Groupes

IV.1

(a) Soit G un groupe dont tous les éléments $\neq 1$ sont d'ordre 2. Montrer que G est commutatif.

(b) Montrer que l'ordre de G est alors de la forme 2^n (raisonner par récurrence sur l'ordre de G).

(c) Soit G un groupe, $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

IV.2

(a) Soit G un groupe non commutatif d'ordre 10 ; montrer que G contient un élément d'ordre 5 (utiliser (a) de l'exercice précédent **??**).

(b) Montrer que G contient un sous-groupe distingué H d'ordre 5 et que tout élément $x \in G \setminus H$ est d'ordre deux (considérer le groupe quotient G/H).

(c) Montrer que G est isomorphe au groupe dihédral D_5 (considérer l'ordre d'un élément xh).

IV.3

Soit p un nombre premier, G un groupe de cardinal p^k.
Montrer que pour tout $s \leq k$, G possède un sous-groupe d'ordre p^s (raisonner par récurrence sur k en considérant le centre de G).

Groupe Symétrique

IV.4 Dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_5$, combien y a-t-il de 5-cycles distincts ? de 4-cycles distincts ?

IV.5 Soit $p \geq 5$ un nombre premier et $H \subset \mathcal{S}_p$ un sous-groupe tel que $[\mathcal{S}_p : H] < p$.

(a) Montrer que tout cycle d'ordre p est contenu dans H.

(b) Montrer que tout cycle d'ordre 3 est produit de deux cycles d'ordre p.

(c) Montrer que $H = \mathcal{A}_p$.

(d) Montrer que $\mathcal{S}_5$ ne contient aucun sous-groupe de cardinal 30, 40.

IV.6 (Cf. La remarque **??**).

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les systèmes suivants et pas par un sous-ensemble strict :

  (i) les transpositions $(1\ i)$ pour $i = 2, \cdots, n$;

  (ii) les transpositions $(i\ i+1)$ pour $i = 1, \cdots, n-1$;

  (iii) le cycle $c_n = (1\ \cdots\ n)$ et la transposition $\tau = (1\ 2)$.

  (Appliquer le corollaire **??**).

(b) Montrer que $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 3$ est engendré par les 3-cycles.

IV.7 Donner la décomposition en cycles à supports disjoints de $(1\,2\,3)(2\,4)(1\,3)$ et de $(1\ 2\ \cdots\ n-1)(1\ n)$
(*cf.* la proposition **??**).

IV.8

(i) Quelle est la décomposition en cycles à supports disjoints de $\sigma s \sigma^{-1}$ en fonction de celle de s?

(ii) Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_5$?

(iii) Quelle est la décomposition en cycles à supports disjoints de c^k, où $c = (1, \cdots, n)$?

IV.9 Soit $n \geq 5$.

(i) Soit H un sous-groupe d'indice n de $\mathcal{S}_n$. Montrer que H est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.
(Considérer "le" morphisme $\phi : \mathcal{S}_n \to (\mathcal{S}_n/H)$ puis montrer que ϕ est injectif et déterminer l'image de H).

(ii) Soit H un sous-groupe d'indice k de $\mathcal{S}_n$ avec $1 < k < n$. Montrer que $k = 2$ et $H = \mathcal{A}_n$.

Opération d'un groupe sur un ensemble

IV.10 Soit G un groupe fini d'ordre 21 opérant sur un ensemble fini E ayant n éléments.

(a) On suppose $n = 19$. On suppose aussi qu'il n'existe pas de point fixe dans E sous l'action de G. Combien y a-t-il d'orbites dans E? Quel est le nombre d'éléments dans chacune de ces orbites?

(b) On suppose $n = 11$. Montrer qu'il existe au moins un point fixe dans E sous l'action de G.

(c) Soit n un entier > 11. Montrer qu'il existe un ensemble ayant n éléments sur lequel G opère sans point fixe.

Trois polyèdres réguliers et leur groupe.

IV.11 Le tétraèdre régulier : on note $\mathcal{I}_T$ le groupe des isométries qui laissent le tétraèdre globalement invariant et $\mathcal{D}_T$ le sous-groupe de $\mathcal{I}_T$ constitué par les déplacements de $\mathcal{I}_T$.

(i) Montrer que l'on peut considérer $\mathcal{I}_T$ (resp. $\mathcal{D}_T$) comme un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbf{R}^3)$ (resp. $S\mathcal{O}(\mathbf{R}^2)$).

(ii) Montrez que $\mathcal{I}_T$ est fini de cardinal ≤ 24.

(iii) Montrez que $\mathcal{I}_T \simeq \mathcal{S}_4$ et $\mathcal{D}_T \simeq \mathcal{A}_4$.

IV.12 Le cube : avec des notations analogues à celles du tétraèdre, on introduit $\mathcal{I}_C$ et $\mathcal{D}_C$.

(i) Montrez que $\mathcal{I}_C$ est fini. Quel est l'indice $[\mathcal{I}_C : \mathcal{D}_C]$?

(ii) En faisant opérer $\mathcal{I}_C$ sur l'ensemble Δ des 4 diagonales, montrer que $\mathcal{D}_C$ est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.

IV.13 L'octaèdre : soit S la sphère circonscrite à l'octaèdre. Etant donné un point $P \neq O$, son plan polaire est $\{M \ / \ (\vec{OM}, \vec{OP}) = 1\}$, où $(.,.)$ désigne le produit scalaire canonique. De même le point dual d'un plan H ne contenant pas O est le point P tel que $(\vec{OP}, \vec{OM}) = 1$ pour tout point M de H. On introduit le cube dont les faces sont les plans polaires aux 6 sommets de l'octaèdre par rapport à S. On l'appelle le cube dual à l'octaèdre. Montrer qu'une isométrie laisse l'octaèdre globalement invariant si et seulement s'il laisse son cube dual globalement invariant. Donner alors le groupe de l'octaèdre.

Problèmes

Problème IV.1 Soient p un nombre premier, n un entier positif, G un groupe d'ordre pn et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice p.
On note G/H l'ensemble (de cardinal p) des classes à gauches xH. On identifie le groupe des permutations de l'ensemble $\{G/H\}$ avec le groupe symétrique S_p et on note :

$$\phi :\ G \to S_p$$

le morphisme défini par la multiplication à gauche des classes par les éléments de G.

1. Montrer que
$$H_1 = \ker \phi = \cap gHg^{-1},$$
l'intersection portant sur tous les éléments $g \in G$.

2. On suppose que p est le plus petit nombre premier divisant $|G|$. Montrer que H est distingué (on montrera que $H = H_1$).

3. Soit L un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre deux. Montrer que L est commutatif.
Dans la suite, G est un groupe non commutatif d'ordre 26.

4. Montrer que G contient un élément d'ordre 13.

5. Montrer que G contient un sous-groupe distingué H d'ordre 13, et que tout élément $x \in G$, $x \notin H$ est d'ordre deux.

6. Montrer que G est isomorphe au groupe dihédral D_{13}.