous extraits de [Bo2]. Je souhaite remercier Lucien Guillou et Patrice Le Calvez pour les diverses remarques et améliorations qu'ils ont apportées.

## 2 Rappels, notations et conventions

$\mathbb{R}^2$  est muni de sa distance  $d(m, m') = \|m - m'\|$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

On notera  $B = \{m \in \mathbb{R}^2 \mid \|m\| \leq 1\}$  et  $rB = \{m \in \mathbb{R}^2 \mid \|m\| \leq r\}$ .

Pour  $X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\overline{X}$ ,  $\overset{\circ}{X}$  et  $\partial X$  désigneront respectivement l'adhérence, l'intérieur et la frontière de  $X$ , à l'exception du cas suivant :

si  $\alpha$  est un arc simple dans  $\mathbb{R}^2$  d'extrémités  $a$  et  $b$ , on posera  $\partial\alpha = \{a, b\}$ .

Un cercle topologique  $C$  dans  $\mathbb{R}^2$  (i.e. une courbe de Jordan) sera toujours positivement orienté et on notera  $int(C)$  (resp.  $ext(C)$ ) la composante bornée (resp. la composante non bornée) de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Si  $a, b$  sont deux points de  $C$ , on désignera par  $[a, b]_C$  (resp. par  $(a, b)_C$ ) l'arc fermé (resp. l'arc ouvert) issu de  $a$  et aboutissant à  $b$  pour cette orientation de  $C$ . On utilisera ces mêmes notations lorsque  $C$  est un arc orienté et  $a, b$  deux points de  $C$  rencontrés dans cet ordre sur  $C$ .

On notera  $Homeo(\mathbb{R}^2)$  l'espace des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ , (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts),  $Homeo^+(\mathbb{R}^2)$  le sous-espace de ceux qui préservent l'orientation et  $Fix(h)$  l'ensemble des points fixes de  $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$ .

**Définition 2.1** Si  $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$  et  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une paramétrisation positive d'un cercle topologique  $C = \alpha(S^1)$  tel que  $Fix(h) \cap C = \emptyset$ , on appellera degré de  $h$  le long de  $C$  le degré de l'application

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto \frac{h(\alpha(t)) - \alpha(t)}{\|h(\alpha(t)) - \alpha(t)\|} \end{aligned}$$

Ce nombre ne dépend pas du choix de  $\alpha$  et sera noté  $d(h, C)$ .

On a les propriétés élémentaires suivantes:

- si  $(h_s)_{0 \leq s \leq 1}$  est une isotopie telle que  $Fix(h_s) \cap C = \emptyset$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , alors  $d(h_0, C) = d(h_1, C)$ .
- si  $Fix(h) \cap int(C) = \emptyset$ , alors  $d(h, C) = 0$ .

**Définition 2.2** Pour  $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$ , on dira que  $X \subset \mathbb{R}^2$  est  $h$ -libre si  $h(X) \cap X = \emptyset$ .

**Définition 2.3** On dira que  $h' \in Homeo(\mathbb{R}^2)$  est une modification libre de  $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$  (ou simplement, une modification de  $h$ ) s'il existe une suite  $h_1, \dots, h_n$  dans  $Homeo(\mathbb{R}^2)$  telle que

$$\begin{aligned} h_1 &= h, & h_n &= h' \\ \forall i = 1, \dots, n-1 & & h_{i+1} &= \varphi_i \circ h_i \end{aligned}$$

où  $\varphi_i \in Homeo^+(\mathbb{R}^2)$  a son support contenu dans une réunion  $\coprod_j D_{i,j}$  (au plus dénombrable) de disques topologiques fermés  $D_{i,j}$  deux à deux disjoints et  $h_i$ -libres.

De plus, on dira que  $h'$  est une modification de  $h$  loin de  $F \subset \mathbb{R}^2$  si  $h_i^{-1}(D_{i,j}) \cap F = \emptyset$  pour tout couple  $(i, j)$ .

On vérifie facilement que:

- $h'$  modification de  $h \Rightarrow \text{Fix}(h) = \text{Fix}(h')$  (en particulier  $h \in \mathcal{H} \Rightarrow h' \in \mathcal{H}$ ). De plus, si  $C$  est un cercle topologique disjoint de  $\text{Fix}(h)$ , alors  $d(h, C) = d(h', C)$ .
- $h'$  modification de  $h$  loin de  $F \Rightarrow h'|_F = h|_F$ .

Il sera aussi commode de donner la définition suivante:

**Définition 2.4** *Pour un cercle topologique  $C$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on dira que l'intersection  $C \cap C'$  de  $C$  avec un autre cercle topologique  $C'$  dans  $\mathbb{R}^2$  (resp. avec un arc simple  $C'$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $C \cap \partial C' = \emptyset$ ) est propre si elle ne contient qu'un nombre fini de points et si elle est transverse.*

Enfin, on désignera par  $\tau$  la translation de vecteur  $(1, 0)$ .

### 3 Propriétés dynamiques des homéomorphismes de Brouwer

**Théorème 3.1** (cf. [Fa] ou [Gu, proposition 3.5])

*Si  $h \in \mathcal{H}$  et  $D$  est un disque topologique fermé tel que  $D \cap h(D) = \emptyset$ , alors  $D \cap h^n(D) = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  (autrement dit, les points du plan errent sous l'action de  $h \in \mathcal{H}$ ). Par conséquent, l'orbite  $\{h^n(m) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  de tout point  $m \in \mathbb{R}^2$  est sans point d'accumulation.*

**Lemme 3.2** *Si  $f_*$  est un homéomorphisme du plan conjugué à la translation  $\tau$  de vecteur  $(1, 0)$  et si  $f \in \mathcal{H}$  coïncide avec  $f_*$  hors d'un compact  $K$ , alors  $f$  est aussi conjugué à  $\tau$ .*

**Preuve du lemme :** Il suffit de faire la démonstration pour  $f_* = \tau$ . On peut supposer que  $K$  est un carré,  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a \text{ et } |y| \leq a\}$ . Si  $L$  est la droite  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -a\}$ , vérifions qu'il existe un entier  $N \geq 0$  tel que  $K$  soit à gauche de  $f^N(L)$ : si ce n'est pas vrai, il existe un point  $p \in K$  qui est à droite de  $f^n(L)$  pour tout  $n \geq 0$ , et donc  $f^{-n}(p)$  à droite de  $L$  pour tout  $n \geq 0$ . Comme le domaine  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a \text{ ou } |y| > a\}$  vérifie  $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$  (car  $f = \tau$  sur  $K^c$ ), on a aussi  $f^{-n}(p) \notin \mathcal{R}$  pour tout  $n \geq 0$ , et donc  $f^{-n}(p) \in K$  pour tout  $n \geq 0$ , ce qui est impossible d'après le théorème précédent. En notant  $\mathcal{U}$  la région du plan entre la droite  $L$  et son image  $f(L)$ , on déduit de ce qui précède que  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{\mathcal{U}}) = \mathbb{R}^2$ . On

construit à l'aide du théorème de Schoënfliès un homéomorphisme  $\varphi$  de  $\overline{U}$  sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  tel que  $\varphi \circ f|_L = \tau \circ \varphi|_L$ . On prolonge  $\varphi$  en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  de la façon suivante : pour tout point  $m \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $m \in f^n(\overline{U})$  et on pose  $\varphi(m) = \tau^n \circ \varphi \circ f^{-n}(m)$ . Par construction, on a bien  $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi = f$ .  $\square$

## 4 Le lemme de Cernavskii-Edwards-Kirby

On convient des notations suivantes :

$$\begin{aligned} Pl(4B; \mathbb{R}^2) &= \{\varphi : 4B \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ continue injective}\}, \\ &\text{muni de la topologie de la convergence uniforme.} \\ Pl(4B; B; \mathbb{R}^2) &= \{\varphi \in Pl(4B; \mathbb{R}^2) \mid \varphi|_B = Id_B\}, \\ \eta &\text{ désigne l'inclusion } 4B \hookrightarrow \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Proposition 4.1** (Handle straightening lemma) *Il existe un voisinage  $V$  de  $\eta$  dans  $Pl(4B; \mathbb{R}^2)$  et il existe une application continue*

$$\begin{aligned} \Psi : V \times [0, 1] &\longrightarrow Pl(4B; \mathbb{R}^2) \\ (\varphi, t) &\longmapsto \Psi(\varphi, t) = \Psi_t(\varphi) \end{aligned}$$

*vérifiant*

- (1)  $\Psi_0(\varphi) = \varphi$  et  $\Psi_1(\varphi) \in Pl(4B; B; \mathbb{R}^2)$ ,  $\forall \varphi \in V$ .
- (2)  $\Psi_t(\varphi)|_{4S^1} = \varphi|_{4S^1}$ ,  $\forall \varphi \in V, \forall t \in [0, 1]$ .
- (3)  $\Psi_t(\eta) = \eta$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

C'est un cas particulier du lemme 4.1 de [EK].

## 5 Position canonique d'un homéomorphisme de Brouwer sur un grand cercle

De façon générale, on dira que  $h \in Homeo(\mathbb{R}^2)$  est *en position canonique* sur un cercle  $C = \partial D$  tel que  $C \cap Fix(h) = \emptyset$  si l'on a :

- $D \cap h(D)$  est connexe
- l'intersection  $C \cap h(C)$  est propre et contient exactement  $2|n-1|$  points, où  $n = d(h, C)$ .

Lorsque  $C$  entoure un point fixe isolé de  $h$ , l'idée de perturber  $h$  par isotopie (sans modifier l'ensemble des points fixes) pour se ramener à cette

situation est déjà présente chez Schmitt (cf. [Sc2]). Mais la principale difficulté, qui est de se ramener au cas où  $D \cap h(D)$  est connexe, n'est pas correctement résolue. L'une des plus importantes lacunes de sa preuve paraît être la suivante: l'auteur semble vouloir traiter de façon analogue (cf. [Sc2, page 238, lignes 15 à 18]) les deux cas ci-dessous (où  $a', b', C'$  sont les images respectives par  $h$  de  $a, b, C$ ):

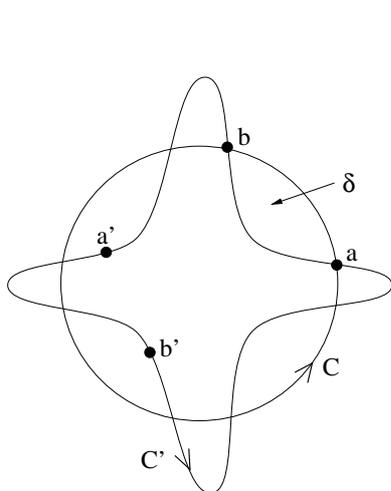


fig. 1.a

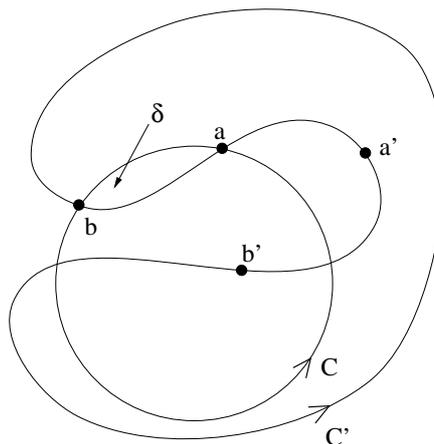


fig. 1.b

Mais il est clair que le disque  $\delta$  bordé par  $[a, b]_C \cup [a, b]_{C'}$  (resp. par  $[a, b]_C \cup [b, a]_{C'}$ ) sur la figure 1.a (resp. sur la figure 1.b) est bien  $h$ -libre dans le premier cas alors qu'il n'a aucune raison de l'être dans le second. La technique utilisée par Schmitt pour "effacer" les points  $a$  et  $b$  sur la figure de gauche ne peut donc être réutilisée sur celle de droite.

Slaminka contourne ces difficultés en modifiant à la fois  $h$  et  $C$  (et en imposant  $d(h, C) \neq 1$ ) mais la situation traitée dans le lemme 5.4 ci-dessous n'est même pas évoquée dans [PS] et une solution est seulement ébauchée dans [Sl, pages 436 et 437].

Etant donné le rôle central de cette "mise en position canonique" dans notre preuve, mais aussi dans [PS], [Sl], [Sc2], ou encore [Br2], nous en donnons une démonstration complète. On pourra aussi regarder la preuve qui suit comme une mise en position canonique autour du point fixe à l'infini, qui est d'indice 2 d'après le théorème de Lefschetz.

**Proposition 5.1** Soient  $h \in \mathcal{H}$  et  $0 < r < R$  tels que

$$(*) \begin{cases} h(0) \in rB \\ rB \subset h^{-1}(R \overset{\circ}{B}) \cap R \overset{\circ}{B} \cap h(R \overset{\circ}{B}) \cap h^2(RB). \end{cases}$$

Alors il existe un cercle topologique  $C'$  bordant  $D' = \overline{\text{int}(C')} \subset RB$  et il existe  $h'$  modification de  $h$  loin de  $rB$  tels que

- (1)  $rB \subset \overset{\circ}{D}' \cap h'(\overset{\circ}{D}')$ ,
- (2)  $C' \cap h'(C')$  est propre, et  $D' \cap h'(D')$  est connexe,
- (3)  $C' \cap h'(C')$  contient exactement 2 points; en notant  $a_1$  (resp.  $a_2$ ) le point de  $C' \cap h'(C')$  où  $h'(C')$  parcouru dans le sens positif entre dans (resp. sort de)  $D'$  on a de plus  $h'^{-1}(a_2), a_2, a_1, h'^{-1}(a_1)$  dans cet ordre sur  $C'$  et  $a_2, h'(a_2), h'(a_1), a_1$  dans cet ordre sur  $h'(C')$ .

**Lemme 5.2** Soient  $h, d = rB, D = RB$  comme dans la proposition 5.1. On suppose de plus que l'intersection  $\partial D \cap h(\partial D)$  est propre et que  $D \cap h(D)$  a  $N + 1 \geq 2$  composantes connexes.

Alors il existe  $h'$  modification de  $h$  loin de  $d \cup \partial D$  et il existe  $C'$  cercle topologique bordant  $D' = \overline{\text{int}(C')} \subset D$  tels que

- (1)  $d \subset \overset{\circ}{D}' \cap h'(\overset{\circ}{D}')$ ,
- (2)  $C' \cap h'(C')$  est propre,
- (3)  $D' \cap h'(D')$  est connexe.

**Preuve du lemme 5.2 :** On note  $C = \partial D$  et  $K_0, K_1, \dots, K_N$  les composantes connexes de  $D \cap h(D)$  en convenant que  $d \subset K_0$ . On choisit alors des arcs simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ( $1 \leq m \leq N$ ) dans  $D \setminus h(D)$ , deux à deux disjoints et vérifiant:

- pour tout  $i = 1, \dots, m$   $\partial\alpha_i = \alpha_i \cap C = \{a_i, b_i\}$ ,
- pour toute composante connexe  $K \in \{K_1, \dots, K_N\}$ , il existe  $i = i(K) \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\alpha_i$  sépare, dans  $D$ ,  $K$  de  $K_0$ .

Quitte à supprimer certains de ces arcs  $\alpha_i$ , on peut supposer  $i(K)$  unique pour chaque composante  $K \in \{K_1, \dots, K_N\}$  (cf. fig.2). On peut aussi supposer (quitte à modifier  $\alpha_i$  près de  $C$ ) que  $h(\partial\alpha_i) \cap C = \emptyset$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ .

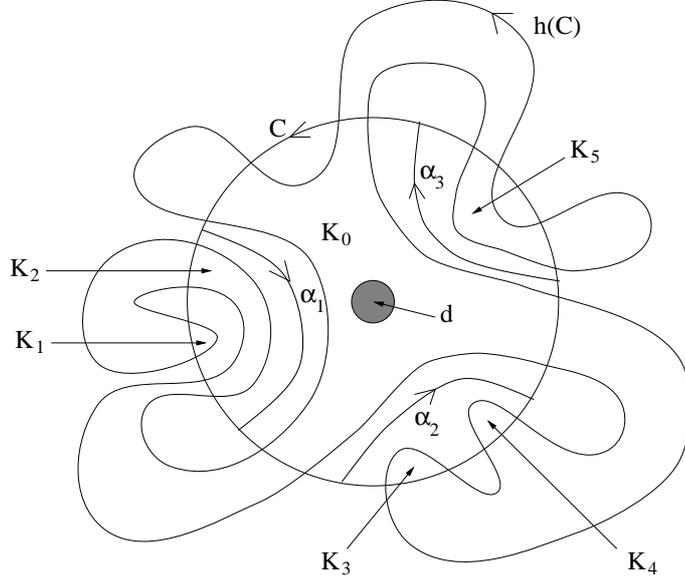


fig. 2

Pour tout  $i = 1, \dots, m$ , on note  $\beta_i$  l'arc dans  $C$  de  $a_i$  à  $b_i$  tel que le cercle topologique  $C_i = \alpha_i \cup \beta_i$  borde  $D_i = \overline{\text{int}(C_i)}$  avec  $d \subset \overset{\circ}{D}_i$ . L'orientation positive des cercles  $C_i$  donne une orientation de chaque  $\alpha_i$ .

Remarquons d'abord que  $d \subset h(\overset{\circ}{D}_i)$ . En effet,  $d \cap h(\alpha_i) \subset d \setminus h^2(D) = \emptyset$ , donc  $d \cap h(C_i) = \emptyset$ , puis  $d \subset h(\overset{\circ}{D}_i)$  car  $h(0) \in d \cap h(D_i)$ .

La technique utilisée par Epstein pour prouver son théorème A1 (cf. [Ep, appendice]) permet d'obtenir  $g$  modification de  $h$  loin de  $d \cup C$  telle que  $C \cap g(\alpha_i)$  soit propre et  $d \subset g(\overset{\circ}{D}_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, m$  (et même telle que les  $g(\alpha_i)$  soient linéaires par morceaux). Ces détails sont laissés au lecteur.

Convenons alors des notations suivantes: lorsque  $g \in \mathcal{H}$  vérifie

$$(\#) \begin{cases} g \text{ est une modification de } h \text{ loin de } d \cup C, \\ d \subset g(\overset{\circ}{D}_i) \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ C \cap g(\alpha_i) \text{ est propre pour tout } i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

on distingue dans l'ensemble des composantes connexes de  $\bigcup_{i=1}^m g(\alpha_i) \setminus C$  les

deux sous-ensembles  $\mathcal{A}_1(g)$  et  $\mathcal{A}_2(g)$  suivants:

- Un arc  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{A}_1(g)$  s'il satisfait aux conditions suivantes:

- (a)  $\gamma = (x, y)_{g(\alpha_i)}$  où  $i \in \{1, \dots, m\}$  et où  $x, y$  sont consécutifs dans la suite  $x_1^i, \dots, x_{n(i)}^i$  des points de  $g(\alpha_i) \cap C$  rencontrés dans cet ordre sur  $g(\alpha_i)$ ,
- (b) en notant  $\mu(\gamma)$  celui des arcs  $[x, y]_C$  ou  $[y, x]_C$  tel que le disque topologique  $\overline{\text{int}(\gamma \cup \mu(\gamma))}$  ne contient pas le disque  $d$ , on a  $\mu(\gamma) \subset g(\overset{\circ}{D})$ ,
- (c)  $\gamma \subset D^c$ .
- Un arc  $\gamma$  appartient à  $\mathcal{A}_2(g)$  s'il vérifie (a) et (b) ci-dessus ainsi que
- (d)  $\gamma \subset \overset{\circ}{D}$ ,

Posons  $D' = \bigcap_{i=1}^m D_i$  et  $C' = \partial D'$ . On se convaincra facilement par un dessin qu'il suffit, pour démontrer le lemme, de trouver  $h' \in \mathcal{H}$  satisfaisant aux conditions (#) ci-dessus et tel que  $\mathcal{A}_1(h') = \emptyset$ ,  $\mathcal{A}_2(h') = \emptyset$ . Il est alors clair que les deux lemmes suivants permettent d'obtenir cette situation. Le premier d'entre eux est facile et bien connu. La preuve du second est plus technique et n'a pas été donnée dans la littérature antérieure.  $\square$

**Lemme 5.3** (effacement d'un arc de  $\mathcal{A}_1$ ) *Soit  $g \in \mathcal{H}$  vérifiant les conditions (#) ci-dessus et tel que  $\mathcal{A}_1(g) \neq \emptyset$ . Alors il existe  $g' \in \mathcal{H}$  satisfaisant aussi aux conditions (#) tel que*

$$\text{Card} \left( \bigcup_{i=1}^m g'(\alpha_i) \cap C \right) \leq \text{Card} \left( \bigcup_{i=1}^m g(\alpha_i) \cap C \right) - 2.$$

**Preuve du lemme 5.3 :** Soit  $\gamma \in \mathcal{A}_1(g)$ . On désigne par  $F$  le disque topologique fermé bordé par  $\gamma \cup \mu(\gamma)$  et par  $i_0$  l'entier dans  $\{1, \dots, m\}$  tel que  $\gamma \subset g(\alpha_{i_0})$ . De  $\mu(\gamma) \subset g(\overset{\circ}{D}) = h(\overset{\circ}{D})$  on déduit que  $g^{-1}(\partial F) \subset \overset{\circ}{D}$  donc  $g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}$ . En particulier le disque  $F$  est  $g$ -libre. De plus  $g^{-1}(\mu(\gamma)) \cap d \subset g^{-1}(C) \cap d = \emptyset$  (car  $g(d) = h(d) \subset \overset{\circ}{D}$ ) d'où  $d \cap g^{-1}(\partial F) = \emptyset$  puis  $d \cap g^{-1}(F) = \emptyset$  (car  $g(0) = h(0) \in d \cap g(d)$  alors que  $d \cap F = \emptyset$ , ce qui exclut la situation  $g(d) \subset F$ ). On peut alors choisir un disque topologique fermé  $E$  tel que :

- (i)  $F \subset \overset{\circ}{E}$ ,
- (ii)  $E$  est  $g$ -libre,

- (iii)  $g^{-1}(E)$  est disjoint de  $d \cup C$ ,
  - (iv)  $E \cap d = \emptyset$ ,
  - (v) la composante connexe de  $E \cap g(\alpha_{i_0})$  contenant  $\gamma$  est un arc  $\tilde{\gamma}$  tel que  $\tilde{\gamma} \cap \mu(\gamma) = \partial\mu(\gamma)$  et  $\tilde{\gamma} \cap \partial E = \partial\tilde{\gamma} \subset \overset{\circ}{D}$ ,
  - (vi)  $E \cap \left( \bigcup_{i=1}^m g(\alpha_i) \right)$  est inclus dans l'adhérence de la composante connexe de  $E \setminus \tilde{\gamma}$  qui contient  $\mu(\gamma) \setminus \partial\mu(\gamma)$ ,
- puis un arc simple  $\eta \subset E$  vérifiant
- (vii)  $\partial\eta = \eta \cap \partial E = \tilde{\gamma} \cap \partial E$ ,
  - (viii)  $\eta \subset \overset{\circ}{D}$
- (cf. fig. 3).

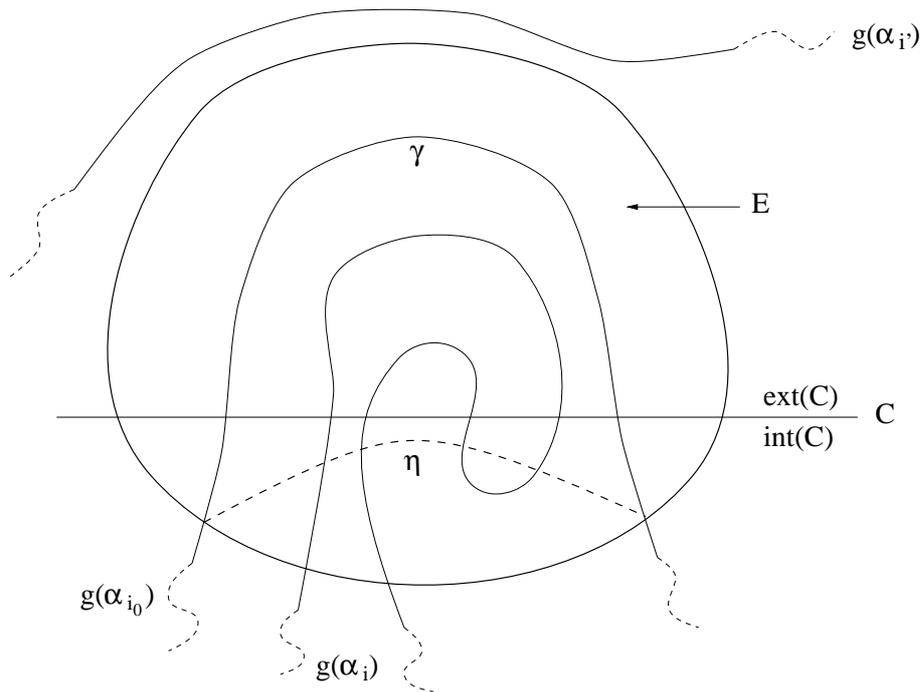


fig. 3

Il suffit alors de choisir  $g' = \varphi \circ g$  où  $\varphi \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  est à support dans  $E$  et vérifie  $\varphi(\tilde{\gamma}) = \eta$ .  $\square$

**Lemme 5.4** (effacement d'un arc de  $\mathcal{A}_2$ ) *Soit  $g \in \mathcal{H}$  vérifiant les conditions (#) ci-dessus et tel que  $\mathcal{A}_2(g) \neq \emptyset$ .*

*Alors il existe  $g' \in \mathcal{H}$  satisfaisant aussi aux conditions (#) tel que*

$$\text{Card} \left( \bigcup_{i=1}^m g'(\alpha_i) \cap C \right) \leq \text{Card} \left( \bigcup_{i=1}^m g(\alpha_i) \cap C \right) - 2.$$

**Preuve du lemme 5.4 :** Soit  $\gamma \in \mathcal{A}_2(g)$ . On note plus simplement  $\mu = \mu(\gamma)$ ,  $F = \text{int}(\gamma \cup \mu(\gamma))$  et  $i_0$  l'entier dans  $\{1, \dots, m\}$  tel que  $\gamma \subset g(\alpha_{i_0})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  posons :

$$F_n = \bigcap_{k=0}^n g^{-k}(F) \quad (\text{ainsi } F_0 = F, F_{n+1} = g^{-1}(F_n) \cap F_n = g^{-1}(F_n) \cap F_0).$$

Comme dans la preuve du lemme 5.3, on vérifie que  $g^{-1}(F) \cap d = \emptyset$  et que  $g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}$  (en particulier  $g^{-1}(\mu) \cap \mu = \emptyset$  et donc  $g^{-(n+1)}(\mu) \cap g^{-n}(\mu) = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ).

D'après le théorème 3.1, il existe un plus petit entier  $p+1 \geq 1$  tel que  $F_{p+1} = \emptyset$ .

– Si  $p+1 = 1$ , alors  $F$  est  $g$ -libre et on procède de façon analogue au lemme 5.3 ;

– Si  $p+1 \geq 2$ , remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \partial F_n \subset \gamma \cup g^{-n}(\mu).$$

En effet, c'est vrai pour  $n = 0$  et si l'on suppose que c'est vrai pour  $n$ , on obtient :

$$\partial F_{n+1} \subset g^{-1}(\partial F_n) \cup \partial F_n \subset g^{-1}(\gamma) \cup g^{-(n+1)}(\mu) \cup \gamma \cup g^{-n}(\mu).$$

Mais  $\partial F_{n+1} \cap g^{-n}(\mu) \subset F_{n+1} \cap g^{-n}(\mu) \subset g^{-n}(g^{-1}(F) \cap \mu) = \emptyset$  (car  $g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}$ ) et  $\partial F_{n+1} \cap g^{-1}(\gamma) \subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset$ , ce qui donne  $\partial F_{n+1} \subset \gamma \cup g^{-(n+1)}(\mu)$ .

Notons  $\partial F_n \setminus \gamma = \coprod_j \mu_{n,j}$  où les  $\mu_{n,j}$  sont des arcs ouverts deux à deux disjoints (en quantité au plus dénombrable) inclus dans  $g^{-n}(\mu)$  et tels que  $\partial \mu_{n,j} \subset \gamma$ . Chacun de ces arcs définit un autre arc fermé  $\gamma_{n,j} \subset \gamma$  qui joint

les deux points de  $\partial\mu_{n,j}$ . Le cercle topologique  $\gamma_{n,j} \cup \mu_{n,j}$  borde le disque  $\delta_{n,j} = \overline{\text{int}(\gamma_{n,j} \cup \mu_{n,j})}$  et on dira que l'arc  $\mu_{n,j}$  est *n-maximal* si  $\delta_{n,j} \not\subset \delta_{n,j'}$  pour tout  $j' \neq j$  (cf. fig. 4).

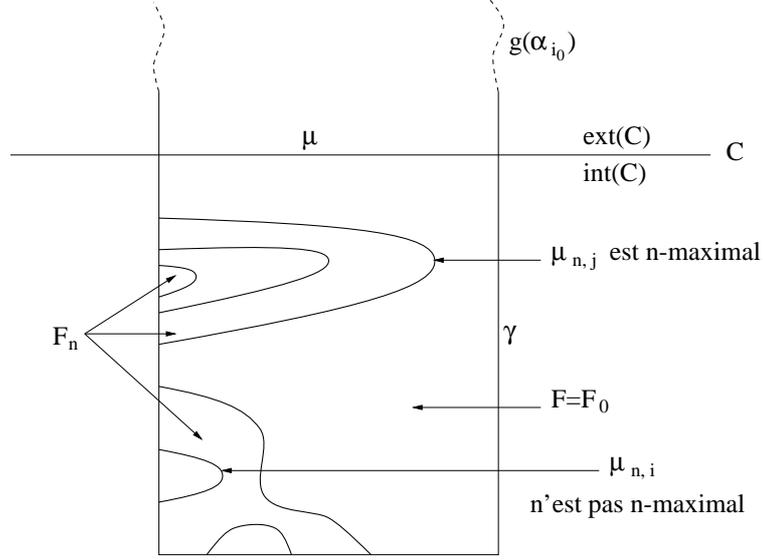


fig. 4

On notera que l'on peut avoir  $F_n \not\subset \bigcup_j \delta_{n,j}$ , mais que  $F_n \setminus \bigcup_j \delta_{n,j} \subset \gamma$ . Cependant, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$F_{n+1} \subset \bigcup_j \delta_{n,j} = \bigcup_{\{j | \mu_{n,j} \text{ n-maximal}\}} \delta_{n,j}$$

$$F_{n+1} \setminus \gamma \subset \bigcup_j \overset{\circ}{\delta}_{n,j}$$

ces inclusions provenant de  $F_{n+1} \subset F_n$ ,  $\partial F_{n+1} \setminus \gamma \subset g^{-(n+1)}(\mu)$  et de  $g^{-(n+1)}(\mu) \cap g^{-n}(\mu) = \emptyset$ .

Remarquons alors que  $\gamma \cup \bigcup_j \delta_{p,j}$  est *g-libre* ; en effet

$$\left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p,j} \right) \cap g^{-1}(\gamma) \subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset$$

et

$$\forall j \quad \partial\delta_{p,j} = \gamma_{p,j} \cup \mu_{p,j} \subset \gamma \cup F_p.$$

Comme de plus

$$\begin{aligned} \gamma \cap g^{-1}(F_p) &\subset F \cap g^{-1}(F_p) = F_{p+1} = \emptyset, \\ F_p \cap g^{-1}(\gamma) &\subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset, \\ F_p \cap g^{-1}(F_p) &= F_{p+1} = \emptyset, \end{aligned}$$

on a aussi

$$\forall j, k \quad \gamma \cap g^{-1}(\partial\delta_{p,k}) = \emptyset \quad \text{et} \quad \partial\delta_{p,j} \cap g^{-1}(\partial\delta_{p,k}) = \emptyset$$

donc

$$\gamma \cap g^{-1}(\delta_{p,k}) = \emptyset \quad \text{car} \quad g^{-1}(\delta_{p,k}) \subset g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}, \quad \text{puis} \quad \delta_{p,j} \cap g^{-1}(\delta_{p,k}) = \emptyset$$

et finalement

$$\left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p,j} \right) \cap g^{-1} \left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p,j} \right) = \emptyset.$$

Démontrons aussi la propriété suivante (qui n'est cependant pas essentielle pour la suite de la preuve) :

l'ensemble  $J_{p-1} = \{j \mid \mu_{p-1,j} \text{ (} p-1 \text{)-maximal et } \delta_{p-1,j} \cap F_p \neq \emptyset\}$  est fini.

Sinon, il existe une suite  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante dans  $\mathbb{N}$  et une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de points deux à deux distincts dans  $F_p$  telles que  $x_k \in \delta_{p-1,j_k}$ . Par compacité de  $F_p$ , on peut supposer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_\infty \in F_p$ . D'autre part, les arcs  $\mu_{p-1,j_k}$  sont deux à deux disjoints et inclus dans  $g^{-p+1}(\mu)$ , donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}(\mu_{p-1,j_k}) = 0$  puis  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}(\delta_{p-1,j_k}) = 0$ , ce qui donne  $x_\infty \in \gamma \cap g^{-p+1}(\mu)$ . On obtient ainsi

$$x_\infty \in g^{-p+1}(\mu) \cap F_p \subset g^{-p+1}(\mu \cap g^{-1}(F)) = \emptyset,$$

ce qui est absurde.

Pour chaque  $j \in J_{p-1}$  on peut choisir un disque topologique fermé  $\Delta_{1,j}$  tel que :

$$(i) \quad \left( F_p \cup \bigcup_k \delta_{p,k} \right) \cap \delta_{p-1,j} \subset \overset{\circ}{\Delta}_{1,j},$$

- (ii)  $\Delta_{1,j}$  est  $g$ -libre ,
- (iii)  $F \cap \Delta_{1,j} \subset \delta_{p-1,j}$  ,
- (iv)  $g^{-1}(\Delta_{1,j})$  est disjoint de  $d \cup C$  ,
- (v)  $\Delta_{1,j} \cap (d \cup C) = \emptyset$  ,
- (vi)  $\Delta_{1,j} \cap \gamma$  est connexe ,

puis un homéomorphisme  $\varphi_{1,j}$  vérifiant

- (vii)  $\text{supp}(\varphi_{1,j}) \subset \Delta_{1,j}$  ,
- (viii)  $\varphi_{1,j}(\delta_{p-1,j}) \subset F \setminus \left( F_p \cup \bigcup_k \delta_{p,k} \right)$

(cf fig. 5).

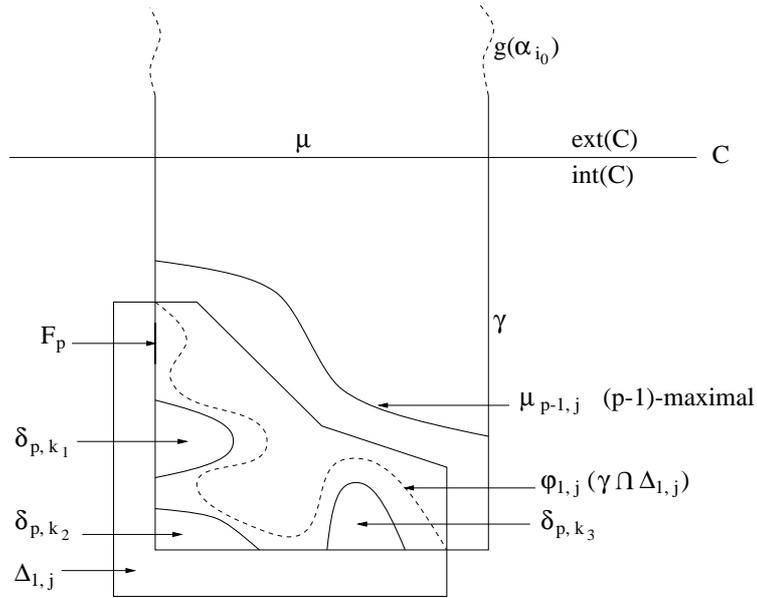


fig. 5

On peut de plus choisir les disques  $\Delta_{1,j}$ ,  $j \in J_{p-1}$ , assez petits pour que  $\Delta_{1,j} \cap \Delta_{1,j'} = \emptyset$  lorsque  $j \neq j'$ .

On définit un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  par

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} \varphi_{1,j}(z) & \text{s'il existe } j \in J_{p-1} \text{ tel que } z \in \Delta_{1,j} \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose

$$g_1 = \varphi_1 \circ g .$$

Par construction (cf (i) et (iii)) on a

$$F \setminus \bigcup_j \delta_{p-1,j} \subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-1}} \delta_{p-1,j} \subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-1}} \Delta_{1,j} \subset F \setminus \left( F_p \cup \bigcup_k \delta_{p,k} \right)$$

donc  $\varphi_1(z) = z$  si  $z \in F \setminus \bigcup_j \delta_{p-1,j}$  et d'autre part, en utilisant la propriété (viii),  $\varphi_1(F) \subset F \setminus F_p$ .

Il est clair que  $g_1$  est une modification de  $g$  loin de  $d \cup C$  (cf (ii), (iv) et (vii)). Enfin, on vérifie que

$$g_1^{-1}(\varphi_1(F_{p-1})) \cap \varphi_1(F_{p-1}) = \emptyset .$$

En effet

$$\begin{aligned} g_1^{-1}(\varphi_1(F_{p-1})) \cap \varphi_1(F_{p-1}) &= g^{-1}(F_{p-1}) \cap \varphi_1(F_{p-1}) \\ &\subset g^{-1}(F_{p-1}) \cap \varphi_1(F) \subset g^{-1}(F_{p-1}) \cap F = F_p . \end{aligned}$$

Or  $\varphi_1(F) \cap F_p = \emptyset$ , ce qui donne le résultat.

Supposons que l'on ait construit  $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq p-1$ , des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  tels que

- $g_\ell = \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1 \circ g$  est une modification de  $g$  loin de  $d \cup C$
- $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell})$  est  $g_\ell$ -libre
- les supports de  $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$  sont disjoints de  $d \cup C$
- $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F) \subset F \setminus F_{p-\ell+1}$
- $z \in F \setminus \bigcup_j \delta_{p-\ell,j} \implies \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(z) = z$ .

Remarquons alors que  $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1 \left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p-\ell,j} \right)$  est  $g_\ell$ -libre. En effet

$$\begin{aligned} & \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1 \left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p-\ell,j} \right) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma)) \\ &= \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1 \left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p-\ell,j} \right) \cap g^{-1}(\gamma) \subset F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset \end{aligned}$$

et

$$\forall j \quad \partial \delta_{p-\ell,j} = \gamma_{p-\ell,j} \cup \mu_{p-\ell,j} \subset \gamma \cup F_{p-\ell}.$$

Comme de plus

$$\begin{aligned} & \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell})) \\ &= \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g^{-1}(F_{p-\ell}) \subset F \cap g^{-1}(F_{p-\ell}) = F_{p-\ell+1} \\ &\quad \text{et } F_{p-\ell+1} \cap \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) = \emptyset, \\ & \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma)) = \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell}) \cap g^{-1}(\gamma) \subset \\ & F \cap \alpha_{i_0} = \emptyset, \\ & \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell})) = \emptyset, \end{aligned}$$

on a aussi

$$\forall j, k \quad \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\partial \delta_{p-\ell,k})) = \emptyset$$

et

$$\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\partial \delta_{p-\ell,j}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\partial \delta_{p-\ell,k})) = \emptyset$$

donc

$$\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,k})) = \emptyset$$

car

$$g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,k})) = g^{-1}(\delta_{p-\ell,k}) \subset g^{-1}(F) \subset \overset{\circ}{D}$$

puis

$$\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,j}) \cap g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell,k})) = \emptyset$$

et finalement  $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1 \left( \gamma \cup \bigcup_j \delta_{p-\ell,j} \right)$  est bien  $g_\ell$ -libre.

Comme pour  $J_{p-1}$ , on vérifie que

$$J_{p-\ell-1} = \{j \mid \mu_{p-\ell-1,j} \text{ (} p-\ell-1 \text{)-maximal et } \delta_{p-\ell-1,j} \cap F_{p-\ell} \neq \emptyset\}$$

est un ensemble fini.

Pour chaque  $j \in J_{p-\ell-1}$  on peut choisir un disque topologique fermé  $\Delta_{\ell+1,j}$  de telle façon que :

- (i)  $\left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_k \delta_{p-\ell,k}\right) \cap \delta_{p-\ell-1,j} \subset \overset{\circ}{\Delta}_{\ell+1,j}$ ,
- (ii)  $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j})$  est  $g_\ell$ -libre,
- (iii)  $F \cap \Delta_{\ell+1,j} \subset \delta_{p-\ell-1,j}$ ,
- (iv)  $g_\ell^{-1}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j})) = g^{-1}(\Delta_{\ell+1,j})$  est disjoint de  $d \cup C$ ,
- (v)  $\Delta_{\ell+1,j} \cap (d \cup C) = \emptyset$  (donc  $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j}) \cap (d \cup C) = \emptyset$ ),
- (vi)  $\Delta_{\ell+1,j} \cap \gamma$  est connexe,

puis un homéomorphisme  $\varphi_{\ell+1,j}$  vérifiant

- (vii)  $\text{supp}(\varphi_{\ell+1,j}) \subset \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j})$ ,
- (viii)  $\varphi_{\ell+1,j}(\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\delta_{p-\ell-1,j})) \subset \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1\left(F \setminus \left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_k \delta_{p-\ell,k}\right)\right)$   
 $= F \setminus \left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_k \delta_{p-\ell,k}\right)$ .

On peut de plus choisir les disques  $\Delta_{\ell+1,j}$ ,  $j \in J_{p-\ell-1}$ , deux à deux disjoints. On définit alors un homéomorphisme  $\varphi_{\ell+1}$  par

$$\varphi_{\ell+1}(z) = \begin{cases} \varphi_{\ell+1,j}(z) & \text{s'il existe } j \in J_{p-\ell-1} \text{ tel que } z \in \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(\Delta_{\ell+1,j}) \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose

$$g_{\ell+1} = \varphi_{\ell+1} \circ g_\ell.$$

Par construction (cf (i) et (iii))

$$\begin{aligned} F \setminus \bigcup_j \delta_{p-\ell-1,j} &\subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-\ell-1}} \delta_{p-\ell-1,j} \subset F \setminus \bigcup_{j \in J_{p-\ell-1}} \Delta_{\ell+1,j} \\ &\subset F \setminus \left(F_{p-\ell} \cup \bigcup_j \delta_{p-\ell,j}\right), \end{aligned}$$

donc  $\varphi_{\ell+1} \circ \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(z) = z$  pour tout  $z \in F \setminus \bigcup_j \delta_{p-\ell-1,j}$  et d'autre part, en utilisant la condition (viii) ci-dessus, on obtient aussi

$$\varphi_{\ell+1} \circ \varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1(F) \subset F \setminus F_{p-\ell}.$$

L'homéomorphisme  $g_{\ell+1}$  est une modification de  $g_\ell$  (donc de  $g$ ) loin de  $d \cup C$  (cf (ii), (iv) et (vii) ci-dessus).

Enfin, vérifions que

$$g_{\ell+1}^{-1}(\varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1})) \cap \varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1}) = \emptyset .$$

Il suffit d'écrire :

$$g^{-1}(F_{p-\ell-1}) \cap \varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1}) \subset g^{-1}(F_{p-\ell-1}) \cap F = F_{p-\ell} .$$

Or  $\varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1}) \cap F_{p-\ell} = \emptyset$ , ce qui montre que  $\varphi_{\ell+1} \circ \dots \circ \varphi_1(F_{p-\ell-1})$  est bien  $g_{\ell+1}$ -libre.

On obtient ainsi  $g_p = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1 \circ g$  modification de  $g$  (donc de  $h$ ) loin de  $d \cup C$ . Comme les supports de  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  sont disjoints de  $d \cup C$ , l'homéomorphisme  $g_p$  satisfait aux conditions (#) et  $g_p(\alpha_i) \cap C = g(\alpha_i) \cap C$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ . De plus,  $\gamma_p = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1(\gamma) \in \mathcal{A}_2(g_p)$ , et  $\overline{\text{int}(\gamma_p \cup \mu(\gamma_p))} = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1(F)$  est  $g_p$ -libre. On termine alors la preuve de ce lemme 5.4 de façon analogue au lemme 5.3.  $\square$

**Preuve de la proposition 5.1** En reprenant la technique de la preuve de [Ep, théorème A1], on obtient  $h_1$  modification de  $h$  loin de  $rB$  telle que

- $h_1$  vérifie aussi les conditions (\*),
- l'intersection  $h_1(C) \cap C$  est propre.

Le lemme 5.2 appliqué à  $h_1$  donne  $h'$  et  $C'$  satisfaisant aux conditions (1) et (2) de la proposition. La condition (3) s'obtient alors en utilisant les arguments contenus dans [Sl, pages 437 à 441] ou bien dans [Sc2, pages 236 et 237], et en s'assurant que ces dernières modifications peuvent être construites sans changer  $h'$  sur le disque  $rB$ .  $\square$

**Remarque 5.5** Les arguments qui précèdent permettent aussi d'obtenir la mise en position canonique d'un homéomorphisme  $h \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\text{Fix}(h) = \{0\}$ , lorsque l'indice du point fixe 0 est différent de 1. En effet, en reprenant les notations de la preuve du lemme 5.4, il existe à nouveau un entier  $p+1$  tel que  $F_{p+1} = \emptyset$  (cf. [Gu, appendice], ou bien [Br1, lemme 3.4]). Le reste de la preuve est alors identique à ce qui précède. Cette remarque permet de reprendre la démonstration dans [Sc2] et de confirmer le résultat lorsque l'indice du point fixe est différent de 1. On montrera dans [Bo3] que ceci est encore vrai dans le cas d'indice 1.

## 6 Preuve du théorème principal

Soient  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\Omega = V_{K,\epsilon}$  un voisinage fondamental de  $h$  dans  $\mathcal{H}$ ,  
i.e.  $\Omega = \{g \in \mathcal{H} \mid d(h(m), g(m)) < \epsilon, \forall m \in K\}$  où  $K$  compact et  $\epsilon > 0$ .

Choisissons  $0 < r < R$  comme dans la proposition 5.1, en imposant de plus que  $K \cup h(K) \subset rB$ . Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que  $r < 1/2$  et que  $RB \cup h^{-1}(RB) \subset \overset{\circ}{B}$ . Par continuité uniforme de  $h$  sur  $4B$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$(m, m' \text{ dans } 4B, \quad d(m, m') < \alpha) \Rightarrow d(h(m), h(m')) < \epsilon.$$

On note  $A = \min\{3, \alpha, \inf_{m \in 4B} d(m, h^{-1}(m))\} > 0$  et on définit un voisinage  $W$  de  $\eta : 4B \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  dans  $Pl(4B; \mathbb{R}^2)$  par

$$W = \{\varphi \in Pl(4B; \mathbb{R}^2) \mid d(m, \varphi(m)) < A \quad \forall m \in 4B\}.$$

### première étape :

On considère  $\Psi$  et  $V$  donnés par la proposition 4.1. On vérifie, en utilisant la propriété (3) de cette proposition et la compacité de  $[0, 1]$ , que l'on peut choisir  $V$  assez petit pour que  $\Psi(V \times [0, 1]) \subset W$ .

Soit  $\Omega'$  un voisinage de  $h$  dans  $\mathcal{H}$  tel que :  $g \in \Omega' \Rightarrow h^{-1} \circ g|_{4B} \in V$ .

Définissons alors

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega' \times [0, 1] &\longrightarrow \Omega \\ (g, t) &\longmapsto \Phi(g, t) = \Phi_t(g) = \begin{cases} g & \text{hors de } 4B \\ h \circ \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B}) & \text{sur } 4B. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $\Psi$  prend ses valeurs dans  $W$  et  $A \leq \inf_{m \in 4B} d(m, h^{-1}(m))$ ,  $\Phi_t(g)$  est un homéomorphisme sans point fixe pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $g \in \Omega'$ . De plus, cet homéomorphisme est dans  $\Omega$ : en effet, pour tout  $m \in K$ , on a d'abord  $\Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B}(m)) \in 4B$  (car  $K \subset B$  et  $A \leq 3$ ) et ensuite  $d(h(m), h \circ \Psi_t(h^{-1} \circ g|_{4B}(m))) < \epsilon$  (car  $A \leq \alpha$  et par choix de  $\alpha$ ). De plus,  $\Phi_1(g)|_B = h|_B$  d'après la propriété (3) de la proposition 4.1.

### deuxième étape :

On choisit alors une modification  $h'$  de  $h$ , loin de  $rB$ , et un cercle topologique,  $C'$  bordant  $D' = \overline{\text{int}(C')} \subset RB$ , donnés par la proposition 5.1.

En particulier, on a une suite  $h_1, \dots, h_n$  dans  $\mathcal{H}$  telle que

- $h_1 = h, h_n = h'$ ,

- $\forall i = 1, \dots, n-1$ ,  $h_{i+1} = \varphi_i \circ h_i$  où  $\varphi_i \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  a son support contenu dans une réunion disjointe  $\coprod_j D_{i,j}$  (qui est de plus finie, comme nous l'avons remarqué dans la preuve du lemme 5.4) de disques topologiques fermés  $h_i$ -libres et tels que  $h_i^{-1}(D_{i,j}) \cap rB = \emptyset$ .

Comme de plus  $RB \cup h^{-1}(RB) \subset \overset{\circ}{B}$ , il est facile de voir, en reprenant la preuve de la proposition 5.1, que l'on peut choisir ces disques  $D_{i,j}$  assez petits pour que  $h_i^{-1}(D_{i,j}) \subset B$ .

Pour chaque  $i = 1, \dots, n-1$  on choisit une isotopie  $(\varphi_{i,t})_{0 \leq t \leq 1}$  de  $Id_{\mathbb{R}^2}$  à  $\varphi_i$  dont le support est inclus dans  $\coprod_j D_{i,j}$  (il suffit de choisir une isotopie d'Alexander dans chaque  $D_{i,j}$ ).

On définit alors une déformation

$$\begin{aligned} \Phi' : \{g \in \mathcal{H} \mid g|_B = h|_B\} \times [0, n-1] &\longrightarrow \Omega \\ (g, t) &\longmapsto \Phi'(g, t) = \Phi'_t(g) \end{aligned}$$

en posant  $\Phi'_t(g) = \begin{cases} g & \text{hors de } B \\ \varphi_{i,t+1-i} \circ h_i & \text{sur } B. \end{cases}$   
pour  $i-1 \leq t \leq i$  et  $1 \leq i \leq n-1$ .

Pour tout  $t \in [0, n-1]$  et tout  $g \in \mathcal{H}$  tel que  $g|_B = h|_B$ , l'homéomorphisme  $\Phi'_t(g)$  est bien sans point fixe (car les  $D_{i,j}$  sont  $h_i$ -libres et  $\varphi_{i,t}(D_{i,j}) = D_{i,j}$ ) et appartient à  $\Omega$  car  $\Phi'_t(g)|_K = g|_K = h|_K$ . D'autre part, on a  $\Phi'_{n-1}(g)|_{D'} = h'|_{D'}$ .

**troisième étape :**

On construit à l'aide du théorème de Schoënfliès un homéomorphisme  $\varphi \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\varphi(S^1) = C'$  et  $\varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1}$ , où  $\tilde{h} \in \mathcal{H}$  est défini par

$$\tilde{h}(m) = \begin{cases} m + (\frac{1}{2}, 0) & \text{si } m \in B \\ m + (\frac{\|m\|}{2}, 0) & \text{si } m \notin B. \end{cases}$$

Comme  $r < 1/2$ , on peut de plus construire  $\varphi$  de telle façon que  $\varphi|_{rB} = Id_{rB}$  (cf. fig. 6).

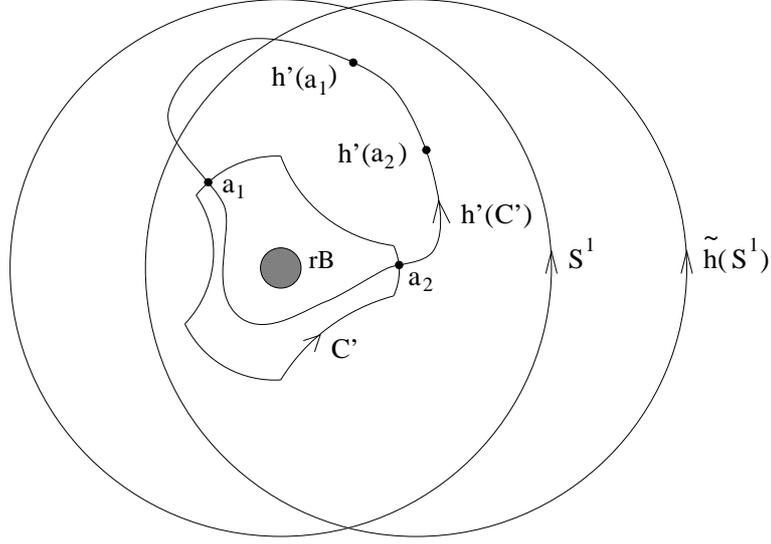


fig. 6

On fixe alors une isotopie  $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq 1}$  de  $\varphi_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$  à  $\varphi_1 = \varphi$ , à support dans  $(rB)^c$  pour définir une déformation

$$\begin{aligned} \Phi'' : \{g \in \mathcal{H} \mid g|_{D'} = h'|_{D'}\} \times [0, 1] &\longrightarrow \Omega \\ (g, t) &\longmapsto \Phi''(g, t) = \Phi''_t(g) = \varphi_t^{-1} \circ g \circ \varphi_t. \end{aligned}$$

Cette déformation prend ses valeurs dans  $\Omega$  :

$$g|_{D'} = h'|_{D'} \Rightarrow g|_K = h'|_K = h|_K \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \varphi_t^{-1} \circ g \circ \varphi_t|_K = h|_K$$

car  $K \cup h(K) \subset rB$  et car  $\varphi_t$  est l'identité sur  $rB$ .

D'autre part, on a par construction  $\Phi''_1(g)|_B = \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi|_B$  et en particulier  $\Phi''_1(g)|_{S^1} = \tilde{h}|_{S^1}$ .

**dernière étape :**

Comme  $\tilde{h}(m) = \|m\| \tilde{h}(\frac{m}{\|m\|})$  pour  $\|m\| \geq 1$ , on peut définir

$$\begin{aligned} \Phi''' : \{g \in \mathcal{H} \mid g|_B = \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi|_B\} \times [0, 1] &\longrightarrow \Omega \\ (g, t) &\longmapsto \Phi'''(g, t) = \Phi'''_t(g) \end{aligned}$$

par

$$\Phi'''_t(g)(m) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi(m) & \text{si } m \in B \\ \tilde{h}(m) & \text{si } 1 \leq \|m\| \leq \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} g((1-t)m) & \text{si } \|m\| \geq \frac{1}{1-t} \end{cases}$$

pour  $0 \leq t < 1$  et

$$h_0(m) = \Phi'''_1(g)(m) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ h' \circ \varphi(m) & \text{si } m \in B \\ \tilde{h}(m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La succession de ces quatre déformations prouve notre théorème principal.  $\square$

**Remarque 6.1** Il résulte du lemme 3.2 qu'un homéomorphisme de Brouwer conjugué à  $\tau$  reste conjugué à  $\tau$  durant les déformations construites ci-dessus. En particulier, ceci montre que l'ensemble des conjugués à  $\tau$  est  $LC^n$  relativement à  $\mathcal{H}$  pour tout  $n$  (cf. [EW]). Les théorèmes de [EW] appliqués à notre corollaire 7.2 montrent alors que l'ensemble des conjugués à  $\tau$  et  $\mathcal{H}$  ont mêmes groupes d'homotopie. Ceci sera utilisé dans [Le] pour prouver que  $\mathcal{H}$  a pour groupe fondamental  $\mathbb{Z}$  et que ses groupes d'homotopie d'ordres supérieurs sont nuls.

## 7 Autres résultats

La proposition suivante affirme qu'un homéomorphisme de Brouwer est toujours "non singulier" si on ne le regarde que sur un ensemble borné.

**Proposition 7.1** *Pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^2$ , il existe  $h_0 \in \mathcal{H}$ ,  $h_0$  conjugué à  $\tau$ , tel que  $h_0|_K = h|_K$ .*

**preuve :** La démonstration de la section précédente donne en particulier un homéomorphisme  $h_0 \in \mathcal{H}$  tel que

- $h_0|_K = h|_K$
- $h_0$  coïncide avec un conjugué à  $\tilde{h}$  hors d'un disque.

Il n'est pas difficile de vérifier que  $\tilde{h}$  est conjugué à  $\tau$  (on pourra, par exemple, considérer la région  $\mathcal{U}$  comprise entre une droite verticale  $L$  et son image  $\tilde{h}(L)$  et s'assurer que  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}^n(\overline{\mathcal{U}}) = \mathbb{R}^2$ , puis procéder comme à la fin de la preuve du lemme 3.2). On conclut grâce au lemme 3.2.  $\square$

On en déduit immédiatement :

**Corollaire 7.2** *L'ensemble  $\{g \in \mathcal{H} \mid g \text{ conjugué à } \tau\}$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .*

On obtient alors une nouvelle preuve du résultat suivant :

**Théorème 7.3**  $\mathcal{H}$  est connexe par arcs.

**preuve :** L'ensemble  $\{g \in \mathcal{H} \mid g \text{ conjugué à } \tau\}$  étant connexe (par arcs),  $\mathcal{H}$  est tout d'abord connexe d'après le corollaire précédent. Comme  $\mathcal{H}$  est de plus localement connexe par arcs d'après le théorème principal, il est aussi connexe par arcs.  $\square$

Nous démontrons pour finir :

**Proposition 7.4**

L'inclusion, entre espaces pointés,  $i : (\mathcal{H}, \tau) \hookrightarrow (\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  induit l'application nulle sur les groupes fondamentaux.

L'outil principal est un théorème de Kneser (cf. [Kn] ou [Fr]) :

**Théorème 7.5** Le groupe des rotations  $SO(2)$  est un rétract par déformation forte de l'espace  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ .

On note  $\Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  l'ensemble des lacets dans  $(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ . Il s'identifie à un sous-ensemble de  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2 \times [0, 1])$ , qui est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Il en est de même de l'ensemble  $\Omega(\mathcal{H}, \tau)$  des lacets de  $(\mathcal{H}, \tau)$ . Dans ce qui suit, on identifie  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  et, pour  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $S(a)$  désigne la similitude  $z \mapsto az$ .

La propriété suivante, remarquée par Schmitt dans [Sc1], permet de caractériser chaque élément de  $\pi_1(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  :

**Propriétés et notations 7.6**

(a) Pour tout  $H = (h_t)_{t \in S^1} \in \Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ , le degré de l'application  $t \mapsto \frac{h_t(b) - h_t(a)}{\|h_t(b) - h_t(a)\|}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux points distincts de  $\mathbb{R}^2$ , ne dépend que de la classe d'homotopie  $[H]$  de  $H$  dans  $\pi_1(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ . On le note  $\Theta(H)$  ou  $\Theta(H; a, b)$  si l'on souhaite préciser le couple  $(a, b)$ .

(b) L'application

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [H] &\longmapsto \Theta(H) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

**Preuve :** (a) L'application

$$\begin{aligned} \Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau) \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (H, (a, b)) &\longmapsto \Theta(H, a, b) \end{aligned}$$

où  $\Delta$  est la diagonale de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , est continue donc constante sur les composantes connexes par arcs de  $\Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau) \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta)$ . Le résultat s'en déduit puisque  $\Delta$  ne disconnecte pas  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et puisque  $\pi_1(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  s'identifie aux composantes connexes par arcs de l'espace  $\Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ .

(b) L'application considérée est clairement un homomorphisme de groupes. Le lacet  $t \mapsto \tau \circ (z \mapsto tz)$ ,  $t \in S^1$ , montre qu'elle est surjective. Pour l'injectivité, notons que quelque soit  $H \in \Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$ , le théorème 7.5 donne un lacet  $H' = (h'_t)_{t \in S^1}$  tel que  $[H] = [H']$ ,  $h'_t = \tau \circ r_t$ , avec  $r_t \in SO(2)$  pour tout  $t \in S^1$ .

Si  $0 = \Theta(H) = \Theta(H')$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 = \text{degré} \left( t \mapsto \frac{h'_t(1) - h'_t(0)}{\|h'_t(1) - h'_t(0)\|} \right) &= \text{degré} \left( t \mapsto \frac{r_t(1) - r_t(0)}{\|r_t(1) - r_t(0)\|} \right) \\ &= \text{degré} (t \mapsto r_t(1)) \end{aligned}$$

donc le lacet  $(r_t)_{t \in S^1}$  est homotope dans  $\Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), Id_{\mathbb{R}^2})$  au lacet constant  $(Id_{\mathbb{R}^2})$  et  $[H'] = [(\tau)]$ .  $\square$

**Propriété et notations 7.7** *Pour tout  $H = (h_t)_{t \in S^1} \in \Omega(\mathcal{H}, \tau)$ , le degré de l'application  $t \mapsto \frac{h_t(a) - a}{\|h_t(a) - a\|}$ , où  $a \in \mathbb{R}^2$ , ne dépend que de la classe d'homotopie  $[[H]]$  de  $H$  dans  $\pi_1(\mathcal{H}, \tau)$ . Il sera noté  $\tilde{\Theta}(H)$  ou  $\tilde{\Theta}(H; a)$  si l'on souhaite préciser le point  $a$ .*

**Preuve :** Elle est voisine de celle de la propriété 7.6 (a).  $\square$

Notons maintenant  $\mathcal{H}_1 = \{h \in \mathcal{H} \mid h(0) = 1\}$ . On a le résultat suivant :

**Lemme 7.8** *L'inclusion  $i_1 : (\mathcal{H}_1, \tau) \hookrightarrow (\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  induit l'application nulle sur les groupes fondamentaux.*

**Preuve :** Pour tout lacet  $H$  dans  $(\mathcal{H}_1, \tau)$ , on obtient grâce aux propriétés 7.6 (a) et 7.7 les égalités suivantes :

$$\Theta(H) = \Theta(H; 0, 1) = \tilde{\Theta}(H; 1) = \tilde{\Theta}(H) = \tilde{\Theta}(H; 0) = 0.$$

La propriété 7.6 (b) permet de conclure.  $\square$

**Preuve de la proposition 7.4 :** Soit  $H = (h_t)_{t \in S^1}$  un lacet dans  $(\mathcal{H}, \tau)$ . On définit  $H' \in \Omega(\mathcal{H}_1, \tau)$  par  $H' = (h'_t)_{t \in S^1}$ ,  $h'_t = S(\frac{1}{h_t(0)}) \circ h_t \circ$

$S(h_t(0))$ . D'après le lemme 7.8, il existe une homotopie  $(g_{t,s})_{\substack{t \in S^1 \\ 0 \leq s \leq 1}}$  dans  $\Omega(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2), \tau)$  telle que  $g_{t,0} = h'_t$  et  $g_{t,1} = \tau$  pour tout  $t \in S^1$ . On pose alors  $h_{t,s} = S(h_t(0)) \circ g_{t,s} \circ S(\frac{1}{h_t(0)})$ .

Ainsi, pour tout  $t \in S^1$  et pour tout  $s \in [0, 1]$ ,

$$h_{t,0} = h_t ,$$

$$h_{t,1} = S(h_t(0)) \circ \tau \circ S(\frac{1}{h_t(0)}) \text{ est la translation de vecteur } h_t(0) ,$$

$$h_{0,s} = \tau.$$

Le lacet de translations  $(h_{t,1})_{t \in S^1}$  est homotope au lacet constant  $(\tau)$  par  $(h_{t,u})_{\substack{t \in S^1 \\ 0 \leq u \leq 1}}$  où  $h_{t,u}$  est la translation de vecteur  $(1-u)h_t(0) + u$ , ce qui démontre notre proposition.  $\square$

Il est clair que ce résultat peut aussi s'énoncer sous la forme suivante :

**Corollaire 7.9** *Soit  $(h_t)_{0 \leq t \leq 1}$  un chemin dans  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que  $h_0 = h_1$  et tel que, pour deux points  $a \neq b$  de  $\mathbb{R}^2$ , on ait*

$$\text{degré} \left( t \mapsto \frac{h_t(b) - h_t(a)}{\|h_t(b) - h_t(a)\|} \right) \neq 0 .$$

*Alors il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $\text{Fix}(h_t) \neq \emptyset$ .*

## References

- [Bo1] M. Bonino, *L'espace des homéomorphismes de Brouwer est connexe par arcs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 Math. **321** (1995), 1359-1361.
- [Bo2] M. Bonino, *Sur l'espace des homéomorphismes de Brouwer*, Thèse, Université de Grenoble 1, (1997).
- [Bo3] M. Bonino, *A dynamical property for planar homeomorphisms. Application to the problem of canonical position around an isolated fixed point*, à paraître dans Topology.
- [Br1] M. Brown, *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*, Houston J. Math. **11** (1985), 455-469.
- [Br2] M. Brown, *On the fixed points index of iterates of planar homeomorphisms*, Proc. AMS **108** (1990), 1109-1114.
- [Br3] M. Brown, *Problem 3.11, page 179, in continuum theory and dynamical systems*, Contemporary Math. **117** (1991).
- [EK] R.E. Edwards and R.C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), 63-88.

- [EW] S. Eilenberg and R.L. Wilder, *Uniform local connectedness and contractibility*, Amer. J. Math. **64** (1942), 613-622.
- [Ep] D.B.A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83-107.
- [Fa] A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, L'enseignement Mathématique **33** (1987), 315-322.
- [Fr] B. Friberg, *A topological proof of a theorem of Kneser*, Proc. AMS **39** (1973), 421-426.
- [Gu] L. Guillou, *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Topology **33** (1994), 331-351.
- [Kn] H. Kneser, *Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen*, Math. Z. **25** (1926), 362-372.
- [Le] F. Leroux, *Sur la topologie de l'espace des homéomorphismes de Brouwer*, Thèse, Université de Grenoble 1 (1997).
- [PS] S. Pelikan et E. Slaminka, *A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **7** (1987), 463-479.
- [Sc1] B. Schmitt, *Index de Seifert et systèmes différentiels à coefficients périodiques*, Thèse, Université de Strasbourg (1973).
- [Sc2] B. Schmitt, *L'espace des homéomorphismes du plan qui admettent un seul point fixe d'indice donné est connexe par arcs*, Topology **18** (1979), 235-240.
- [Sl] E. Slaminka, *Removing index 0 fixed points for area preserving maps of two-manifolds*, Trans. AMS **340** (1993), 429-445.

Université Paris 13  
 Institut Galilée, Dépt de Mathématiques  
 Avenue J.B. Clément  
 93430 Villetaneuse (France)

bonino@math.univ-paris13.fr