Exercice 1. *Une rotation de $SO(3)$ sera notée par $r = (k, \theta)$ où k est le vecteur unitaire de l'axe de la rotation et θ son angle.*

Soient alors $r = (OA, 2\alpha)$ et $s = (OB, 2\beta)$ deux rotations telles que $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$ soient irrationnels. Montrez que si l'on excepté une infinité dénombrable de valeurs pour la mesure c de l'angle entre les axes OA et OB, le groupe engendré par r et s est dense dans $SO(3)$.

Preuve : Si P_3 est le plan OAB et $P_2 = (OA, -\alpha)(P_3)$ alors r s'écrit comme le produit des réflexions par rapport aux plans P_2 et P_3. De même s est le produit de P_1 et P_2 où $P_1 = (OB, \beta)(P_3)$.

Afin d'approcher une rotation $(k, 2\theta)$, on approche son axe puis son angle. Pour approcher $\mathbb{R}.k$, on approche les plans qu'il détermine avec OA, et OB. D'après le théorème de Jacobi-Kronecker, ils sont respectivement approchés par $P'_2 = (OA, -p\alpha)(P_3)$ et $P'_1 = (OB, q\beta)(P_3)$ si p et q sont des entiers adéquats. Ainsi $\mathbb{R}k' = P'_1 \cap P'_2$ approche $\mathbb{R}k$.

Puisque $r^p = (OA, 2p\alpha)) = (P_3)(P'_2)$ et $s^q = (OB, 2q\beta) = (P'_1)(P_3)$, on a $s^q r^p = (P'_1)(P'_2)$ dont la mesure $2\gamma'$ de l'angle est donnée par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos\gamma' = \sin(p\alpha)\sin(q\beta)\cos c - \cos(p\alpha)\cos(q\beta)$$

On cherche $\frac{\gamma'}{\pi}$ irrationnel; la formule précédente montre que si p et q décrivent les entiers et si $\frac{\gamma'}{\pi}$ décrit les rationnels, $\cos c$ ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. On choisit alors c pour que $\cos c$ n'appartienne pas à cet ensemble de valeurs. Il en résulte alors que $\frac{\gamma'}{\pi}$ est irrationnel pour tout p, q. Le théorème de Jacobi-Kronecker montre alors que l'on peut choisir n pour que $2n\gamma'$ approche 2θ de sorte que $(s^q r^p)^n$ approche $(k, 2\theta)$.

Exercice 2. *Donnez le centre Z de $O(q)$ (resp. Z^+ de $O^+(q)$) et montrez que $O(q)$ est un produit semi-direct de $O^+(q)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; a quelle condition ce produit semi-direct peut-il être pris direct ?*

Preuve : Il est clair que $\{Id, -Id\} \subset Z$; réciproquement soit $z \in Z$ et τ_D une réflexion de droite D. On a $z\tau_D z^{-1} = \tau_D = \tau_{z(D)}$ de sorte que z laisse stable toutes les droites de l'espace; c'est donc une homothétie (résultat classique) et donc $z = \pm Id$.

En ce qui concerne Z^+ remarquons que $-Id$ appartient à $O^+(q)$ si et seulement si n est pair. Pour $n \geq 3$ soit τ_P un renversement de plan P; on a $z\tau_P z^{-1} = \tau_P = \tau_{z(P)}$ de sorte que z laisse stable tous les plans de l'espace. Toute droite étant l'intersection de deux plans, on en déduit de même que z laisse stable toutes les droites de l'espace, soit $Z^+ = \{Id\}$ pour n impair et sinon $Z^+ = Z$ pour n pair. Pour $n = 2$, il est bien connu que O^+ est commutatif.

Il est clair que la suite exacte $1 \to O^+(q) \longrightarrow O(q) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ est scindée, un relèvement étant donné par exemple par une réflexion quelconque. Pour obtenir un produit direct, il faut trouver un élément d'ordre 2 qui n'est pas dans O^+ et qui commute à tous les éléments de O^+; la seule possibilité est alors $-Id$ en dimension impaire.

$\square$

Exercice 3. *Soit $u \in O(q)$ et $F_u = \{x \in E \ / \ u(x) = x\}$ et on note $p_u = n - \dim F_u$. Montrez par récurrence sur p_u, que u est le produit d'au plus p_u réflexions. Montrez ensuite que u est le produit d'au moins p_u réflexions.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur p_u, le cas $p_u = 0$ correspondant à $u = Id$. Supposons donc $p_u > 0$ et soit $x \in F_u^\perp$ non nul et soit $y = u(x) \neq x$ car $x \notin F_u$; on a $y \in F_u^\perp$ car F_u étant stable par u, $F_u^\perp$ l'est aussi. De plus comme x et y on même norme, on en déduit que $(x - y, x + y) = 0$ (triangle isocèle). On considère alors la réflexion τ définie par $x - y$ de sorte que $\tau(x - y) = y - x$ et $\tau(x + y) = x + y$ soit donc $\tau(y) = x$ avec $\tau_{|F_u} = Id$. Ainsi on a $F_u \subset F_{\tau \circ u}$ ce dernier contenant x de sorte que $p_{\tau \circ u} < p_u$ et on conclut par récurrence.

En outre si u est le produit de r réflexions alors F_u est clairement de dimension supérieure ou égale à $n - r$ (l'intersection de r hyperplans) soit donc $p_u \leq r$.

$\square$

Exercice 4. *Montrez que pour $n \geq 3$, tout élément de $O^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.*

Preuve : Le cas $n = 3$ est évident en remarquant que si τ est une réflexion, alors $-\tau$ est un renversement de sorte que le produit de deux réflexions (et donc tout produit d'un nombre pair) est un produit de deux renversements $\tau_1 \circ \tau_2 = (-\tau_1) \circ (-\tau_2)$.

Pour $n \geq 3$, soient τ_1 et τ_2 des réflexions par rapport aux hyperplans H_1 et H_2 et $u = \tau_1 \circ \tau_2$. Soit alors $V \subset H_1 \cap H_2$ un sous-espace de dimension $n-3$: $u_{|V} = Id$ et $V^\perp$ est stable sous u. D'après le cas $n = 3$, on a $u_{V^\perp} = \sigma_1 \circ \sigma_2$ où σ_1, σ_2 sont des renversements de $V^\perp$. On obtient le résultat en prolongeant les σ_i par l'identité sur V.

□

Exercice 5. *Soient u_1 et u_2 deux symétries orthogonales de même nature (i.e. tels que $\dim \mathrm{Ker}(u_1 - Id) = \dim \mathrm{Ker}(u_2 - Id)$). Montrez que u_1 et u_2 sont conjuguées par $O^+(q)$. En déduire alors que $D(O(q)) = D(O^+(q)) = O^+(q)$.*

Preuve : On décompose l'espace $E = E_1 \oplus E_1^\perp = E_2 \oplus E_2^\perp$ où $E_i = \mathrm{Ker}(u_i - Id)$. On choisit alors des bases orthonormées (e_i^1) et (e_i^2) de E adaptées à ces décompositions. Soit alors u tel que $u(e_i^1) = e_i^2$; u est une isométrie et quitte à changer ϵ_1 en $-\epsilon_1$, on peut supposer que u est positive. On vérifie alors immédiatement que $u \circ u_1 \circ u^{-1} = u_2$.

L'inclusion $D(O(q)) \subset O^+(q)$ est évidente; réciproquement soient τ_1 et τ_2 deux réflexions et soit u tel que $u \circ \tau_1 \circ u^{-1} = \tau_2$ de sorte que $\tau_1 \circ \tau_2 = [\tau_1, u]$. Comme tout élément de $O^+(q)$ est le produit d'un nombre pair de réflexions, on obtient bien l'inclusion réciproque.

De même pour montrer que $O^+(q) \subset D(O^+(q))$ pour $n \geq 3$, il suffit de montrer que tout renversement est un commutateur. Soit V un sous-espace de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les renversements définis par $(\sigma_i)_{|V^\perp} = Id$ et $\sigma_i(e_i) = e_i$) et donc $\sigma_i(e_j) = -e_j$ pour $i \neq j$. On a alors $\sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2$. En outre il existe $u \in O^+(q)$ tel que $\sigma_2 = u \circ \sigma_1 \circ u^{-1}$ et donc $\sigma_3 = [\sigma_1, u]$.

□

Exercice 6. *Montrez que pour tout $u \in O(q)$, il existe une décomposition orthogonale*

$$E = \mathrm{Ker}(u - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u + Id) \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_r$$

où les P_i sont des plans stables par u, tels que la restriction de u y soit une rotation.

Preuve : On procède par récurrence sur la dimension, les cas $n = 1$ et $n = 2$ étant bien connus. Si u admet une valeur propre réelle (forcément ± 1), c'est terminé (en particulier si n est impair). Sinon soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre du complexifié de $u_{\mathbb{C}}$, de sorte que $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre. Soit alors $x \in E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ un vecteur propre du complexifié relativement à λ et soit $\bar{x}$ son conjugué qui est alors propre pour $\bar{\lambda}$ relativement à $u_{\mathbb{C}}$. Le plan complexe $P = \mathbb{C}x + \mathbb{C}\bar{x}$ est alors invariant par $u_{\mathbb{C}}$. On remarque alors que les vecteurs $\frac{x+\bar{x}}{2}$ et $\frac{x-\bar{x}}{2i}$ sont réels et forment une base de P de sorte que le plan réel qu'ils engendrent et stable sous u.

□

Exercice 7. - *On veut prouver la simplicité de $O^+(3, \mathbb{R})$. Soit donc N un sous-groupe distingué non réduit à l'identité; expliquez pourquoi il suffit de montrer que N contient un renversement.*

- Soit alors $u \in N$, une rotation d'axe D et soit P le plan orthogonal à D à l'origine de sorte que la restriction de u à P est une rotation d'angle θ que l'on suppose $0 < \theta < \pi$. Soient alors x et $y = u(x)$ des points de la sphère unité de E; on note d la distance entre x et y. Montrez que pour tout $0 \leq d' \leq d$, il existe x_1, x_2 des points de la sphère unité à distance d' l'un de l'autre et tels que $x_2 = u(x_1)$.

- Déduire de ce qui précède qu'étant donnés y_1, y_2 des points de la sphère unité distant de d' avec $0 \leq d' \leq d$, il existe $u' \in N$ tels que $u'(y_1) = y_2$. En considérant la rotation d'axe z et d'angle π/m pour m assez grand, construire un retournement de N et conclure.

Preuve : - Comme les renversements engendrent $O^+(3, \mathbb{R})$ et sont conjugués sous $O^+(3, \mathbb{R})$, il suffit de montrer que N en contient un.

- Un calcul classique donne $d^2 = 2(1 - \cos\theta)$. Soit a un des points de $D \cap S^2$; le résultat découle de l'observation que u envoie le méridien contenant a et x, sur celui contenant a et y et que lorsque x_1 varie de x à a, la distance $||x_1 - u(x_1)||$ varie continûment de d à 0. De façon précise, on considère $x + \lambda a$ de norme au carré égale à $1 + \lambda^2$ de sorte que $x_1 = \frac{x+\lambda a}{\sqrt{1+\lambda^2}} \in S^2$. On a alors $||u(x_1) - x_1|| = \frac{d}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ de sorte qu'il suffit de prendre $\lambda = \frac{\sqrt{d^2-m^2}}{m}$.

- Soit x_3 (resp. y_3) un vecteur de norme 1 orthogonal au plan engendré par x_1 et x_2 (resp. y_1 et y_2) et soit u tel que $s(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Il est clair que s conserve le produit scalaire et donc $u \in O(3, \mathbb{R})$; quitte à changer y_3 en $-y_3$, on peut supposer que s est positive. On pose $u' := s \circ u \circ s^{-1} \in N$ et $u'(y_1) = y_2$. Soit alors r_n la rotation d'angle π/n et d'axe a. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, le rapport π/n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc pour n assez grand $||x - r_n(x)|| \leq d$. On pose alors $x_0 = x$ et $x_{i+1} = r_n(x_i)$ avec donc $x_n = -x$. Comme on a $||x_{i+1} - x_i|| \leq d$ il existe alors $u_i \in N$ tel que $u(x_i) = x_{i+1}$ de sorte que $v = u_n \circ \cdots \circ u_1 \in N$ et $v(x) = -x$ et v est donc un renversement, d'où le résultat.

□

Exercice 8. *On note H le corps des quaternions et soit G ceux de norme 1: $G = \{a+bi+cj+dk \ / \ a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\}$. On considère alors l'action de G sur H par automorphismes intérieurs. En restreignant cette action à l'ensemble P des quaternions purs, montrez que l'on obtient alors un isomorphisme $G/\{\pm 1\} \simeq O(3, \mathbb{R})^+$. La suite exacte associée est-elle scindée ?*

Preuve : On a $P \simeq \mathbb{R}^3$ et on vérifié aisément que l'action de conjugaison de G est $\mathbb{R}$-linéaire et conserve la norme de sorte qu'elle définit un morphisme de groupes $G \longrightarrow O(3, \mathbb{R})$. On note en outre que $G \simeq S^3$ est connexe et que le morphisme précédent est continue de sorte que l'image de $G \to O(3, \mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est connexe et donc égale à $\{1\}$. On obtient donc bien un morphisme de groupe $\phi : G \longrightarrow O^+(3, \mathbb{R})$. Montrons la surjectivité: soit $p \in P \cap G$, on a $\phi_p(p) = p$ ce qui prouve que ϕ_p fixe p (et est non triviale), c'est donc une rotation d'axe p. En outre on a $p^2 = -1$ soit ϕ_p d'ordre 2; c'est donc un renversement. On obtient donc tous les renversements, or ceux-ci engendrent $O^+(3, \mathbb{R})$, d'où la surjectivité. Pour le noyau, on a $\phi_g(p) = p$ pour tout $p \in P$ si et seulement si g commute à tous les éléments de P et donc à tous les éléments de H, soit donc $g \in \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$.

Si la suite exacte

$$1 \to \{\pm 1\} \longrightarrow G \longrightarrow^{\phi} O^+(3, \mathbb{R}) \to 1$$

était scindée, on aurait un sous-groupe H de G tel que $\phi_{|H}$ soit un isomorphisme de H sur $O^+(3, \mathbb{R})$. Mais alors pour $g \in G$, on aurait g ou $-g$ qui appartiendrait à H. En prenant $o \in P \cap G$, on a $p^2 = (-p)^2 = -1$ soit donc $-1 \in H$, contradiction.

□

Exercice 9. *On considère l'action de $G \times G$ sur H définie par $(q_1, q_2).q := q_1 q \bar{q}_2$. Montrez que l'on définit ainsi un isomorphisme $G \times G/\{(1, 1), (-1, -1)\} \simeq O(4, \mathbb{R})^+$ et en déduire que $PO(4, \mathbb{R})^+ \simeq O(3, \mathbb{R})^+ \times O(3, \mathbb{R})^+$.*

Preuve : L'application ϕ_{q_1, q_2} est clairement $\mathbb{R}$-linéaire et conserve la norme. Par continuité, on conclut comme précédemment que son image est contenue dans les isométries positives soit donc

$$\phi : G \times G \longrightarrow O^+(4, \mathbb{R})$$

Soit $(q_1, q_2) \in \operatorname{Ker} \phi$, i.e. $q_1 q \bar{q}_2 = q$ pour tout $q \in H$. Pour $q = 1$, on trouve $q_1 = q_2$ de sorte qu'ensuite q_1 est central et donc $\operatorname{Ker} \phi = \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

Pour la surjectivité, soit $u \in O^+(4, \mathbb{R})$, si on a $u(1) = 1$, comme $P = 1^\perp$, on a $u(P) = P$ avec $u_{|P} \in O^+(3, \mathbb{R})$ et d'après ce qui il existe $q \in G$ tel que $\phi_{q,q} = u$. Si on a $u(1) = g$, on a alors $\phi_{\bar{g},1} \circ u(1) = 1$ et on conclut grâce au cas précédent. Finalement on obtient donc

$$G \times G/\{(1, 1), (-1, -1)\} \simeq O(4, \mathbb{R})^+$$

En passant au groupe projectif, on cherche les couples (q_1, q_2) tels que $\phi_{q_1, q_2} = -Id$, i.e. $q_1 q \bar{q}_2 = -q$ pour tout $q \in H$. En faisant $q = 1$, on obtient $q_1 = -q_2$, puis on voit que q_1 est central soit alors

$$G \times G/V \simeq PO(4, \mathbb{R})^+$$

où $V = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$. En outre la projection canonique $G \to G/\{\pm 1\}$ induit un isomorphisme

$$(G \times G)/V \simeq G/\{\pm 1\} \times G/\{\pm 1\}$$

et donc d'après ce qui précède

$$PO(4, \mathbb{R})^+ \simeq O(3, \mathbb{R})^+ \times O(3, \mathbb{R})^+.$$

□

Exercice 10. ***Le paradoxe de Banach-Tarski*** *(a) On considère les deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$, u, v dont les matrices dans la base canonique sont*

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad et\ V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Soit G le groupe engendré par u et v. Montrez que tout élément $r \in G\backslash\{Id, u\}$ s'écrit de manière unique sous la forme $r = u^{\epsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} u \cdots u v^{n_k} u^{\epsilon_2}$ avec $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ et les $n_i \in \{1, 2\}$.

(b) On définit une partition (I, J, K) de G de la manière suivante

- *pour tout n, $(v^2u)^n \in I$;*
- *pour tout n, $u(v^2u)^n \in J$;*
- *pour tout n, $vu(v^2u)^n \in K$;*
- *les éléments de G qui ne sont pas de cette forme appartiennent à I, J, K respectivement suivant que leur écriture commence à gauche par u, v, v^2 respectivement.*

Montrez que $K = vJ$, $I = vK$ et $I = u(J \cup K)$.

Exercice 11. *(a) Deux parties A et B de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ sont dites superposables et on notera $A\mathcal{D}B$, s'il existe un déplacement r de $\mathbb{R}^3$ tel que $B = r(A)$. Montrez que l'on définit bien ainsi une relation d'équivalence.*

(b) Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$; on pose

$$D = \{x \in S \ / \ \exists r \in G\backslash\{Id\},\ r(x) = x\}$$

Montrez que D est dénombrable et est stable par G.

(c) Les orbites de $S\backslash D$ sous l'action de G, constituent une partition de $S\backslash D$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble T contenant un élément de chaque orbite. En posant $A = I(T)$, $B = J(T)$ et $C = K(T)$, montrez que l'on a ainsi une partition finie (A, B, C, D) de S avec D dénombrable, A, B, C superposables et $A\mathcal{D}(B \cup C)$. [1]

Exercice 12. *(a) On appelle découpage d'une partie A de $\mathbb{R}^3$, une partition finie $(A_i)_{1 \le i \le n}$ de A. On dira que deux parties A, B de $\mathbb{R}^3$ sont puzzle-équivalentes s'il existe une entier n et des découpages $(A_i)_{1 \le i \le n}$ et $(B_i)_{1 \le i \le n}$ tels que pour tout $1 \le i \le n$, A_i et B_i sont superposables. Vérifiez que l'on obtient bien ainsi une relation d'équivalence que l'on notera $\mathcal{P}$.*

(b) Soient S_1 et S_2 deux sphères disjointes de rayon 1, de centres respectifs O_1, O_2 et soient (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) les découpages obtenus en translatant (A, B, C, D). Montrez que

$$(S\backslash D)\mathcal{P}((S_1\backslash D_1) \cup (S_2\backslash D_2))$$

(c) On cherche à éliminer les ensembles dénombrables dans la duplication de la sphère ci-dessus. On veut prouver le résultat suivant: si Σ est une sphère et Δ est un sous-ensemble dénombrable de Σ, alors

$$\Sigma\mathcal{P}(\Sigma\backslash\Delta)$$

Pour cela montrez que l'on peut choisir $\delta \in \Sigma$ tel que $\pm\delta \notin \Delta$. En déduire que l'ensemble des rotations d'axe (O, δ) vérifiant qu'il existe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $x, y \in \Delta$ tels que $r^n(x) = y$ est dénombrable. Soit alors ρ une rotation n'appartenant pas à cet ensemble, de sorte que les ensembles $\rho^n(\Delta)$ sont deux à deux disjoints. En considérant $U = \bigcup_{n \ge 0} \rho^n(\Delta)$, prouvez le résultat.

(d) On veut désormais dupliquer les boules fermées. Montrez que

$$(K\backslash\{O\})\mathcal{P}((K_1\backslash\{O_1\}) \cup (K_2\backslash\{O_2\}))$$

[1] En quelque sorte, A est à la fois la moitié et le tiers de la sphère.

En considérant $\Delta = \{(\cos n, \sin n, 0),\ n \in \mathbb{N}\}$*, montrez que la rotation d'axe* z *et d'angle* 1 *radian envoie* Δ *sur* $\Delta\backslash\{(1,0,0)\}$*. En déduire que*

$$K\mathcal{P}K\backslash\{(1,0,0)\}$$

puis le résultat de duplication des boules.
Remarque: De manière plus générale, on peut montrer le théorème suivant
Théorème *(Banach-Tarski) Si* A *et* B *sont deux parties de* $\mathbb{R}^3$ *bornées et d'intérieurs non vides, alors* A *et* B *sont puzzle-équivalentes.*