Généralités sur les codes correcteurs d'erreurs.

Exercice 1. On considère les codes binaires suivants :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{0000,\ 1100,\ 1010,\ 0110,\ 0101, 0011,\ 1111\} \subset (\mathbf{F}_2)^4 \\ C_2 &= \{00000,\ 01010,\ 00001,\ 01011,\ 01001\} \subset (\mathbf{F}_2)^5 \\ C_3 &= \{000000,\ 101000,\ 001110,\ 100111\} \subset (\mathbf{F}_2)^6 . \end{aligned}$$

Dire dans chaque cas si le code est linéaire, et calculer le nombre d'erreurs qu'il peut détecter et corriger.

Exercice 2. 1. Construire un code binaire de 4 mots de longueur 3 et de distance minimum 2.
2. Montrer qu'un code binaire de longueur 3 et de distance minimum 2 possède au plus 4 mots.
3. Quelle est la distance maximale que peut avoir un code linéaire binaire de 64 éléments de longueur 10 ?

Exercice 3. 1. Soit C un code linéaire binaire de longueur n et dimension k. Si t est le nombre d'erreurs qu'il peut corriger, montrer que

$$2^{n-k} \ \geq \ 1 + \mathcal{C}_n^1 + \mathcal{C}_n^2 + \cdots \mathcal{C}_n^t.$$

En déduire que si C est de longueur 17 et de dimension 10, il ne corrige pas plus d'une erreur.
2. Quelle est la plus grande dimension d'un code linéaire binaire de longueur 8 qui corrige 2 erreurs ? Construire un tel code.

Exercice 4. Soit C le code linéaire sur $\mathbf{F}_3$ de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que C est systématique, et en donner une matrice génératrice normalisée G'.
2. Coder le message (12) avec G, puis avec G'.
3. Construire une matrice de contrôle de C et calculer sa distance minimale. Le code est-il MDS ?
4. On reçoit le message (11102) codé par G. Quel est le message d'origine ?
5. Le mot (12121) est-il un mot du code ? Le décoder sachant qu'il a été encodé par G.

Exercice 5. On considère le code linéaire C sur $\mathbf{F}_5$, donné par sa matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que la capacité de correction de C est 1.
1. Donner une matrice génératrice de C.
2. Sous l'hypothèse d'au plus une erreur, décoder les messages (223104) et (110144).

Exercice 6. Code de Hamming binaire de longueur 7.
Soit C le code linéaire binaire de matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la distance minimum de C.
2. Donner une matrice génératrice de C.
3. Le code C est-il MDS ? Parfait ?
4. Décoder quand c'est possible les mots (1111111), (1101011), (0110110) et (1111010).

Exercice 7. Soit C le code linéaire sur $\mathbf{F}_5$ de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner le nombre de mots de C.
2. Le code C est-il systématique ?
3. Montrer que la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de contrôle de C.
4. Calculer la capacité de correction t de C. Le code C est-il MDS ?
5. Décoder quand c'est possible les mots (3001), (1101) et (2311).

Exercice 8. On considère le code C_p sur $\mathbf{F}_p$, de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les longueur et dimension de C_p ? Montrer que $d(C) \leq 3$.
2. Pour $p = 2,\ 3,\ 5$, trouver des matrices de contrôle pour C_p.
3. Pour $p = 2,\ 3,\ 5$, donner les distances minimales.
4. Pour $p = 5$, décoder le mot (111234).