**Exercice 1.** *Montrez que les valeurs propres de $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ sont dans la réunion des disques fermés centrés en $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ (ce sont les disques de Gershgorin).*

*Preuve :* Le résultat découle directement du lemme d'Hadamard appliqué à $A - \lambda\mathrm{Id}$. Rappelons que ce lemme dit que si pour tout $1 \le i \le n$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ alors $A$ est inversible. En effet soit $X$ de coordonnées $(x_i)_{1\le i\le n}$ dans le noyau de $A$ et soit $i_0$ tel que $|x_{i_0}|$ soit maximal parmi les $|x_i|$. De l'égalité $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j$ on en déduit la majoration $|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| \le |x_{i_0} \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ et donc $x_{i_0} = 0$ soit $X = 0$.

**Exercice 2.** *Soit $V$ un $\mathbf{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \ge 1$ et $u \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$. On munit alors $V$ de sa structure de $\mathbf{C}[X]$-module associée à $u$.*

(a) *On suppose que $V$ ne possède aucun sous-module non trivial. Montrer que $n = 1$. On remplace maintenant $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$. L'énoncé est-il encore vrai?*

(b) *On note $P_u = P_1.P_2^2 \cdots P_l^l$ le polynôme caractéristique de $u$, où les $P_i$ sont deux à deux premiers entre eux, sans facteurs carrés et unitaires. Vérifier qu'une telle écriture est possible et est unique.*

(c) *Avec les notations du b), on suppose de plus que $V$ est somme directe de sous-$\mathbf{C}[X]$-modules de dimension 1 (en tant que $\mathbf{C}$-espaces vectoriels). Calculer les invariants de similitude de $u$.*

(d) *Sous l'hypothèse du c), on se donne de plus en élément $v \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ tel que $v \circ u = u \circ v$. Montrer qu'il existe une base de $V$ où $u$ et $v$ sont simultanément diagonalisables.*

*Preuve :* On remarque tout d'abord que $u$ possède une unique valeur propre car dans le cas contraire, pour $\lambda_1$ et $\lambda_2$ des valeurs propres distinctes, $W = \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 Id)$ et $W' = \mathrm{Ker}(u - \lambda_2 Id)$ auraient une intersection réduite au vecteur nul. Soit alors $\lambda$ l'unique valeur propre de $u$ (sur $\mathbb{C}$, un endomorphisme possède toujours au moins une valeur propre). On remarque alors que $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$ est de dimension 1, car sinon pour $x_1$ et $x_2$ des vecteurs propres non colinéaires, $W = \mathbb{C}x_1$ et $W' = \mathbb{C}x_2$ auraient une intersection réduite vecteur nul. On en déduit donc que $u$ admet un unique facteur invariant égal à son polynôme minimal et à son polynôme caractéristique, soit $(X - \lambda)^n$.

**Exercice 3.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n$, $u$ un endomorphisme de polynôme minimal $P$. On suppose que $P = P_1P_2$, $P_1$ et $P_2$ étant des polynômes unitaires non constants premiers entre eux. On note $E_u$ l'espace $E$ muni de la structure de $\mathbb{R}[X]$-module définie par l'endomorphisme $u$.*

(a) *Montrer que pour $i = 1, 2$,*
$$E_i = \{x \in E \mid P_i(u)(x)) = 0\}$$
*sont des sous-modules de $E_u$.*

(b) *Montrer que $E_u = E_1 \oplus E_2$.*

(c) *Montrer que $P_1$ est le polynôme minimal de $u_{|E_1}$.*

*Preuve :* (a) Sur $\mathbb{C}$ tout endomorphisme possède une valeur propre et donc un vecteur propre $v$ de sorte que $\mathbb{C}v$ est un sous-espace stable non réduit au vecteur nul de sorte que par hypothèse il est égal à l'espace tout entier qui est donc de dimension 1.

Sur $\mathbb{R}$, l'énoncé est faux, il suffit de considérer dans $\mathbb{R}^2$, une matrice de rotation d'angle $0 < \theta < \pi$.

(b) On décompose $P_u$, qui par convention est unitaire, en produits de facteurs irréductibles $Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_r^{\alpha_r}$ et on remarque que $P_i$ se définit comme le produit des $Q_j$ tels que $\alpha_j = i$.

(c) En tant que $\mathbb{C}[X]$-module, $V$ est de la forme $(\mathbb{C}[X]/(X - \lambda_1))^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{C}[X]/(X - \lambda_r))^{\alpha_r}$, où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $u$ et $\alpha_i$ leur multiplicité dans le polynôme caractéristique. Avec les notations de (b), on a $P_i = \prod_{j/\alpha_j = i}(X - \lambda_j)$. Les facteurs invariants sont de la forme $\mu_1|\mu_2|\cdots|\mu_l$ où chacun des $\mu_j$ est de la forme $\prod_{i\in I_j}(X - \lambda_i)$ où $I_j$ est un certain sous-ensemble de $\{1, \cdots, r\}$ tel que $I_j \subset I_{j+1}$. Ainsi les éléments de $I_1$ sont répétés $l$ fois, ceux de $I_2$ le sont $(l - 1)$ fois et de manière générale ceux de $I_j$ le sont $(l + 1 - j)$ fois. On en déduit donc que $l = \max_i\{\alpha_i\}$ puis que $I_j$ est l'ensemble des $i$ tels que $\alpha_i \ge l + 1 - j$ de sorte que les facteurs invariants sont $P_l, P_lP_{l-1}, P_lP_{l-1}P_{l-2}, \cdots, P_l \cdots P_1$.

**Exercice 4.** *Pour $n > 1$, on note $J_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice nilpotente dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première sur-diagonale $j_{i,i+1}$ pour $1 \leq i < n$ qui sont égaux à 1. On considère les matrices suivantes, écrites par blocs :*

*(a)* $A_1 = \mathrm{diag}(aI_3, bI_2, cI_1)$ *;*

*(b)* $A_2 = \mathrm{diag}(I_3, I_2 + J_2, I_2 + J_2, I_3 + J_3, I_3 + J_3, 2I_2, 2I_3 + J_3, 3I_2, 3I_2 + J_2)$ *;*

*(c)* $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$

*Déterminer dans chaque cas :*

*(i) les invariants de similitudes ;*

*(ii) les polynômes minimaux et caractéristiques ;*

*(iii) la suite des dimensions des noyaux* $\mathrm{Ker}(A_i - \alpha)^k$ *où $\alpha$ est une valeur propre.*

*Preuve :* On note $V = \mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel en question, que l'on munit de la structure de $A = \mathbb{C}[X]$-module définie par la matrice à étudier; on notera $a_r(X)|\cdots|a_1(X)$, ses invariants de similitude. Le polynôme minimal est alors $a_1(X)$ et le polynôme caractéristique est le produit des invariants de similitude. Pour tout valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$, on notera $K_\alpha^i = \mathrm{Ker}(u - \alpha Id)^i$ où $u$ est l'endomorphisme associé à la matrice en question dans la base canonique; on note aussi $r_\alpha$ l'indice $i$ tel que $K_\alpha^{i-1} \neq K_\alpha^i = K_\alpha^j$ pour tout $j \geq i$; $K_\alpha^{r_\alpha}$ est appelé le sous-espace caractéristique associé à $\alpha$. L'entier $r_\alpha$ est la multiplicité de $\alpha$ dans $a_1(X)$ tandis que sa dimension est la multiplicité de $\alpha$ dans le produit des $a_i$. On note $\delta_\alpha^i = \dim K_\alpha^i - \dim K_\alpha^{i-1}$; partant de la forme de Jordan il est aisé de voir que $\delta_\alpha^i$ est égal au nombre de $a_k$ divisible par $(X-\alpha)^i$. On remarque ainsi que le nombre $r$ d'invariants de similitude est égal au maximum des dimensions des sous-espaces propres.

(a) Le $A$-module $V$ est clairement isomorphe à $(A/(X-a))^3 \times (A/(X-b))^2 \times A/(X-c)$; on calcule alors les invariants de similitude via le théorème chinois comme dans la feuille précédente ce qui donne: $(X-a)$, $(X-a)(X-b)$ et $(X-a)(X-b)(X-c)$. La matrice étant diagonalisable, les sous-espaces propres sont les sous-espaces caractéristiques, i.e. tous les $\delta_\alpha^i$ sont nuls.

(b) De même on a

$$V \simeq (A/(X-1))^3 \times (A/(X-1)^2)^2 \times (A/(X-1)^3)^2 \times \\ (A/(X-2))^2 \times A/(X-2)^3 \times (A/(X-3))^2 \times A/(X-3)^2$$

les invariants de similitude donnés comme d'habitude par application du théorème chinois sont alors

$$(X-1)^3(X-2)^3(X-3)^2, \quad (X-1)^3(X-2)(X-3), \quad (X-1)^2(X-2)(X-3), \\ (X-1)^2, \quad (X-1), \quad (X-1), \quad (X-1).$$

Avec les notations introduites ci-dessus, on a $\delta_1^1 = 7$ (resp. $\delta_2^1 = 3$, resp. $\delta_3^1 = 3$), puis $\delta_1^2 = 4$ (resp. $\delta_2^2 = 1$, resp. $\delta_3^2 = 1$), et $\delta_1^3 = 2$ (resp. $\delta_2^3 = 1$, resp. $\delta_3^3 = 0$) tous les $\delta_i^k$ étant nuls pour $k > 3$. On obtient alors $\dim K_1^1 = 7$ (resp. $\dim K_2^1 = 3$, resp. $\dim K_3^1 = 3$), $\dim K_1^2 = 11$ (resp. $\dim K_2^2 = 4$, resp. $\dim K_3^2 = 4$) et $\dim K_1^3 = 13$ (resp. $\dim K_2^3 = 5$, resp. $\dim K_3^3 = 4$) avec $r_1 = 3$ (resp. $r_2 = 3$, resp. $r_3 = 2$).

(c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (resp. 1) est de dimension supérieure ou égale à 1 (resp. $n-2$); dans $\mathbb{C}$, la dernière valeur propre est déterminée via la trace de la matrice dont on sait qu'elle est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité (en effet toute matrice complexe est trigonalisable); ainsi on a $1.0 + (n-2).1 + x = n - 2 + a_n$ de sorte que la dernière valeur propre est $a_n$. Si $a_n \neq 0, 1$ alors la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres $0, 1, a_n$ est $n$ de sorte que la matrice est diagonalisable et donc

$$V \simeq A/(X) \times A/(X - a_n) \times (A/(X - 1))^{n-2}$$

et les invariants de similitude sont

$$a_1(X) = (X - 1)X(X - a_n), \quad a_2(X) = X - 1, \quad \cdots \quad a_{n-2}(X) = X - 1.$$

Si $a_n = a_1 = 0$, on est dans la même situation, car le noyau de la matrice est alors de dimension 2 car son rang est de manière évidente $n - 2$; les invariants de similitude sont alors

$$a_1(X) = X(X - 1), \quad a_2(X) = X(X - 1), \quad a_3(X) = \cdots = a_{n-2}(X) = X - 1.$$

Dans le cas où $a_n = 0$ et $a_1$ non nul, on a alors $r_0 = 2$ avec $\dim K_0^1 = 1$ de sorte que

$$V \simeq A/(X^2) \times (A/(X - 1))^{n-2}$$

soit

$$a_1(X) = X^2(X - 1), \quad a_2(X) = \cdots = a_{n-2}(X) = (X - 1).$$

**Exercice 5.** *Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, dont les valeurs propres sont $0$ et $1$ ; on note $K_0^i$ (resp. $K_1^i$) le noyau de $u^i$ (resp $(u - \mathrm{Id})^i$) et soit $d_0^i$ (resp. $d_1^i$) sa dimension. On suppose que la suite $(d_0^i)$ (resp. $(d_1^i)$) est égale à $(4, 7, 9, 10, 10, \cdots)$ (resp. $(3, 4, 5, 5, \cdots)$). Déterminer alors les invariants de similitudes de $u$.*

*Preuve :* D'après les rappels donnés dans l'exercice précédent, le nombre d'invariants de similitude est égal à la dimension maximale des sous-espaces propres soit donc ici 4 invariants de similitude $a_1, a_2, a_3, a_4$. Le polynôme minimal s'écrit sous la forme $X^{\alpha_1}(X - 1)^{\beta_1}$ avec $\alpha_1 = r_0$ et $\beta_1 = r_1$ où l'on rappelle que $r_0$ (resp. $r_1$) est l'indice $i$ tel que $K_0^{i-1} \neq K_0^i = K_0^{i+k}$ (resp. $K_1^{i-1} \neq K_1^i = K_1^{i+k}$) pour tout $k \geq 0$, soit donc ici $a_1(X) = X^4(X - 1)^3$. De même on écrit les $a_i(X)$ sous la forme $a_i(X) = X^{\alpha_i}(X - 1)^{\beta_i}$ pour $2 \leq i \leq 4$ avec $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ (resp. $\beta_i \geq \beta_{i+1}$) et $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 10$ (resp. $\sum_{i=1}^4 \beta_i = 5$).

On introduit comme dans l'exercice précédent $\delta_0^i = \dim K_0^i - \dim K_0^{i-1}$ (resp. $\delta_1^i = \dim K_1^i - \dim K_1^{i-1}$); on rappelle que $\delta_0^i$ (resp. $\delta_1^i$) est le nombre d'invariants de similitude divisibles par $X^i$ (resp. $(X - 1)^i$) (pour le voir il suffit de raisonner sur la forme de Jordan). En ce qui concerne la valeur propre 0: on a $\delta_0^4 = 1$ de sorte que $\alpha_2 \leq 3$, en outre $\delta_0^3 = 2$ impose $\alpha_2 \geq 3$ soit $\alpha_2 = 3$ et $\alpha_3 \leq 2$. Enfin $\delta_0^2 = 3$ donne $\alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 1$.

En ce qui concerne la valeur propre 1, on trouve de la même façon, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$ ce qui fournit finalement

$$a_1(X) = X^4(X - 1)^3, \quad a_2(X) = X^3(X - 1), a_3(X) = X^2(X - 1), \quad a_4(X) = X(X - 1).$$

**Exercice 6.** *Ecrire sous la forme de Jordan et donner la suite des dimensions des noyaux $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})^i$ des endomorphismes $u$ dont les invariants de similitudes sont :*

*(a)* $P_1(X) = X$;

*(b)* $P_1(X) = X(X - 1)$;

*(c)* $P_1(X) = X$ *et* $P_2(X) = X^2$;

*(d)* $P_1(X) = X$ *et* $P_2(X) = X(X - 1)$;

*(e)* $P_1(X) = X^2(X-1)$, $P_2(X) = X^2(X-1)(X-2)$, $P_3(X) = X^3(X-1)^2(X-2)$ *et* $P_4(X) = X^4(X-1)^3(X-2)^4$;

*Preuve :* On reprend les notations des exercices précédents. On rappelle que la dimension $n$ de l'espace vectoriel en question est la somme des degrés des invariants de similitude.

(a) Ici $n = 1$ et l'endomorphisme en question est l'identité.

(b) On a $n = 2$ et un espace cyclique avec deux valeurs propres distinctes; $u$ est donc diagonalisable et sa matrice dans une base de diagonalisation est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, 1)$.

(c) $n=3$ et 0 est la seule valeur propre avec $\delta_0^1=2$ et $\delta_0^2=1$ soit $\dim K_0^1=2$ et $\dim K_0^2=3$ et la matrice de Jordan associée est $\mathrm{diag}(0,J_2)$.

(d) $n=3$ et $0,1$ sont les valeurs propres de $u$ avec $\delta_0^1=2$ (resp. $\delta_1^1=1$) et $\delta_1^i=\delta_0^i=0$ pour $i>1$. On obtient alors $\dim K_0^1=2$ et $\dim K_1^1=1$, l'endomorphisme est donc diagonalisable.

(e) $n=24$, les valeurs propres étant $0,1,2$; la suite $\delta_0^i$ (resp. $\delta_1^i$, resp. $\delta_2^i$) est $(4,4,2,1,0,\cdots)$ (resp. $(4,2,1,0,\cdots)$, resp. $(3,1,1,1,0,\cdots)$) de sorte que la suite des dimensions des $K_0^i$ (resp $K_1^i$, resp. $K_2^i$) est $(4,8,10,11,\cdots)$ (reps. $(4,6,7,\cdots)$, resp. $(3,4,5,6,\cdots)$). La forme de Jordan est la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(J_2,J_2,J_3,J_4,I_1,I_1,I_2,I_3,2I_2,2I_4+J_4).$$

**Exercice 7.** *On se propose dans ce problème de donner un algorithme pour calculer la décomposition de Dunford sans calculer les valeurs propres (ce qui algorithmiquement ne peut en général se faire que de manière approchée).*

*Soit $n\geq 1$ et $A\in\mathcal{M}_m(K)$ une matrice carrée à coefficients dans le corps $K\subset\mathbb{C}$. On note $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$. Dans $\mathbb{C}$, $\chi_A(X)$ se décompose sous la forme $\prod_i(X-\lambda_i)^{n_i}$ avec $\sum_i n_i=m$. On introduit alors le polynôme $P(X)=\prod_i(X-\lambda_i)$.*

*(a) Montrer que $P(X)=\lambda\frac{\chi_A(X)}{\chi_A(X)\wedge\chi_A'(X)}$, où $\chi_A(X)\wedge\chi_A'(X)$ désigne le pgcd de $\chi_A$ avec son polynôme dérivé et $\lambda\in K$. En déduire alors que $P(X)$ est un polynôme à coefficients dans $K$.*

*(b) Soient $U$ et $N$ des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ respectivement inversible et nilpotente, qui commutent entre elles. Montrer que $U-N$ est inversible. Montrer alors que $P'(A)$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_m(K)$ dont l'inverse commute avec $A$.*

*(c) On considère alors la suite suivante : $A_0:=A$ et $A_{n+1}=A_n-P(A_n).(P'(A_n))^{-1}$. On veut montrer par récurrence sur $n$ que la suite est bien définie, i.e. que $P'(A_n)$ est une matrice inversible.*

*(i) Montrer que pour tout polynôme $Q\in K[X]$, il existe $\tilde{Q}\in K[X,Y]$ tel que $Q(X+Y)=Q(X)+YQ'(X)+Y^2\tilde{Q}(X,Y)$.*

*(ii) En supposant la suite $A_n$ définie jusqu'au rang $n$, montrer que $P(A_n)$ s'écrit sous la forme $P(A)^{2^n}.B_n$ où $B_n$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ qui est un polynôme en $A$.*

*(iii) En utilisant une formule de Taylor pour le polynôme $P'$, écrire $P'(A_{n+1})$ comme la somme d'une matrice inversible $P'(A_n)$ et d'une matrice nilpotente qui commutent entre elles.*

*(d) Montrer que pour tout polynôme $Q\in K[X]$, il existe $\tilde{Q}\in K[X,Y]$ tel que $Q(X+Y)=Q(X)+YQ'(X)+Y^2\tilde{Q}(X,Y)$. Montrer alors par récurrence sur $n$ que $P(A_n)$ s'écrit sous la forme $P(A)^{2^n}.B_n$ où $B_n$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.*

*(e) En déduire que la suite $A_n$ est stationnaire de limite $D$ avec $D$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $N:=A-D$ nilpotente vérifiant $DN=ND$.*

*Preuve :* (a) On remarque que la multiplicité de $\lambda_i$ dans $P'$ est égale à $n_i-1$ de sorte que $\lambda_i$ est une racine à l'ordre 1 de $\frac{\mu_A(X)}{\mu_A(X)\wedge\mu_A'(X)}$ et qu'en outre ce sont ces seules racines d'où le résultat. On notera en particulier que la connaissance des $\lambda_i$ n'est pas nécessaire pour calculer $P$ qui peut se calculer via l'algorithme d'Euclide.

(b) - L'idée est d'utiliser la relation formelle $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k)=1-x^{k+1}$ avec $x=U^{-1}N$ et $k$ tel que $N^{k+1}=0$ soit $(1-U^{-1}N)(1+U^{-1}N+\cdots+(U^{-1}N)^k)=I_n$ car $(U^{-1}N)^{k+1}=U^{-k-1}N^{k+1}$ car $U$ et $N$ commutent entre eux; soit en multipliant à gauche par $U$ et à droite par $U^{-1}$, $(U-N)(U^{-1}+U^{-2}N+\cdots+U^{-k-1}N^k)=I_n$.

- Les valeurs propres de $A$ ne sont pas des racines de $P'$ et $P\wedge P'=1$. On considère alors une relation de Bezout $RP'+SP=1$ pour $P$ et $P'$ qui en l'appliquant à $A$, donne $R(A)P'(A)=1-N$ avec $N=S(A)P(A)$. Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P^r(A)=0$ pour $r\geq\max_i(n_i)$ de sorte que $N$ est nilpotent et donc par application de ce qui précède $P'(A)$ est inversible dont l'inverse commute avec $A$ en tant que polynôme en $A$.

(c) Il s'agit de la méthode de Newton appliqué aux matrices, le but étant de construire une racine de $P$, i.e. de trouver la partie diagonalisable de $A$ dans sa décomposition de Dunford. Remarquons que pour $n=0$, $P'(A_0)$ est inversible d'après la question précédente.

(i) Il suffit par exemple de le vérifier sur les monômes $X^m$, soit

$$(X+Y)^m=X^m+mYX^{m-1}+Y^2\sum_{k=2}^m\binom{k}{m}Y^{k-2}X^{m-k}.$$

(ii) Il est clair d'après (a) que pour tout $0 \leq k \leq n$, $A_k$ est un polynôme en $A$. On raisonne par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, on a $P(A_0) = P(A)$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $k$. D'après (i), on écrit $P(A_{k+1}) = P(A_k + Y) = P(A_k) + YP'(A_k) + Y^2\tilde{Q}(A_k, Y)$ avec $Y$ tel que $P(A_k) + YP'(A_k) = 0$. D'après (a) $Y = P(A_k)Q(A_k)$ et donc $P(A_{k+1})$ est de la forme $P(A)^{2^{k+1}}B_{k+1}$ pour une matrice $B_{k+1}$ qui en tant que polynôme en $A_k$ commute avec $A$.

(iii) La formule de Taylor donne $P'(A_{n+1}) - P'(A_n) = (A_{n+1} - A_n)Q(A_n)$ où $Q \in K[X]$. Or $A_{n+1} - A_n$ est de la forme $P(A_n)\tilde{Q}(A_n)$ et est donc nilpotent et commute avec $A_n$ qui est un polynôme en $A$. On en déduit alors que $P'(A_{n+1})$ est inversible d'après (a).

(e) On rappelle que $P^r(A) = 0$ pour $r = \max_i\{n_i\}$ de sorte que la sous-suite $(A_k)_{k \geq n}$ est constante dès que $2^n \geq r$. La limite $D$ est un polynôme en $A$ tel que $P(D) = 0$ de sorte que $D$ est diagonalisable car elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}$). Par ailleurs, pour $n$ tel que $2^n \geq r$, on a $A - D = A_0 - A_n = \sum_{i=0}^{n-1}(A_i - A_{i+1})$ avec $A_i - A_{i+1}$ nilpotent et qui est un polynôme en $A$. Ainsi les $A_i - A_{i+1}$ commutent en eux de sorte que leur somme est nilpotente d'où le résultat.