Feuille d'exercices n^o 1

Division Euclidienne et nombres premiers

Exercice 1. Faire la liste de tous les diviseurs positifs de 12 et de 2^8.

Exercice 2. Décomposer 2008 en produit de nombres premiers. Montrer que 2009 n'est pas premier.

Exercice 3. Déterminer les entiers naturels n tels que $n \mid n+8$.

Exercice 4. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2) \text{ est divisible par } 3.$$

Exercice 6. Soit $n \geq 2$ un entier et $N = n!$.
a) Montrer que les entiers $N+2, N+3, \ldots, N+n$ ne sont pas premiers.
b) Donner un exemple de 10 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 7. Montrer par récurrence que si a est un entier impair, alors 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$.

Exercice 8. Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.

Exercice 9. L'effectif d'une école est compris entre 100 et 200 élèves. Si l'on range les élèves par 3, par 5 ou par 7, il reste toujours 2 élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans cette école ?

Exercice 10. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que $m+n = 101$ et $\text{pgcd}(m,n) = 3$.

Exercice 11. Quel est le plus grand entier naturel dont le cube divise $a = 2^4 \times 3^6 \times 7$?

Exercice 12. (a) Montrer que $a-1$ divise $a^n - 1$. (b) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n+1$ divise n^2+1.

Exercice 13. Démontrer que l'entier $\sum_{i=0}^{26} 2^i$ n'est pas premier.

Exercice 14. (Le petit théorème de Fermat) (1) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq p-1$. Montrer que p divise le coefficient binomial C_p^k. (2) En déduire, par récurrence sur a, que p divise $a^p - a$.

Exercice 15. Déterminer tous les nombres premiers p tels que p divise $2^p + 1$. (Utiliser le petit théorème de Fermat.)

Exercice 16. Montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Soit un nombre rationnel strictement positif. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$.

Pgcd, ppcm et L'algorithme d'Euclide

Exercice 17. Calculer le pgcd et le ppcm de 195 et 143.

Exercice 18. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Montrer que $\text{pgcd}[\text{pgcd}(a,b), c] = \text{pgcd}[a, \text{pgcd}(b,c)]$.

Exercice 19. Soient $a = da'$ et $b = db'$. Montrer que $\text{pgcd}(a,b) = d \Longleftrightarrow \text{pgcd}(a', b') = 1$.

Exercice 20. Soient a, b, c et d des entiers ; démontrer les implications :
(1) $\text{pgcd}(a,b) = d \Longrightarrow \text{pgcd}(ac, bc) = dc$.
(2) $\text{pgcd}(a,b) = 1$ et $\text{pgcd}(a,c) = 1 \Longrightarrow \text{pgcd}(a, bc) = 1$.
(3) $\text{pgcd}(a,b) = 1 \Longrightarrow \forall m, n \geq 2,\ \text{pgcd}(a^m, b^n) = 1$.
(4) $\text{pgcd}(a,b) = d \Longrightarrow \forall m \geq 2,\ \text{pgcd}(a^m, b^m) = d^m$.

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :
(a) $5x - 18y = 4$.
(b) $6x + 15y = 28$.

Exercice 22. Déterminer tous les entiers x, y vériant :
(a) $56x + 35y = 7$.
(b) $56x + 35y = 10$.

Exercice 23. Virée à Carrefour avec les copains. On a dépensé en tout 188 euros, en achetant des CD à 25 euros et des jeans à 21 euros. Combien de CD a-t-on acheté ?

Exercice 24. Déterminer tous les entiers n tels que $8 \mid 15(n+1)$.

Exercice 25. Montrer que si $d = \text{pgcd}(a,b)$ et si le couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $au_0 + bv_0 = d$, les autres couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $au + bv = d$ sont les $(u_k, v_k) \in \mathbb{Z}^2$ définis pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ par

$$\begin{cases} u_k & = u_0 + kb' \\ v_k & = v_0 - ka' \end{cases}$$

où a' et b' sont définis par $a = da'$ et $b = db'$.

Exercice 26. Soit $m = \text{ppcm}(a,b)$. Montrer qu'il existe un diviseur a' de a, un diviseur b' de b, tels que $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $m = a'b'$.

Exercice 27. Montrer que $\text{pgcd}(a,b) \cdot \text{ppcm}(a,b) = |ab|$.

Numération en base b

Exercice 28. Déterminer l'écriture en base 3 de 7465 et l'éctriture de 101 en base 2.

Exercice 29. Soit $n \in \mathbb{N}$.
(1) Trouver une condition néceessaire et suffisante simple pour que n soit divisible par 3, respectivement par 9.
(2) Soit $n = (a_k \cdots a_0)_{10}$ l'écriture de n en base 10. Montrer l'équivalence : $11|n \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_i = 0$.

Compléments

Exercice 30.

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathcal{R}$.

2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\times$ et $(p, q)\mathcal{R}(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.
3. Mêmes questions avec $E = \mathbb{R}^2$ et $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow y = y'$.

Exercice 31. Nous allons prouver l'assertion suivante par récurrence mathématique : soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$ n droites distinctes du plan ($n \geq 2$) telles que deux d'entre elles ne sont jamais parallèles. Alors toutes ces droites ont un point en commun.

1. Pour $n = 2$, l'assertion est vraie, puisque deux droites non parallèles se coupent.
2. Supposons que l'assertion soit vraie pour $n = n_0$. Posons $n = n_0 + 1$ et soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$ n droites vérifiant les hypothèses de l'assertion. D'après l'hypothèse de récurrence, toutes ces droites sauf une (*i.e.* les droites $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$) ont un point un commun ; on le note x. De même, les $n-1$ droites $l_1, l_2, \ldots, l_{n-2}, l_n$ ont un point un commun ; on le note y. La droite l_1 se trouvant dans le deux groupes, elle contient à la fois x et y, et il en est de même pour le droite l_{n-2}. Or l_1 et l_{n-2} se coupent en un seul point, donc, nécessairement, on a $x = y$. Par conséquent, toutes les droites $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sont concourantes au point x.

Quelque chose doit être faux, mais quoi ?

Exercice 32. Commençons par une question simple.
Question : 100 personnes sont disposées en ronde (de façon à ce que chacun voie tous les autres), chacune a un chapeau, qui est soit jaune, soit bleu. Personne ne peut voir la couleur de son chapeau, mais tout le monde voit les chapeaux des autres. Le problème est de donner une stratégie qui permettra au plus grand nombre possible de personnes de connaître avec certitude la couleur de leur chapeau, les contraintes étant les suivantes :
– *une personne est désignée pour parler en premier, puis c'est le tour de la personne située à sa gauche, puis la personne suivante à gauche, et ainsi de suite ...*
– *chaque personne dit "jaune" ou "bleue", les autres entendent ce qui est dit, mais personne ne peut faire de signe, de grimace, ou quoi que ce soit qui sort de l'information binaire "jaune" et "bleue".*

Exemples de stratégies :

1. une stratégie simple, qui permette à la $2^{\text{ème}}$ personne, la $4^{\text{ème}}$, la $6^{\text{ème}}$, la $8^{\text{ème}}$,..., la $98^{\text{ème}}$, la $100^{\text{ème}}$ de répondre juste est la suivante : la $1^{\text{ème}}$ personne à s'exprimer dit la couleur du chapeau de la $2^{\text{ème}}$, la $3^{\text{ème}}$ celle du chapeau de la $4^{\text{ème}}$,..., $99^{\text{ème}}$ celle du chapeau de la $100^{\text{ème}}$.
2. une stratégie qui permette à 2 personnes sur 3 d'être sures de répondre juste est la suivante : la $1^{\text{ère}}$ dit "bleue" si la $2^{\text{ème}}$ et la $3^{\text{ème}}$ ont des chapeaux de la même couleur, et "jaune" sinon. La $2^{\text{ème}}$ n'a alors qu'à regarder la couleur du chapeau de la $3^{\text{ème}}$ pour connaître la couleur du sien, et la $3^{\text{ème}}$ de même. Ensuite, la $4^{\text{ème}}$ dit "bleue" si la $5^{\text{ème}}$ et la $6^{\text{ème}}$ ont des chapeaux de la même couleur, et "jaune" sinon ....

Existe t-il une meilleure stratégie ?
Compliquons maintenant le problème en supposant que $n \geq 2$ couleurs (au lieu de deux) sont possibles pour les chapeaux.
Question : existe-t-il encore une stratégie qui assure à tous sauf au premier de connaître leur couleur ?
Compliquons encore un peu le problème en supposant maintenant l'ensemble des couleurs possibles infini.
Question : existe-t-il encore une stratégie qui assure à tous sauf au premier de connaître leur couleur ?