Problèmes d'angles et de distance en dimension deux ou trois

Plan

Remarque: il ne s'agit pas de faire un cours mais de présenter divers problèmes d'angles et de distance. Il faut cependant essayer d'organiser ces exemples sous diverses thématiques en dimension 2 et 3 (pas uniquement en dimension 2!) Parmi celles-ci vous pouvez évoquez les relations habituelles du triangle, les calculs de distance dans l'espace, les lignes de niveau, les polytopes réguliers, les coniques, des problèmes d'optimisation. Il est aussi possible de se placer dans d'autres géométries que la géométrie euclidienne: la plus simple est la géométrie conforme en utilisant les inversions ou les homographies, la géométrie sphérique avec les relations sur les triangles, voire la géométrie hyperbolique avec la notion de δ-hyperbolicité.

- géométrie euclidienne du triangle: (il y a de très nombreuses formules, à vous d'ne choisir quelques unes)
  - triangles semblables: soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles non dégénérés alors $\mathcal{T}/\mathrm{Sim}(E)$ est en bijection avec l'ensemble des couples (θ_1, θ_2) d'éléments de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tels que $\theta_1 + \theta_2 < \pi$. (aussi en bijection avec $(a, b, c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, ou encore $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$);
  - le théorème de Pythagore $\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1$ (il s'agit d'un énoncé de géométrie semblable): on note AH la hauteur menée de A sur BC, les triangles ABC et AHB sont semblables de sorte que $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$. De même on a $CH^2 = CH.CB$ et donc $AB^2 + AC^2 = (BH + HC)BC = BC^2$;
  - la loi des sinus où R est le rayon du cercle circonscrit
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$
  - $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;
  - **Triangles podaires** Soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1, B_1, C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P. Alors ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables et le rapport de similitude est égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.
- calculs de distance avec les déterminants de Gram avec en application le calcul de la distance d'un point à une droite (dans l'espace ou dans le plan), ou à un plan.
- polyèdres réguliers....
- lignes de niveau:
  - avec les angles (orientés ou pas) de droite ou de demi-droites, par exemple $(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = cte \mod 2\pi$
  - avec les distances $\sum_i \alpha_i MA_i^2 = cte$
- coniques euclidiennes avec les définitions monofocales ou bifocales: problème de Steiner et point de Fermat, angles eccentriques et conditions de cocyclicité de 4 points sur une ellipse
- la géométrie conforme en dimension 2 (sphère de Riemann S^2): on prend le plan affine euclidien E auquel on rajoute un point à l'infini $\hat{E} = E \cup \{\infty\}$ (on passe de l'une à l'autre par la projection stéréographique); la topologie sur $\hat{E}$ est celle de E à laquelle on rajoute les ouverts du type $(E\backslash K) \cup \{\infty\}$ où K est un compact de E; la projection stéréographique est un homéomorphisme. Les inversion et les similitudes de $\hat{E}$ engendrent un groupe appelé le groupe conforme ou groupe des homographies; la géométrie conforme est l'étude de l'action du groupe conforme sur $\hat{E}$. Si on rajoute la conjugaison, on obtient le groupe circulaire qui vu comme automorphismes de S^2, correspond aux automorphismes qui conservent les cercles tracés sur S^2. Une transformation circulaire droite ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) (resp. gauche $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) conserve (resp. change en son opposé) les angles orientés de droites. (Attention les distances ne sont pas conservées)

- théorème de Ptolémée et trigonométrie des demi-cordes
- théorème japonais: étant donné un polygone convexe inscrit dans un cercle, pour toute triangulation de ce polygone, la somme des rayons des cercles inscrits est constante

- géométrie sphérique: on note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, orientée.
  - Pour $x, y \in S$, on note $d(x,y) = \arccos(x|y)$: les géodésiques sont les grands cercles.
  - triangles sphériques: les cotés sont les morceaux de grand cercle qui relient les points entre eux, les angles étant définis par l'angle entre les vecteurs tangents dans le plan tangent euclidien: $\alpha = d(x_y, x_z)$ où x_y (resp. x_z) est le deuxième vecteur fourni après x par l'orthonormalisation de Schmidt appliqué à $\{x, y\}$, i.e. $x_y = \frac{\lambda}{||\lambda||}$ avec $\lambda = y - (x|y)x$; c'est aussi l'angle entre les plans correspondants.
  - formule fondamentale de la trigonométrie sphérique:
  $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
  - la loi des sinus s'écrit:
  $$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$
  - pour tout triangle sphérique $|b - c| < a < b + c$ et $a + b + c < 2\pi$ et réciproquement sous ces conditions il existe un triangle sphérique de cotés égaux à a, b, c.
  - deux triangles sphériques ayant les mêmes angles sont isométriques.
  - l'aire d'un triangle sphérique est égale à la somme des angles moins π.
  - toutes les droites se coupent en 2 point, en passant en projectif et donc en identifiant x et $-x$, on obtient un modèle de la géométrie elliptique, où toutes les droites se coupent en un point (pas de droites parallèles).

- problème de trajectoires:
  - problème de l'indien: aller de A à B en passant par une droite donnée
  - soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$, C^1 et $\vec{d}$ une direction du plan alors il existe un unique arc régulier C^2 orienté à isométrie près tel que son vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ vérifie
  $$\forall s \in I \quad (\widehat{\vec{d}, \vec{\tau}(s)}) = \alpha(s) \mod 2\pi$$
  - dans l'espace: un arc C^3 sans point d'inflexion est une hélice si et seulement si ses binormales forment un angle constant avec une direction fixe
  - polygones de lumière: soit P un polygone convexe à n côtés de sommets $A_1, \cdots, A_n$ et soient $\alpha_i \in [A_i, A_{i+1}]$:
    * il existe toujours des polygones inscrits de périmètre minimal, ce sont des polygones de lumières si $\alpha_i \in]A_i, A_{i+1}[$;
    * tout polygone de lumière dans P est de périmètre minimal. S'il en existe un alors
      · si n est impair, il est unique;
      · si n est pair, il en existe une infinité
    * pour $n = 2p$, une condition nécessaire d'existence est $\sum_{i=1}^{p} \widehat{D_{2i-1} D_{2i}} = 0 \mod \pi$ où $D_i = (A_i A_{i+1})$;
    * une condition suffisante d'existence est: il existe une droite D telle que $f(D) = D$ et
    $$D \cap g_i(]A_{i+1} A_{i+2}[) \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \cdots, n$$
    où $f = \sigma_{D_n} \circ \cdots \sigma_{D_1}$ et $g_1 = \sigma_{D_1}$ et $g_{i+1} = \sigma_{g_i}(D_{i+1}) \circ g_i$.
    * pour $n = 3$, un triangle possède un polygone de lumire si et seulement s'il est acutangle.

- problème d'optimisation
  - inégalité isopérimétrique
  - problème de Steiner
  - problème d'Erdos-Mordell
- géométrie hyperbolique: **Le modèle $\mathcal{H}$ du demi-espace de Poincaré**.
  - Les droites hyperboliques de $\mathcal{H}$ sont les droites euclidiennes $x = cte$ ainsi que les demi-cercles centrés sur l'axe des x.
  - La distance hyperbolique entre $x = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ est donnée par la formule

    $$\mathrm{ch} d(z, z') = \frac{(x - x')^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}$$

    et la mesure invariante est $\frac{dxdy}{y^2}$.
  - Le groupe des isométries s'identifie à $PGL_2(\mathbb{R})$, où les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant positif (resp. négatif) agissent par les homographies

    $$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{resp. } z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

    (Ainsi le groupe des automorphismes "holomorphes" et géométriques sont les mêmes)
  - Les cercles hyperboliques centrés en A sont les cercles euclidiens du faisceau de cercles de points limites A et $\bar{A}$ son symétrique par rapport à l'axe des x (autrement dit les cercles tels que $M\bar{A} = kMA$ avec $k > 1$.
  - $\mathcal{H}$ est 2-hyperbolique, i.e. pour tout triangle hyperbolique, tout point situé sur un des cotés est à distance au plus 2 d'un point situé sur l'un des deux autres côtés.

    Indication: on raisonne dans $\mathcal{C}$. Montrez que l'aire hyperbolique d'un disque de rayon ρ est $\frac{\pi}{2}(\mathrm{ch}\rho - 1)$. En déduire que le rayon du cercle inscrit dans un triangle est borné indépendamment du triangle.
- **Métriques de Hilbert**: soit V est un espace réel affine de dimension finie et soit C un convexe ouvert borné. Pour $x \neq y \in C$, on considère la droite (xy) qui coupe l'adhérence de C en deux points u du côté de x et v du côté de y. On pose alors

  $$d(x, y) = \log[x, y, v, u] == \log(\frac{v - x}{v - y} : \frac{u - x}{u - y})$$

  où $\frac{v-x}{v-y}$ désigne le quotient $\frac{f(v)-f(x)}{f(v)-f(y)}$ pour une (et donc toutes) bijection affine f de (xy) sur $\mathbb{R}$. L'application d définit une métrique sur C qui dans le cas du disque unité redonne la distance hyperbolique du disque de Poincaré.

  On vérifie l'inégalité triangulaire pour trois points $x, y, z \in C$. Dans le cas où ils sont alignés alors $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Dans le cas où x, y, z ne sont pas colinéaires, on introduit les points suivants:

  - u, v les points de (xy) sur le bord γ de C;
  - a, c les points de (zy) sur γ;
  - b, d les points de (xz) sur γ;
  - $p = (ab) \cap (cd)$;
  - $u' = (ab) \cap (xy)$, $z' = (pz) \cap (xy)$ et $v' = (dc) \cap (xy)$.

D'après l'invariance du birapport par homographies, on en déduit que

$$[x,z,d,b] = [x,z',v',u'] \qquad [z,y,c,a] = [z',y,v',u']$$

Par ailleurs on a

$$[x,y,v',u'] = [x,z',v',u'].[z',y,v',u'] \qquad [x,y,v,u] \le [x,y,v',u']$$

On en déduit alors que $d(x,y) \le \log[x,z',v',u'] + \log[z',y,v',u'] = d(x,z) + d(z,y)$.

Développements

- triangles podaires
- trissectrices: théorème de Morley
- angles eccentriques sur une ellipse et cocyclicité
- problème de Steiner, point de Fermat
- triangles sphériques
- 2-hyperbolicité du demi-plan de Poincaré
- théorème de Ptolémée avec en application le théorème japonais

Questions

- l'image d'une droite ou d'un cercle par une inversion
- Décrivez $\mathcal{T}/GA(E)$, $\mathcal{T}/SLA(E)$, $\mathcal{T}/O(E)$
- Soient ABC un triangle équilatéral et M un point de son cercle circonscrit. Montrer que l'une des distances MA, MB et MC est égale à la somme des deux autres. En déduire une solution au problème de Fermat
- Prouver, en utilisant le théorème de Ptolémée, la relation $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ pour deux angles a et b tels a soit compris en b (positif) et $\pi/2$.

Exercices corrigés

Exercice 1. ***théorème de Ptolémée*** *Considérons un quadrilatère convexe A, B, C, D. Montrez que le quadrilatère est inscriptible si et seulement si $AC.BD + AB.CD + AD.BC$.*
Remarque: l'application historique de ce résultat est la formule des demi-cordes pour les calculs d'astronomie.

Preuve : Dans le sens direct, considérons une inversion de centre D; elle transforme le cercle en une droite et donc $ac = ab + bc$ avec b situé entre a et c. On rappelle que si M', N' sont les images de M, N par une inversion de centre O et de puissance k alors $M'N' = \frac{|k|.MN}{OM.ON}$. Ainsi on a

$$\frac{AC.DB}{DA.DC.DB} = \frac{AB.DC}{DA.DB.DC} + \frac{BC.DA}{DB.DC.DA}$$

ce qui donne la relation après simplification.

Réciproquement de la relation $AC.BD + AB.CD + AD.BC$, on en déduit la relation

$$\frac{AC.DB}{DA.DC.DB} = \frac{AB.DC}{DA.DB.DC} + \frac{BC.DA}{DB.DC.DA}$$

Considérons alors une inversion de centre D transformant le cercle DAB en une droite ab et le point C en c. La relation devient $ac = ab + bc$ et donc $c \in (ab)$ et par inversion C appartient au cercle DAB.

Exercice 2. *Soient ABC un triangle équilatéral et M un point de son cercle circonscrit. Montrer que l'une des distances MA, MB et MC est égale à la somme des deux autres. En déduire une solution au problème de Fermat*

Preuve : Supposons par exemple que M soit sur l'arc AC qui ne contient pas B. Le quadrilatère $MABC$ est convexe et inscrit dans un cercle, donc d'après le théorème de Ptolémée, on a :

$$MB.AC = MA.BC + MC.AB.$$

Le triangle ABC est équilatéral ; en simplifiant par $AC = BC = AB$, on obtient $MB = MA + MC$.

Supposons que l'angle en A soit le plus grand et construisons A' tel que BCA' soit équilatéral extérieur au triangle. D'après ce qui précède on a $MB + MC \geq MA'$ avec égalité si et seulement si M appartient au petit arc BC. On a ensuite

$$MA + MB + MC \geq MA + MA' \qquad MA + MA' \geq AA'$$

avec égalité si et seulement si M appartient au segment AA'. Ainsi le problème de Fermat est résolu dans le cas où le petit arc BC et le segment $[AA']$ ont un point commun, i.e. dans le cas où l'angle en A est inférieur ou égal à $2\pi/3$.

Exercice 3. *Prouver, en utilisant le théorème de Ptolémée, la relation* $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ *pour deux angles* a *et* b *tels* a *soit compris en* b *(positif) et* $\pi/2$.

Preuve : Considérons un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un demi cercle de diamètre AD et de centre O, de sorte que $AD = 1$, Les triangles ABD et ACD étant rectangles, on a $AB = \sin b$, $AC = \sin a$, mais aussi $BD = \cos b$ et $CD = \cos a$. Dans BCD la relation des sinus ($a/\sin A = 2R$) donne $BC = \sin(a-b)$, toujours car $AD = 1$. Le théorème de Ptolémée affirme que $ACxBD = ABxCD + BCxAD$, soit encore, puisque $AD = 1$: $\sin(a-b) = BC = ACxBD - ABxCD$, d'où la relation $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Exercice 4. ***théorème japonais****: étant donné un polygone convexe inscrit dans un cercle, pour toute triangulation de ce polygone, la somme des rayons des cercles inscrits est constante*

Preuve : On commence par le montrer pour un quadrilatère, puis on continue par récurrence sur le nombre de côtés du polygone convexe, en étant attentif à montrer que l'on peut effectivement utiliser l'hérédité dans la preuve par récurrence.
Étape 1: cas du quadrilatère
Notations: en notant a, b, c les côtés d'un triangle, R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit on sait que $2Rr = abc/(a+b+c)$ qui s'obtient par exemple à partir de $abc/4R = S = pr$ (avec p le demi périmètre). On note a, b, c, d les longueurs AB, BC, CD, DA, puis $m = AC$ et $n = BD$. On notera S_1, S_2 les aires de ABC et ACD, S'_1 et S'_2 les aires de ABD et BCD.
Les hypothèses: $ABCD$ inscrit signifie que les quatres triangles en jeu ont même cercle circonscrit de rayon R. Le fait que $ABCD$ soit convexe entraine que $S1 + S2 = S'1 + S'2 = S$ l'aire de $ABCD$, ce qui se traduit par : $(ab + cd)m = (ad + bc)n = S$, en multipliant les aires par le rayon R commun aux 4 triangles. Le théorème de Ptolémée (inscrit + convexe) permet d'écrire $ac + bd = mn$.
Preuve: on part de

$$2R(r_1 + r_2) = \frac{abm}{a+b+m} + \frac{cdm}{c+d+m} \text{ et } 2R(r'_1 + r'_2) = \frac{adn}{a+d+n} + \frac{bcn}{b+c+n}$$

On montre alors, à l'aide des relations ci-dessus, que le rapport des deux $(r_1 + r_2)/(r'_1 + r'_2)$ est égal à 1.

Étape 2: récurrence sur le nombre n de côtés

- Vrai pour $n = 4$ (étape 1)
- Pour n supérieur, dans toute triangulation du polygone, il existe un triangle formé de trois points consécutifs $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, sinon on n'a pas une triangulation (on se ramène au cas $n = 4$).
- Considérons un triangulation. On peut supposer, à une renumérotation près, qu'elle contient le triangle $A_1A_2A_3$.
- On applique alors l'hypothèse de récurrence sur $A_1A_3A_4...A_n$, le cas $n = 4$ sur $A_1A_2A_3A_4$. Il en résulte que le résultat est vrai pour la triangulation contenant $A_1A_2A_4$ et $A_2A_3A_4$, donc par hypothèse de récurrence pour toute triangulation contenant $A_2A_3A_4$.
- On atteint ainsi toutes les triangulations possibles

Exercice 5. ***Problème de Lehmus-Steiner:*** *montrez qu'une triangle est isocèle si et seulement s'il possède deux bissectrices de même longueur.*

Preuve : Evidemment si le triangle est isocèle, il possède deux bissectrices de même longueur. Réciproquement soit ABC un triangle tel que $\hat{B} > \hat{C}$, montrons que la bissectrice BB' est plus courte que la bissectrice CC'. Soit M le point d'intersection de CC' et du cercle circonscrit à BCB': on a $\widehat{MBB'} = \widehat{MCB'}$ parce qu'ils interceptent le même arc. Donc $\widehat{MBC} = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$ est plus grand que $\widehat{BCB'} = \frac{\hat{C}+\hat{C}'}{2}$. L'arc MC intercepté par $\widehat{MBC}$ est donc supérieur à l'arc BB' intercepté par $\widehat{BCB'}$, puisqu'ils sont tous les deux intérieurs à un droit. Mais M est intérieur au segment CC' car $\widehat{MBB'} < \widehat{ABB'}$. Par suite $CC' > CM > BB'$: contradiction.

Exercice 6. ***théorème d'Erdos-Mordell:*** *étant donné un point I situé à l'intérieur ou sur la frontière d'un triangle, la somme de ses distances aux sommets est au moins égale au double de la somme de ses distances aux trois cotés du triangle, l'égalité n'ayant lieu que si et seulement si le triangle est équilatéral et de centre I.*

Preuve :

Exercice 7. ***Triangles podaires*** *Soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1, B_1, C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P.*

(i) Montrez que ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables.

(ii) Calculez le rapport de similitude.

(iii) Trouver P tel que l'aire de $A_3B_3C_3$ soit minimale.

Preuve : (i)Remarquons déjà que A, C_1, P, B_1 (resp. B, A_1, P, C_1, resp. C, B_1, P, A_1) sont cocycliques car les triangles rectangles AC_1P et APB_1 ont même hypoténuse. Par permutation circulaire, il s'agit donc de montrer que les angles $\hat{A}$ et $\hat{A}_3$ ont même mesure. Or on a $\alpha := (\widehat{AC_1, AP}) = (\widehat{B_1C_1, B_1P})$ car A, C_1, P, B_1 sont cocycliques, qui est égal à $(\widehat{B_1A_2, B_1P})$ car C_1, A_2, B_1 sont alignés, qui est égal à $(\widehat{C_2A_2, C_2P})$ car A_2, B_1, C_2, P sont cocycliques, qui est égal à $(\widehat{C_2B_3, C_2P})$ car A_2, B_2, P sont alignés, qui est égal à $(\widehat{A_3B_3, A_3P})$ car B_3, C_2, A_3, P sont cocycliques. De la même façon on a $(\widehat{AP, AB_1}) = (\widehat{A_3P, A_3C_3})$ et donc

$$(\widehat{AC_1, AP}) + (\widehat{AP, AB_1}) = (\widehat{A_3B_3, A_3P}) + (\widehat{A_3P, A_3C_3})$$

d'où le résultat.

(ii) Notons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$) les angles $\widehat{PAA_1}$, $\widehat{PBB_1}$, $\widehat{PCC_1}$ (resp. $\widehat{C_1AP}$, $\widehat{A_1BP}$, $\widehat{B_1CP}$). On a alors $\sin \alpha_1 = PA_1/PA$ ... de sorte que $PA_3/PA = \sin \alpha_1 . \sin \alpha_2 . \sin \alpha_3 = \sin \beta_1 . \sin \beta_2 . \sin \beta_3$ qui est encore égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.

(iii) Il s'agit donc de maximiser $(\sin \alpha_1 . \sin \beta_1)(\sin \alpha_2 . \sin \beta_2)(\sin \alpha_3 . \sin \beta_3)$ sachant que $\alpha_i + \beta_i$ est constant. Ainsi le maximum est obtenu pour $\alpha_i = \beta_i$ ou $\alpha_i = \pi - \beta_i$ cas exclu puisque l'on est à l'intérieur du triangle. Le résultat découle alors par compacité du fait qu'aux bords, i.e. sur les côtés du triangle, l'aire est nulle.