Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E; sous-groupes de $GL(E)$, applications

Plan

Remarque d'ordre général: il faut essayer de proposer un axe de présentation cohérent

Ce qui suit a été fait à la va-vite à la demande des élèves, alors en attendant une version plus travaillée, l'auteur réclame l'indulgence du lecteur.

- Une première partie consacrée à l'étude de $GL_n(K)$ pour lui même:
  - une matrice est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes (lignes) forment une base. Une autre façon de dire la même chose revient à parler de l'action transitive de $GL(E)$ sur les base de E.
  - $GL_n(K)$ dans $\mathbb{M}_n(K)$:
    - le déterminant, le calcul de l'inverse: introduction de $SL_n(K)$;
    - il y est dense;
    - classes d'équivalences, de similitudes et de congruences
    -
  - le groupe $GL_n(K)$:
    - sur un corps fini: calcul du cardinal...
    - ses générateurs: les transvections engendrent $SL_n(K)$ (on peut même se restreindre à celles qui s'écrivent simplement dans la base canonique...), les transvections et les dilatations "simples" engendrent $GL_n(K)$ (attention si on prend toutes les dilatations alors celles-ci suffisent à engendrer $GL_n(K)$). De même en prenant toutes les transvections, pour $1_E \neq f \in SL(E)$ qui n'est pas une affinité (resp. une affinité) alors f est produit de r (resp. $r+1$) transvections avec $r = n - \dim_K \mathrm{Ker}(f - 1_V)$ et que ce nombre est minimal.
    - le centre de $GL_n(K)$ est réduit aux matrices scalaires; introduction du groupe projectif $PGL_n(K)$;
    - le groupe dérivé: $D(GL_n(K)) = D(SL_n(K)) = SL_n(K)$ sauf pour $n = 2$ et $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$; cela découle de la simplicité de $PSL_n(K)$...
    - propriétés topologiques: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe, $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes;
  - ses sous-groupes compacts:
    - $GL_n(K) \simeq GL_m(K)$ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) si et seulement si $n = m$ (regarder les sous-groupes où tous les éléments sont d'ordre 2);
    - soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement s'il est d'exposant fini.
    - introduction des groupes orthogonaux (unitaires): ce sont des compacts (composantes connexes...). Réciproquement tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est contenu dans un conjugué du groupe orthogonal (idem pour $\mathbb{C}$ avec le groupe unitaire)
    - les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$:
      - le cas abélien (facile on trouve des produits de k groupe cycliques avec $k \leq n$)
      - ce sont des compacts donc, à conjugaison près, contenu dans le groupe orthogonal. Pour $n = 2, 3$ on peut proposer la liste, pour les autres, les matrices de permutations fournissent un exemple. Pour $n = 2, 3$, $GL_n(\mathbb{C})$ contient des groupes aussi-gros que l'on veut mais qui sont abéliens ou presque. Cette remarque reste valable en toute dimension au sens où si on veut plonger un gros groupe "compliqué" dans un GL_n alors il faut que n soit grand (cf. ci après)
      - cas de $GL_n(\mathbb{Z})$: si $p \geq 3$ alors la restriction à un sous-groupe fini de la surjection canonique $GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est injective de sorte que le cardinal d'un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ est un diviseur de $(3^n - 1) \cdots (3^n - 3^{n-1})$;
      - théorème de Jordan-Schur: soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ alors G possède un sous-groupe abélien d'indice $\leq (\sqrt{8n}+1)^{2n^2} - (\sqrt{8n}-1)^{2n^2}$

- sous-groupes et décompositions
  - SL_n: $GL_n(K) \simeq SL_n(K) \rtimes K^\times$, le produit peut-être pris direct ssi il existe un morphisme de groupe $K^\times \to K^\times$ inverse de l'élévation à la puissance n
  - $O(n)$:
    * décomposition polaire: $(O,S) \in O(n) \times \mathrm{Sym}^{++} \mapsto OS \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme (ici on peut prouver que $O(n)$ est un sous-groupe compact maximal).
    * décomposition de Cartan: $G = O(n)D_nO(n)$
    * L'enveloppe convexe de $O(n)$ est la boule unité et $O(n)$ en est l'ensemble des points extrémaux.
    * $O(p,q)$: exemple $p=q=1$ définitions des angles hyperboliques et de la géométrie du même nom
  - le Borel: la simplicité de PSL_n revient à dire que les sous-groupes distingués de GL_n sont contenus dans le centre en particulier on a vu que GL_n n'est pas résoluble
    * T_n le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de GL_n est résoluble et le théorème de Lie-Kochin dit que tout sous-groupe résoluble connexe de $GL_n(\mathbb{C})$ est contenu dans un conjugué de $T_n(\mathbb{C})$.
    * décomposition d'Iwasawa: $G = D_nU_nO_n$ où U_n est le sous-groupe unipotent maximal de T_n.
    * plus généralement étant donné un drapeau, on considère le parabolique associé $P = LU$ où $L = \prod GL_{n_i}$ est le sou-groupe de Levi et N son radical unipotent. On a encore $G = PO(n)$.
    * décomposition de Bruhat
  - sous-groupes libres de $GL_2(\mathbb{R})$:
    * Soient $a, b \geq 2$ des réels: $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Le groupe $L_{a,b}$ engendré par A et B est libre et discret dans $SL_2(\mathbb{R})$. Si a est transcendant alors $L_{a,a}$ est libre de rang 2 alors que $L_{1,1}$ ne l'est pas.
    * lemme du ping-pong: soit G un groupe opérant sur un ensemble X et soient H, H' deux sous-groupes de G. On suppose qu'il existe deux parties non vides X, X' de X telles que

      $$hX' \subset X \text{ si } h \in H\backslash 1 \text{ et } h'X \subset X' \text{ si } h' \in H'\backslash 1$$

      Alors si H' n'est pas réduit à 2 éléments et $X' \not\subseteq X$ alors le morphisme canonique $H * H' \to < H, H' >$ est un isomorphisme. (applications à $PSL_2(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
  - sous-groupe arithmétique
    * sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{Z})$ (cf. ci-avant)
    * un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Q})$ est dit **arithmétique** s'il est commensurable avec $SL_2(\mathbb{Z})$. Si on note $N(m)$ (resp. $N'(m)$) le nombre de sous-groupe (resp. de congruence) de $SL_2(\mathbb{Z})$ d'indice $< m$ alors $N'(m)/N(m) \to 0$ quand $m \to +\infty$. Par ailleurs il y a beaucoup de sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas arithmétique: parmi ceux-ci ceux de "première espèce" correspondent à $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ de volume fini.

      Parmi les groupes de matrices SL_2 possède beaucoup de sous-groupes discrets. Pour les autres groupes, Margulis a montré, sous certaines hypothèses qui excluent $SL_2(\mathbb{R})$, que les sous-groupes discrets Γ de $G(\mathbb{R})$ tels que $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ est de volume fini, sont arithmétiques et que pour beaucoup de ces groupes G, tous les sous-groupes arithmétiques sont de congruence.

- exponentielle de matrices et algèbres de Lie
  - définition de l'exponentielle d'une matrice (avec norme d'algèbre): cas des matrices nilpotentes et symétriques réelles
  - définition de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé connexe G de $GL_n(\mathbb{R})$:

    $$\mathfrak{G} = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) / \exp(tM) \in G \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

En utilisant les faits suivants:

$$\lim_{k\to\infty}(\exp(\frac{-X}{k})\exp(\frac{-Y}{k}))^k = \exp(X+Y)$$

$$\lim_{k\to\infty}(\exp(\frac{X}{k})\exp(\frac{Y}{k})\exp(\frac{-X}{k})\exp(\frac{-Y}{k}))^{k^2} = \exp([X,Y])$$

on en déduit que $\mathfrak{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

– un sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{R})$ est discret ssi $\mathfrak{G} = 0$. Plus généralement le théorème de Cartan dit que l'exponentielle réalise un homéomorphisme local $(\mathfrak{G}, 0) \simeq (G, Id)$ et que si G est connexe $\exp(\mathfrak{G})$ engendre G. En particulier deux sous-groupe fermés connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont égaux ssi ils ont même algèbre de Lie
– Le sous-groupe $L_{t,t}$ est libre de générateurs A, B dense dès que $0 < t < 1/4$ et t transcendant

- représentations des groupes finis...

Développements

- générateurs de GL_n: la version simple est celle matricielle en considérant des transvections et dilatations particulières, la version plus difficile est celle où on autorise toutes les transvections et dilatations (pour SL_n on donne alors le nombre optimal de transvections et pour GL_n seules les dilatations sont nécessaires)
- simplicité de PSL_n
- quelques propriétés topologiques: densité et connexité...
- théorème de Burnside (fini ssi d'exposant fini)
- sous-groupes fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ (plus difficile est le théorème de Jordan-Schur)
- compact maximaux de $GL_n(\mathbb{R})$
- théorème de Lie-Kochin
- décomposition d'Iwassawa
- construction de groupes libres denses

Questions

- quels sont les sous-groupes distingués de GL_n?
- quels sont les sous-groupes finis de $GL_3(\mathbb{R})$?
- Montrez en utilisant la décomposition polaire que $O(n)$ est un compact maximal.
- Quelles sont les composantes connexes de $O(p,q)$?
- Décrivez les sous-groupes abéliens de $GL_n(\mathbb{C})$.
- Montrez que les matrices de dilatations engendrent GL_n.

exos

Exercice 1. *Soient a, b des entiers relatifs et soit $B = B_{a,b}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre de base $\{1, i, j, k\}$ où la multiplication est donnée par*

$$i^2 = a,\ j^2 = b,\ ij = k = -ji$$

- *Montrez que $B \otimes \mathbb{Q}(\sqrt{a}) \simeq \mathbb{M}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et en déduire que $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ est soit isomorphe à $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ soit à l'algèbre de quaternion usuelle $\mathbb{H}$.* ***Dans la suite on supposera que*** *$B := B_{a,b}$* ***est telle que*** *$B \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.*

- *Pour* $\alpha = c+di+ej+fk \in B$ *on définit* $\mathbb{N}(\alpha) = c^2 - d^2 - e^2 - f^2 \in \mathbb{Q}$*. Montrez que l'ensemble des* $\alpha \in B \otimes \mathbb{R}$ *tels que* $\mathbb{N}(\alpha) = 1$ *est isomorphe à* $SL_2(\mathbb{R})$*.*

- *Un* ***ordre*** *dans* B *est un sous-anneau* $\mathcal{O}$ *libre de rang* 4*. On définit*

$$\Gamma_{a,b} = \{\alpha \in \mathcal{O} \mid \mathbb{N}(\alpha) = 1\}$$

  ainsi que les sous-groupes de congruence qui lui sont associés. Montrez que $\Gamma_{a,b}$ *est isomorphe à un sous-groupe discret de* $SL_2(\mathbb{R})$*.*

- *Trouvez* $a, b, \mathcal{O}$ *tels que* $\Gamma_{a,} = SL_2(\mathbb{Z})$*.*

- *On peut montrer que* B *n'est pas isomorphe à* $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ *si et seulement si* $\Gamma_{a,b}\backslash\mathcal{H}$ *est compact (cf. la littérature sur le sujet).*