# Endomorphismes nilpotents

**Plan**

*Remarque d'ordre général*: comme pour la leçon *Endomorphismes diagonalisables*, il faut se démarquer de la leçon *Réduction des endomorphismes*, en se concentrant sur les endomorphismes nilpotents. Comme motivation on peut mentionner la décomposition de Dunford. Il est en outre bienvenu de commencer par préciser les notions que l'on suppose connues (rapport endomorphismes-matrices, notions de valeurs propres, polynôme caractéristique, polynôme minimal, espaces caractéristiques... ) afin de se concentrer sur le sujet. C'est donc a vous de bien préciser les choses.

- après avoir donné la définition d'un endomorphisme nilpotent et de l'indice de nilpotence (illustrer avec des exemples), il faut donner des caractérisations (polynôme caractéristique, polynôme minimal, 0 est la seule valeur propre, dans une base sa matrice est triangulaire supérieure, en caractéristique nulle $\mathrm{Tr} u^p = 0$ pour tout $p$).

- Il me parait difficile d'éviter les invariants de similitude et la décomposition de Jordan. Parler des noyaux emboîtés du calcul de leur dimension via les invariants de similitude (cf. le livre de Mneimné pour une présentation via les tableaux de Young: pour tout $k \geq 1$, la $k$-ième colonne est de longueur $\dim \operatorname{Ker} a^k - \dim \operatorname{Ker} a^{k-1}$).

- Si $u$ et $v$ sont nilpotent et commutent alors $u+v$ est nilpotent. On pourra montrer qu'un sous-espace vectoriel du cône nilpotent est de dimension inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$ et que ce maximum est atteint en considérant les matrices strictement triangulaires supérieures ou inférieures. Par ailleurs le théorème de Engel qui dit que tout sous-espace vectoriel stable par crochet du cône nilpotent est conjugué à un sous-espace des matrices strictement triangulaires supérieures.

- Faites un paragraphe topologique: le cône nilpotent, l'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan de taille maximale est l'ensemble des nilpotents, et plus généralement décrire l'ordre de Chevalley sur les orbites nilpotentes, défini par $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ si et seulement si $\mathcal{O}_1$ est dans l'adhérence de $\mathcal{O}_2$: celui-ci correspond à l'ordre habituel sur les tableaux de Young.

- vous pouvez introduire l'exponentielle (définition particulièrement simple) et montrer que exp réalise un homéomorphisme des nilpotents sur les unipotents

- Calcul de la dimension du commutant.

**Développements**

- théorème de Engel
- description de l'ordre de Chevalley
- exp réalise un homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents.
- Jordan
- Burnside: un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement s'il est d'exposant fini
- Dunford
- l'image de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ par l'exponentiel est l'ensemble des matrices qui sont des carrés.

**Questions**

- A partir de l'inégalité $\dim \operatorname{Ker} A \leq \dim \operatorname{Ker} A^2 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} A$, étudier les cas extrêmes.
- La matrice de Jordan de taille maximale est-elle un carré dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$? Cas général?

- On considère la suite des dimensions des noyaux emboîtés. Décrivez l'ensemble des suites obtenues.
- Calculer la dimension du commutant d'un endomorphisme nilpotent.
- Un sous-espace vectoriel maximal dans le cône nilpotent est semblable au matrice strictement triangulaire supérieure.
- L'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan de taille maximale est l'ensemble des nilpotents.
- Donner les sous-espaces stables sous l'action d'un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est un bloc de Jordan de taille maximal.
- Quels sont les endomorphismes (nilpotents) qui ne possèdent qu'un nombre fini de sous-espaces stables?
- Quels sont les endomorphismes (nilpotents) $u$ tels que tout sous-espace stable est de la forme $\operatorname{Ker} P(u)$ ou $\operatorname{Im} P(u)$ pour $P$ un polynôme.
- Quel est le sous-espace vectoriel engendré par le cône nilpotent?
- Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de $M$ en semi-simple plus nilpotent. Montrez que $S$ est dans l'adhérence de la classe de similitude de $M$.
- Donner, en fonction des invariants de similitude, la dimension du commutant d'un endomorphisme nilpotent.
- Montrer que tout hyperplan $H$ de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ contient au moins $n^2 - n - 1$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.

**Exercices corrigés**

**Exercice 1.** *(a) Montrer que si* $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$*, alors il existe un pseudo-inverse* $X$*, i.e. tel que* $AX = XA$*,* $AXA = A$ *et* $XAX = X$*.*

*(b) A quelle condition sur les invariants de similitude de* $A$ *a-t-on* $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 2 \dim \operatorname{Ker} A$*?*

*Preuve :* (a) On décompose l'espace en sous-espace caractéristique pour $A$. Sur les espaces caractéristiques associés aux valeurs propres non nulles, on pose $X = A^{-1}$. Sur l'espace caractéristique associé à la valeur propre 0, l'hypothèse implique que $A$ y est nulle, on prend donc $X$ quelconque.

(b) Cela correspond à dire que les deux première colonnes du tableau de Young associé à $A$ sont de même longueur ce qui est équivalent à demander qu'il n'y ait aucun bloc de Jordan de taille 1.

**Exercice 2.** *On considère la suite des dimensions des noyaux emboîtés. Décrivez l'ensemble des suites obtenues.*

*Preuve :* Notons pour $k \geq 0$, $a_k := \dim \operatorname{Ker} a^k$. Il s'agit d'une suite croissante majorée par la dimension de l'espace $n$. On a $a_0 = 0$ et si $a_1 = 0$ alors pour tout $k$, $a_k = 0$. Plus généralement soit $r$ le premier indice tel que $a_r = a_{r+1}$. Soit alors $x \in \operatorname{Ker} a^{r+2}$ de sorte que $a(x) \in \operatorname{Ker} a^{r+1} = \operatorname{Ker} a^r$ et donc $a^{r+1}(x) = 0$ soit $x \in \operatorname{Ker} a^{r+1}$ et donc $a_{r+1} = a_r$ et par récurrence $a_r = a_{r+k}$ pour tout $k \geq 0$.

On introduit la suite $d_k := a_k - a_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Remarquons que cette suite est décroissante: en effet $a$ induit un endomorphisme injectif de $\operatorname{Ker} a^k / \operatorname{Ker} a^{k-1}$ dans $\operatorname{Ker} a^{k-1} / \operatorname{Ker} a^{k-2}$.

Réciproquement soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite croissante majorée par $n$ telle que la suite des différences $d_k$ est décroissante. On considère alors la matrice nilpotente $A$ sous forme de Jordan dont le nombre de blocs de Jordan de taille $r$ est égal à $d_r - d_{r+1}$. On vérifie alors aisément que $a_k = \dim \operatorname{Ker} A^k$.

Par ailleurs, une manière graphique de représenter les classes de similitude de matrices nilpotentes, est d'introduire le diagramme de Young dont les colonnes sont les $d_i$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les blocs de Jordan se lisent alors sur les lignes.

**Exercice 3.** *Montrer qu'un sous-*$\mathbb{R}$*-espace vectoriel du cône nilpotent est de dimension inférieur à* $\frac{n(n-1)}{2}$ *et que ce maximum est atteint.*

*Preuve :* On considère la forme quadratique $q$ définie sur l'espace des matrices qui à $X$ associe $\mathrm{Tr} X^2$. De manière évidente le cône isotrope est constitué de vecteurs isotropes de sorte que l'espace vectoriel en question sera totalement isotrope.

Par ailleurs, si $X \neq 0$ est symétrique (resp. antisymétrique) alors $q(X) > 0$ (resp. $q(X) < 0$) de sorte que la signature de $q$ est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$. Ainsi un sous-espace totalement isotrope est de dimension inférieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{2}$.

L'égalité est clairement atteinte pour les matrices strictement triangulaires supérieures.

**Exercice 4.** *Soit $u$ un endomorphisme nilpotent; pour tout $i \geq 0$, on note $K_0^i$ le noyau de $u^i$ soit $d_0^i$ sa dimension. On suppose que la suite $(d_0^i)$ est égale à $(4, 7, 9, 10, 10, \cdots)$. Déterminer alors les invariants de similitudes de $u$.*

*Preuve :* On note $V = K^n$ l'espace vectoriel en question, que l'on munit de la structure de $A = K[X]$-module définie par la matrice à étudier; on notera $a_r(X)|\cdots|a_1(X)$, ses invariants de similitude. Le polynôme minimal est alors $a_1(X)$ et le polynôme caractéristique est le produit des invariants de similitude. On note $r$ l'indice $i$ tel que $K_0^{i-1} \neq K_0^i = K_0^j$ pour tout $j \geq i$. L'entier $r$ est la multiplicité de 0 dans $a_1(X)$ tandis que sa dimension est la multiplicité de 0 dans le produit des $a_i$. On note $\delta^i = \dim K_0^i - \dim K_0^{i-1}$; partant de la forme de Jordan il est aisé de voir que $\delta_0^i$ est égal au nombre de $a_k$ divisible par $X^i$. On remarque ainsi que le nombre $r$ d'invariants de similitude est égal au maximum des dimensions des sous-espaces propres.

Ainsi le nombre d'invariants de similitude est égal à la dimension du noyau soit donc 4 invariants de similitude $a_1, a_2, a_3, a_4$. Le polynôme minimal s'écrit sous la forme $X^{\alpha_1}$ avec $\alpha_1 = r_0$ où $r_0$ est l'indice $i$ tel que $K_0^{i-1} \neq K_0^i = K_0^{i+k}$ pour tout $k \geq 0$, soit donc ici $a_1(X) = X^4$. De même on écrit les $a_i(X)$ sous la forme $a_i(X) = X^{\alpha_i}$ pour $2 \leq i \leq 4$ avec $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ et $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 10$.

On introduit comme ci-avant $\delta_0^i = \dim K_0^i - \dim K_0^{i-1}$; $\delta_0^i$ est le nombre d'invariants de similitude divisibles par $X^i$. De $\delta_0^4 = 1$ on déduit $\alpha_2 \leq 3$; en outre $\delta_0^3 = 2$ impose $\alpha_2 \geq 3$ soit $\alpha_2 = 3$ et $\alpha_3 \leq 2$. Enfin $\delta_0^2 = 3$ donne $\alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 1$.

**Exercice 5.** *A quelles conditions sur les invariants de similitude de $A$ nilpotent, l'équation $X^2 = A$ a-t-elle des solutions?*

*Preuve :* On raisonne par analyse et synthèse. Soit donc $X$ nilpotent que l'on écrit sous forme de Jordan: $x_k$ est le nombre de blocs de Jordan de taille $k$. La décomposition de Jordan de $J_k^2$ comporte deux blocs $J_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ et $J_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$.

On en déduit alors que le tableau de Young associé à $X^2$ vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes:

- il ne contient pas deux colonnes consécutives de même longueur impaire;
- si on groupe les lignes deux par deux en partant du haut (en partant de la convention que l'on a une dernière ligne de longueur nulle dans le cas où le noyau est de dimension impaire), alors les lignes d'une même paire diffèrent d'au plus une case.

La synthèse est alors évidente.

**Exercice 6.** *Donner, en fonction des invariants de similitude, la dimension du commutant d'un endomorphisme nilpotent.*

*Preuve :* Il s'agit de déterminer le nombre de degré de liberté dans le choix d'un opérateur $M$ qui commute avec $A$. On raisonne dans une base de Jordanisation de $A$. On rappelle que l'on a

$$\mathrm{Ker}\, A \subsetneq \mathrm{Ker}\, A^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\, A^r = \mathrm{Ker}\, A^{r+1}$$

On considère une base $e_n, \cdots, e_{n-d_r+1}$ de $\mathrm{Ker}\, A^r - \mathrm{Ker}\, A^{r-1}$ de cardinal la longueur $d_r$ de la dernière colonne du tableau de Young associé à $A$. L'image de cette base est totalement libre ce qui donne $d_r n$ degré de liberté; en contrepartie l'image des $u^k$ de ces vecteurs sont fixés. Soit alors $r_1$ maximal tel que $d_{r_1} \neq d_r$; on obtient alors $d_{r_1} \dim \mathrm{Ker}\, A^{r_1}$ nouveau degrés de liberté. On procède ainsi de suite jusqu'à épuiser tout l'espace.

On vérifie alors aisément qu'on obtient un nombre de degré de liberté égal à la somme des carrés des longueurs des colonnes du tableau de Young.

**Exercice 7.** *(a) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par le cône nilpotent est l'hyperplan des matrices de trace nulle.*

*(b) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes de rang* 1 *est le même hyperplan.*

*(c) En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par les matrices d'une classe de similitude quelconque de matrices nilpotentes est l'hyperplan des matrices de trace nulle.*

*Preuve :* Dans les trois cas, l'inclusion est immédiate. On va montrer directement (b). Comme d'habitude cela repose sur un petit calcul en dimension 2, à savoir: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en considérant la nouvelle base $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$.

Soit alors $A$ une matrice de trace nulle; en ajoutant une combinaison linéaire de matrice nilpotente de rang 1, on se ramène à $A$ diagonale $\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_b)$ avec $\sum_i a_i = 0$ que l'on écrit sous la forme

$$\mathrm{diag}(a_1, -a_1, 0, \cdots, 0) + \mathrm{diag}(0, a_2 + a_1, a_3, \cdots, a_n).$$

D'après le calcul précédent la première matrice est semblable à une combinaison linéaire de matrice nilpotentes de rang 1; la deuxième aussi par hypothèse de récurrence.

(c) L'orbite d'une classe de similitude quelconque contient dans son adhérence la classe de similitude des matrices nilpotentes de rang 1. On conclut alors d'après (b).

**Exercice 8.** *Montrer que tout hyperplan $H$ de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ contient au moins $n^2 - n - 1$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.*

*Preuve :* On se ramène au cas où $H$ a pour équation $tr(TX) = 0$ avec $T$ triangulaire et on considère les intersections de $H$ avec les sous-espaces des matrices nilpotentes triangulaires supérieures ou inférieures.

**Exercice 9.** *Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de $M$ en semi-simple plus nilpotent. Montrez que $S$ est dans l'adhérence de la classe de similitude de $M$.*

*Preuve :* Cela découle simplement du fait que 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de $N$.