École Sup Galilée **2011-2012**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 5 : Distributions tempérées - Transformée de Fourier

Exercice 1

Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $u' + u = \delta_0$. Quelles en sont les solutions tempérées ?

Exercice 2

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ associées aux fonctions suivantes :

1. e^{iax} $(a \in \mathbb{R})$, 2. $\cos(x)$, 3. $x\sin(x)$, 4. $\dfrac{\sin(x)}{x}$

5. $e^{-a|x|}$ $(a > 0)$, 6. $|x|e^{-a|x|}$ $(a > 0)$, 7. $\sin(|x|)$.

Exercice 3

Soit σ_R la mesure de surface de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$. Calculer $\widehat{\sigma}_R$.

Exercice 4

Soient $k > 0$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tels que

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + ku \in L^2(\mathbb{R}).$$

Montrer que $\frac{d^j u}{dx^j} \in L^2(\mathbb{R})$ pour $0 \leq j \leq 4$.

Exercice 5

Soit $P(\xi)$ un polynôme dans $\mathbb{R}^n$ non identiquement nul. On note $P(D)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants associé. Montrer que si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P(D)u = 0$, alors $u = 0$.

Exercice 6

Soit $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients constants tel que :

$$\Sigma := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \ ; \ P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha = 0 \right\} = \{0\}.$$

Montrer que le noyau de $P(D)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est constitué de polynômes.

Exercice 7

On notera dans ce qui suit δ_a la distribution de Dirac au point a. On définit par récurrence la suite de distributions $(T_k)_{k \geq 1}$ par :

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \ \text{ et } \ \forall k \geq 2, \ T_k = T_{k-1} \star T_1.$$

1. Écrire T_k comme combinaison linéaire finie de distributions à supports ponctuels.

2. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{T}_k$ de la distribution à support compact T_k.

3. Pour $k \geq 1$, on pose $f_k(\xi) = \widehat{T}_k\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

4. On note g_k la distribution dont f_k est la transformée de Fourier. Montrer que la suite $(g_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

Indication : On pourra utiliser le fait que, pour $a > 0$, $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

Exercice 8

Pour ψ dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $D_x \psi = \frac{1}{i}\frac{d\psi}{dx}$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $s \in \mathbb{R}$, on pose $e^{is\Delta}\varphi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-is\xi^2}\widehat{\varphi})$.

1. Démontrer que pour toute $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-it\Delta}e^{it\Delta}\psi = \psi$.

2. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{it\Delta} x e^{-it\Delta}\psi = x\psi - 2tD_x\psi.$$

3. En déduire que si $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, on a, pour toute $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ e^{it\Delta}P(x)e^{-it\Delta}\psi = \sum_{k=0}^m a_k(x - 2tD_x)^k \psi.$$

Exercice 9

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $t > 0$, on note φ_t la fonction définie par $\varphi_t(x) = \varphi(\frac{x}{t})$. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En utilisant le fait que $T = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T$, montrer que,

$$\forall t > 0, \ | < T, \varphi_t > | \leq \frac{1}{(2\pi)^n} ||\widehat{T}||_{L^\infty} \ ||\widehat{\varphi}||_{L^1}.$$