

# Table des matières

<b>I. Géométrie Affine</b>	
1. Généralités . . . . .	2
1.1. Définition d'un espace affine . . . . .	2
1.2. Applications affines . . . . .	6
1.3. Le groupe affine . . . . .	9
1.4. Rapport de proportionnalité et théorème de Thalès . . . . .	12
1.5. Théorème de Ménélaüs . . . . .	15
1.6. Droite de Newton d'un quadrilatère complet . . . . .	16
2. Coordonnées barycentriques . . . . .	17
2.1. Barycentre d'une famille de points pondérés . . . . .	17
2.2. Relativement à un repère affine . . . . .	21
2.3. Barycentre et rapport de proportionnalité . . . . .	23
2.4. Calcul matriciel dans un repère affine . . . . .	23
3. Barycentres dans le plan affine . . . . .	25
3.1. Applications simples de l'associativité du barycentre . . . . .	25
3.2. Équations barycentriques de droites . . . . .	26
3.3. Autour du triangle pédal . . . . .	28
3.4. Lemme du chevron . . . . .	32
3.5. Théorème de Routh . . . . .	33
3.6. Théorème de Pappus . . . . .	35
4. Loi de groupe associée à un triangle du plan affine . . . . .	37
4.3. Inversion . . . . .	37
4.4. Multiplication . . . . .	38
4.5. Triangle prépedal . . . . .	40
4.6. Quotient cévien . . . . .	40
5. Sur les coniques affines . . . . .	42
5.1. Équations barycentriques d'une conique . . . . .	42
5.2. Tangentes en un point et directions asymptotiques . . . . .	44
5.3. Diamètres . . . . .	45
5.4. Centre . . . . .	46
5.5. Régionnement lié à une conique . . . . .	46

5.6. Théorème de Carnot . . . . .	47
5.7. Lois de groupe . . . . .	48
6. Présentation axiomatique . . . . .	50
6.1. Théorème fondamental de la géométrie affine . . . . .	51
6.2. Les premiers axiomes . . . . .	53
6.3. Dilatations et translations . . . . .	54
6.4. Construction du corps . . . . .	55
6.5. Coordonnées . . . . .	57
6.6. Retour sur le théorème de Desargues . . . . .	58
6.7. Pappus et la commutativité de $\mathbb{K}$ . . . . .	59
7. Exercices . . . . .	60
<b>II. Espaces affines réels</b>	
1. Topologie canonique . . . . .	67
1.1. Orientation . . . . .	68
1.2. Demi-espaces . . . . .	69
1.3. Segments . . . . .	69
1.4. Mesure de Lebesgue . . . . .	69
2. Arrangements d'hyperplans . . . . .	71
2.1. Définitions . . . . .	71
2.2. Exemples . . . . .	71
2.3. Les treillis et leurs fonctions de Möbius . . . . .	72
2.4. Exemples . . . . .	73
2.5. Généralités . . . . .	75
2.6. Formule de délétion-restriction . . . . .	76
2.7. Cas vectoriel . . . . .	79
2.8. Cas affine . . . . .	80
2.9. Arrangements génériques . . . . .	82
3. Convexité . . . . .	84
3.1. Définitions . . . . .	84
3.2. Théorème de Helly et quelques applications . . . . .	84
3.3. Du théorème de Carathéodory au théorème de Barany . . . . .	87
3.4. Théorème de Hahn-Banach géométrique . . . . .	90
3.5. Points extrémaux . . . . .	93
4. Un avant-goût de géométrie euclidienne . . . . .	95
4.1. La conjecture de Borsuk . . . . .	95
4.2. Partager un gâteau entre frères et sœurs . . . . .	97
4.3. De l'art d'empaqueter . . . . .	99
5. Exercices . . . . .	100

**III. Géométrie affine euclidienne**

1. Le groupe des isométries vectorielles . . . . .	105
1.1. Produit scalaire . . . . .	105
1.2. Le groupe orthogonal . . . . .	106
1.3. Isométries vectorielles en dimension 2 ou 3 . . . . .	107
2. Groupe des isométries affines . . . . .	108
2.1. Espace affine euclidien . . . . .	108
2.2. Isométries affines . . . . .	108
2.3. Isométries affines en dimension 2 et 3 . . . . .	109
3. Généralités . . . . .	112
3.1. Groupe des similitudes vectorielles . . . . .	112
3.2. Similitudes affines . . . . .	112
3.3. Repères affines orthonormés . . . . .	112
3.4. Sphères . . . . .	113
3.5. Orthogonalité . . . . .	114
3.6. Angles d'un plan affine orienté . . . . .	116
4. En dimension 2 . . . . .	119
4.1. Angles d'un triangle euclidien . . . . .	119
4.2. Théorème de l'angle au centre . . . . .	120
4.3. Théorème de Pascal et de Brianchon : version euclidienne . . . . .	122
4.4. Axe radical et autres lignes de niveau . . . . .	125
4.5. Polarité associée à un cercle . . . . .	128
4.6. Relations trigonométriques dans le triangle . . . . .	131
4.7. Triangles semblables . . . . .	136
5. En dimension 3 . . . . .	138
5.1. Produit mixte et produit vectoriel . . . . .	138
5.2. Applications géométriques . . . . .	140
5.3. Angles . . . . .	142
5.4. Formule d'Euler . . . . .	144
5.5. Théorème de Pythagore . . . . .	145
6. En dimension supérieure . . . . .	146
6.1. Déterminants de Gram et distances . . . . .	146
6.2. Relations métriques sur le simplexe régulier . . . . .	147
6.3. Généralisation du théorème de Pythagore . . . . .	149
6.4. Les équations de Dehn-Sommerville . . . . .	150
7. Algébrisations . . . . .	152
7.1. Nombres complexes . . . . .	152
7.2. Quaternions . . . . .	155
7.3. Algèbres de Clifford . . . . .	160
8. Découpages en dimension 2 et 3 . . . . .	169
8.1. Équidécomposabilité . . . . .	169
8.2. Théorème de Bolyai . . . . .	170
8.3. Théorème de Dehn-Hadwiger . . . . .	173

8.4. Ensembles dédoublables . . . . .	176
8.5. Paradoxe de Sierpinski-Mazurkiewicz . . . . .	179
8.6. Paradoxe de Banach-Tarski . . . . .	181
9. Exercices . . . . .	188
<b>IV. Les classiques de la géométrie euclidienne</b>	
1. Points constructibles à la règle et au compas . . . . .	205
1.1. Définitions . . . . .	206
1.2. Corps des nombres constructibles . . . . .	206
1.3. Polygones réguliers . . . . .	210
1.4. Retour sur les impossibilités célèbres . . . . .	211
1.5. Courbes annexes . . . . .	215
1.6. Compas, règle et trisecteur . . . . .	215
1.7. Constructions par coniques . . . . .	217
1.8. Pliages et Origami . . . . .	220
2. Sur les triangles . . . . .	223
2.1. Points de concours et leurs coordonnées barycentriques . . . . .	223
2.2. Sur le triangle orthique . . . . .	233
2.3. L'inégalité d'Erdős-Mordell . . . . .	238
2.4. Trois preuves du théorème de Morley . . . . .	239
2.5. Triangles podaires . . . . .	242
3. Sur les cercles . . . . .	248
3.1. Droite et cercle d'Euler d'un triangle . . . . .	248
3.2. Droites de Simson et droites de Steiner . . . . .	250
3.3. Deux théorèmes de Monge . . . . .	252
3.4. Le théorème de Feuerbach . . . . .	255
3.5. Relation d'Euler, zigzags et grand théorème de Poncelet . . . . .	257
4. Sur les coniques . . . . .	264
4.1. Comme lignes de niveau . . . . .	264
4.2. Propriétés angulaires . . . . .	269
4.3. Ellipses inscrites dans un triangle . . . . .	277
4.4. Théorème de Habets . . . . .	281
5. Sur les polygones du plan . . . . .	284
5.1. Constructions du pentagone régulier . . . . .	284
5.2. Polygones inscriptibles . . . . .	285
5.3. Billards . . . . .	289
5.4. Trajectoires de lumière . . . . .	295
5.5. Polygones entiers . . . . .	300
6. Sur les polytopes en dimension $n$ . . . . .	305
6.1. Déterminants de Cayley-Menger . . . . .	305
6.2. Généralisation de la formule de Héron . . . . .	305
6.3. Généralisation du théorème de Ptolémée . . . . .	306
6.4. Existence de polytopes . . . . .	307

6.5. Polytopes réguliers . . . . .	307
6.6. Rigidité des polyèdres convexes . . . . .	309
7. Pavages . . . . .	312
7.1. Définitions et premiers exemples . . . . .	312
7.2. Groupes cristallographiques . . . . .	314
7.3. Quelle tuile pour paver le plan euclidien ? . . . . .	317
7.4. Triangles d'or et pavage apériodique de Penrose . . . . .	320
7.5. Frises . . . . .	322
8. Systèmes de racines . . . . .	325
8.1. Définition . . . . .	325
8.2. Classification dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	327
8.3. Le diagramme de Dynkin . . . . .	329
9. Exercices . . . . .	332
<b>V. Géométries inversive et sphérique</b>	
1. Cercles et droites : de Reim à Clifford . . . . .	342
1.1. Théorème de Reim, dit des deux cercles . . . . .	343
1.2. Théorème de Miquel, dit des trois cercles . . . . .	344
1.3. Théorème des quatre cercles . . . . .	345
1.4. Théorème des cinq cercles . . . . .	345
1.5. Théorème des six cercles . . . . .	346
1.6. Un point pour quatre droites . . . . .	348
1.7. Un cercle pour cinq droites . . . . .	348
1.8. Théorème de Clifford . . . . .	349
2. Les inversions : définition et premières propriétés . . . . .	351
2.1. Définition générale . . . . .	351
2.2. Sur quelques relations métriques dans $\mathbb{C}$ . . . . .	352
2.3. Hyperplans et sphères . . . . .	353
3. Présentation de la géométrie inversive . . . . .	356
3.1. La projection stéréographique de la sphère de Riemann . . . . .	356
3.2. Le groupe circulaire . . . . .	356
3.3. Présentation axiomatique . . . . .	361
4. Invariants conformes . . . . .	362
4.1. L'invariant de Möbius . . . . .	363
4.2. Invariant conforme de deux cercles de la sphère de Riemann . . . . .	364
4.3. Distance inversive entre deux cercles . . . . .	366
5. Quelques énoncés géométriques . . . . .	367
5.1. Un inverseur . . . . .	367
5.2. Premiers exemples simples . . . . .	368
5.3. Cercles d'Apollonius . . . . .	369
5.4. Problème de Napoléon . . . . .	375
5.5. Porisme de Steiner . . . . .	375
5.6. L'arbelos . . . . .	376

5.7. Une périodicité à la Poncelet . . . . .	377
5.8. Problèmes d'Apollonius . . . . .	378
5.9. Constructions géométriques avec le compas . . . . .	382
5.10. Le théorème de Feuerbach : une preuve inversive . . . . .	385
6. Géométrie sphérique . . . . .	386
6.1. Métrique . . . . .	386
6.2. Aire d'un triangle sphérique . . . . .	386
6.3. Le groupe de la géométrie sphérique . . . . .	388
7. Trigonométrie sphérique . . . . .	389
7.1. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique . . . . .	389
7.2. Triangle polaire . . . . .	391
7.3. Loi des sinus . . . . .	392
7.4. Formulaire de trigonométrie sphérique . . . . .	392
7.5. Cas d'égalité des triangles . . . . .	393
7.6. Problèmes de navigation et triangulation . . . . .	394
8. Application aux polyèdres de l'espace, d'après Hadamard . . . . .	396
8.1. Angles polyèdres et polygones sphériques . . . . .	396
8.2. Retour sur la formule d'Euler . . . . .	398
8.3. Retour sur les polyèdres réguliers . . . . .	398
8.4. Pavages de la sphère . . . . .	401
9. Cartographie . . . . .	403
9.1. Impossibilité des cartes isométriques . . . . .	404
9.2. Projections cylindriques . . . . .	405
9.3. Projections azimutales . . . . .	405
9.4. Projections coniques . . . . .	406
10. Géométrie elliptique : première vision . . . . .	407
10.1. Définition de l'espace . . . . .	407
10.2. Le groupe de la géométrie . . . . .	409
10.3. Invariants . . . . .	409
11. Exercices . . . . .	412

## VI. Géométrie projective

1. Généralités . . . . .	422
1.1. Espaces et sous-espaces projectifs . . . . .	422
1.2. Repères projectifs . . . . .	423
1.3. Groupe projectif . . . . .	425
1.4. Liaison affine-projectif . . . . .	426
1.5. Dualité . . . . .	428
1.6. Incidences, perspectives et réfractions du plan projectif . . . . .	430
1.7. Desargues, Pappus : preuves projectives . . . . .	434
2. Espaces projectifs . . . . .	439
2.1. Espaces projectifs d'hyperplans . . . . .	439
2.2. Espaces projectifs de cercles . . . . .	440

2.3. Espaces projectifs des coniques . . . . .	444
3. Géométrie projective de dimension 1 . . . . .	447
3.1. Homographies . . . . .	447
3.2. Birapport . . . . .	449
3.3. Homographies involutives . . . . .	452
3.4. Division harmonique . . . . .	454
3.5. Retour sur la géométrie inversive . . . . .	456
3.6. Quadrangles harmoniques et réguliers de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . . . . .	459
3.7. Sextangles harmoniques . . . . .	462
4. Géométrie projective de dimension 2 . . . . .	465
4.1. Involutions d'une droite projective du plan . . . . .	465
4.2. Construction du quatrième harmonique . . . . .	466
4.3. Preuves projectives de Ménélaüs et Ceva . . . . .	467
4.4. Formule de Laguerre . . . . .	469
4.5. Métriques de Hilbert . . . . .	470
5. Un bref aperçu de la théorie des invariants . . . . .	471
5.1. Crochets, formes et produits extérieurs . . . . .	471
5.2. Application au théorème de Pappus . . . . .	474
5.3. Application au théorème de Desargues . . . . .	475
6. Coniques projectives . . . . .	475
6.1. Généralités . . . . .	476
6.2. Comme ligne de niveau . . . . .	476
6.3. Intersection d'une conique et d'une droite . . . . .	477
6.4. Classification projective . . . . .	479
6.5. Pôles et polaires . . . . .	482
6.6. La conique vue comme une droite projective . . . . .	486
6.7. Groupe d'une conique . . . . .	491
6.8. Retour sur les homographies d'une droite sur une autre . . . . .	493
6.9. Le théorème de Newton . . . . .	496
6.10. Vision euclidienne . . . . .	498
6.11. Quelques propriétés des faisceaux de coniques . . . . .	501
6.12. Sur les coniques passant par cinq points . . . . .	506
6.13. Courbe duale et formule de Plücker . . . . .	509
7. Géométrie projective sur un corps fini . . . . .	514
7.1. Présentation . . . . .	514
7.2. Le cas de $\mathbb{F}_5$ : retour sur la configuration de Desargues . . . . .	516
7.3. Isomorphisme géométrique entre $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ et $\mathfrak{S}_5$ . . . . .	518
8. Applications à la peinture ou à la photographie . . . . .	520
8.1. Projection centrale . . . . .	520
8.2. Peintures de la Renaissance . . . . .	521
8.3. Perspective et photographie . . . . .	522
9. Constructions géométriques à la règle accompagnée . . . . .	523
9.1. La règle seule . . . . .	523

9.2. Une vraie règle . . . . .	526
9.3. Avec une équerre . . . . .	528
9.4. Avec un unique cercle et son centre . . . . .	529
9.5. Avec un bissecteur . . . . .	530
9.6. La règle marquée . . . . .	532
9.7. Droites se coupant hors de la feuille . . . . .	534
10. Exercices . . . . .	537

## VII. Géométrie hyperbolique

1. Définitions . . . . .	546
1.1. Un calcul élémentaire en guise de motivation . . . . .	546
1.2. Notations et rappels sur les coniques projectives . . . . .	548
1.3. Points et droites . . . . .	549
1.4. Les isométries . . . . .	551
2. Les modèles . . . . .	555
2.1. Le modèle de Klein . . . . .	555
2.2. Le modèle de Minkowski . . . . .	557
2.3. Le disque de Poincaré . . . . .	559
2.4. Le modèle de Beltrami . . . . .	561
3. Les droites remarquables du triangle . . . . .	563
3.1. Médiatrices/milieus et bissectrices/bissecteurs . . . . .	563
3.2. Points de concours . . . . .	565
3.3. Aspects liés au calcul . . . . .	567
4. Longueurs, angles et triangles isométriques . . . . .	570
4.1. Longueurs . . . . .	570
4.2. Angles . . . . .	571
4.3. Triangles isométriques . . . . .	572
4.4. Cercles . . . . .	576
4.5. Horicycles . . . . .	580
5. Le cas réel . . . . .	581
5.1. Longueurs et angles de droites . . . . .	582
5.2. Demi-droites et segments . . . . .	586
5.3. Angles non orientés de demi-droites . . . . .	588
5.4. Relations dans les triangles du modèle de Klein . . . . .	589
5.5. Pavages du plan hyperbolique . . . . .	592
6. Exercices . . . . .	595

## VIII. Une brève introduction à la géométrie algébrique

1. Mémento d'algèbre commutative . . . . .	597
1.1. Sur les idéaux d'un anneau . . . . .	598
1.2. Localisation . . . . .	600
1.3. Sur les modules . . . . .	604
2. Le cas affine . . . . .	605



2.1. Ensembles algébriques . . . . .	605
2.2. Topologie de Zariski . . . . .	606
2.3. Idéal d'un ensemble algébrique . . . . .	607
2.4. Prolongement des identités algébriques . . . . .	608
3. Le Nullstellensatz . . . . .	609
3.1. Les trois formes courantes . . . . .	609
3.2. Une preuve simple dans le cas où $\mathbb{K}$ est non dénombrable . . . . .	610
3.3. Preuve dans le cas général . . . . .	611
4. Cas projectif . . . . .	613
4.1. Ensembles algébriques et topologie de Zariski . . . . .	613
4.2. Nullstellensatz projectif . . . . .	615
4.3. Notion d'espace annelé . . . . .	615
4.4. Un mot sur les morphismes . . . . .	621
5. Théorème de Bézout . . . . .	622
5.1. Un cas simple appliqué à l'hexagramme de Pascal . . . . .	623
5.2. Multiplicité d'intersection . . . . .	623
5.3. Preuve du théorème de Bézout . . . . .	626
6. Applications du théorème de Bézout . . . . .	628
6.1. Points singuliers d'une courbe plane . . . . .	628
6.2. Théorème de Max Noether . . . . .	635
6.3. Retour sur les théorèmes de Pappus et de Pascal . . . . .	637
7. Courbes elliptiques et applications . . . . .	638
7.1. Théorème des huit qui donnent neuf . . . . .	638
7.2. Loi de groupe sur une cubique lisse . . . . .	640
7.3. Le grand théorème de Poncelet . . . . .	642
7.4. Quadrilatères articulés . . . . .	645
8. Exercices . . . . .	648

**Annexe A. Indications de solutions**

Exercices du chapitre I . . . . .	651
Exercices du chapitre II . . . . .	661
Exercices du chapitre III . . . . .	664
Exercices du chapitre IV . . . . .	678
Exercices du chapitre V . . . . .	691
Exercices du chapitre VI . . . . .	696
Exercices du chapitre VII . . . . .	704
Exercices du chapitre VIII . . . . .	706

<b>Bibliographie</b>	<b>711</b>
<b>Références sur <math>\text{\LaTeX}</math></b>	<b>713</b>
<b>Notations</b>	<b>715</b>
<b>Index</b>	<b>719</b>