Polynômes

Solution de l'exercice (??) On écrit $P = P'Q$ avec Q de degré 1, soit $Q(X) = a(X-\alpha)$ et $P(X) = aP'(X)(X-\alpha)$. En dérivant k fois cette égalité, on obtient $P^{(k)}(X) = aP^{(k+1)}(X)(X-\alpha) + kaP^{(k)}(X)$ et pour $k < \deg P$ on a $ak \neq 1$ car sinon $P^{(k+1)}$ serait le polynôme nul, ce qui n'est pas. En évaluant en α, l'expression précédente on obtient pour $k < \deg P$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$. La formule de Taylor $P(X) = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \cdots + P^{(\deg P-1)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^{\deg P-1}}{(\deg P-1)!} + P^{(\deg P)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^{\deg P}}{(\deg P)!} = \frac{P^{(\deg P)}(\alpha)}{(\deg P)!}(X-\alpha)^{\deg P}$. Réciproquement on vérifie immédiatement qu'un polynôme de la forme aX^n est divisible par son polynôme dérivé.

Solution de l'exercice (??) On remarque tout d'abord que $\deg P$ est pair. On raisonne alors par récurrence sur le degré $2n$ de P. Pour $n = 1$, on a

$aX^2 + bX + c = a(X\frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$ avec $a > 0$ et $c - \frac{b^2}{4a} \geq 0$ et donc de la forme δ^2 de sorte que $aX^2 + bX + c$ est bien de la forme $Q^2 + R^2$ avec $Q(X) = a(X - \frac{b}{2a})$ et $R(X) = \delta$.

Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ et traitons le cas de $\deg P = 2n$. On considère la factorisation de $P = \prod_i (X-\lambda_i)^{n_i} \prod_j D_j(X)^{m_j}$ où D_j est un polynôme irréductible de degré 2 sur $\mathbf{R}$. S'il existe j tel que m_j est non nul, le polynôme $\frac{P(X)}{D_j(X)}$ est alors de degré inférieur à $2(n-1)$ et vérifie la condition de l'énoncé de sorte qu'il existe Q_1 et R_1 tel que $\frac{P}{D_j} = Q_1^2 + R_1^2$. D'après le cas $n = 1$, il existe aussi Q_2 et R_2 tels que $D_j = Q_2^2 + R_2^2$. On considère alors l'identité remarquable de Lagrange (*cf.* le problème (**??**))

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ab-cd)^2 + (ad+bc)^2$$

de sorte que $P = Q^2 + R^2$ avec $Q = Q_1Q_2 - R_1R_2$ et $R = Q_1R_2 + R_1Q_2$.

De la même façon s'il existe i tel que $n_i \geq 2$ est pair, on remarque que $Q(X) := \frac{P(X)}{(X-\lambda_i)^2}$ vérifie les hypothèses; en effet on a $P(x) = Q(x)(x-\lambda_i)^2$ de sorte que pour tout $x \neq \lambda_i$, on a $Q(x) \geq 0$. En outre Q étant un polynôme, est continu de sorte que $Q(\lambda_i) \geq 0$. On conclut alors comme précédemment, en appliquant l'hypothèse de récurrence et l'identité de Lagrange.

Le dernier cas à étudier est celui où $P(X)$ est scindé à racines simples. On remarque alors qu'au passage d'une racine α, P change de signe car $P(X)$ est équivalent, au voisinage de α à $P'(\alpha)(X-\alpha)$. Un tel P ne vérifie pas l'hypothèse de l'énoncé.

Solution de l'exercice (??) On a $P'(X) = 6X(X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 10X + 4)$ et X étant premier avec $P(X)$, on calcule alors le pgcd δ de $P(X)$ avec

$(X^4-5X^3+10X^2-10X+4)$ selon l'algorithme d'Euclide:

$$\begin{aligned}\delta &= (P(X)-(X^2+X)(X^4-5X^3+10X^2-10X+4)\wedge X^4-5X^3+10X^2-10X+4)\\ &= (X^2-2X+2\wedge X^4-5X^3+10X^2-10X+4)\\ &= (X^2-2X+2\wedge (X^4-5X^3+10X^2-10X+4-(X^2-3X)(X^2-2X+2))\\ &= X^2-2X+2\end{aligned}$$

On a ainsi $P(X)=(X^2-2X+2)^2(X^2-2X-1)$.

Solution de l'exercice (??) On a $X^2-2\cos\theta X+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ et on évalue le polynôme en question en $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$: $e^{in\theta}\sin\theta-e^{i\theta}\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta=a+ib$ avec $a=\sin\theta\cos(n\theta)-\cos\theta\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta=0$ et $b=\sin(n\theta)\sin\theta-\sin\theta\sin(n\theta)=0$. Ainsi $(X-e^{i\theta})$ et $(X-e^{-i\theta})$ divisent $X^n\sin\theta-X\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta$ et donc aussi le ppcm de $(X-e^{i\theta})$ et $(X-e^{-i\theta})$ qui est égal au produit $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ car le pgcd $((X-e^{i\theta}),(X-e^{-i\theta}))=1$.
On calcule facilement par récurrence $X^n\sin\theta-X\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta=(X^2-2\cos\theta X+1)(X^{n-2}\sin(n\theta)+X^{n-3}\sin(2\theta)+\cdots+X^{n-k}\sin(k-1)\theta)+\Delta_k$ avec $\Delta_k=\sin(k\theta)X^{n-k+1}-\sin(k-1)\theta X^{n-k}-X\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta$.

Solution de l'exercice (??) Au lieu de prendre la base $(1,X,X^2)$ de $\mathbf{C}_2[X]$, on choisit la base $(1,X-a,(X-a)(X-b))$ et on évalue en a et b, soit $P(X)=P(a)+\frac{P(b)-P(a)}{b-a}(X-a)+Q(X)(X-a)(X-b)$.

Racines des Polynômes à coefficients complexes

Solution de l'exercice (??) Posons $M=\sup_{0\le i\le d-1}\Big(d\frac{|a_i|}{|a_d|}$. Soit $z\in\mathbf{C}$ tel que $|z|>M$ alors, pour $0\le i<d$, on a $|a_i|<\frac{|a_d|}{d}|z|^{d-i}$ et donc $|a_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a_0|<|a_dz^d|$ soit $P(z)\neq 0$.

Solution de l'exercice (??) (a) Soit $z\in\mathbf{C}$ une racine de P' et supposons $P(z)\neq 0$; on écrit $\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{z-z_i}=0$ soit $\sum_{i=1}^n\frac{z-z_i}{|z-z_i|^2}=0$ et donc $z=\frac{\sum_{i=1}^n\frac{z_i}{|z-z_i|^2}}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{|z-z_i|^2}}$ soit z est un barycentre à coefficients strictement positifs des z_i et appartient donc à l'enveloppe convexe des z_i.

(b) On pose $Q(z)=(P(z)-\omega_1)^{n_1}(P(z)-\omega_2)^{n_2}$ et donc $Q'(z)=(n_1+n_2)P'(z)(P(z)-\omega_1)^{n_1-1}(P(z)-\omega_2)^{n_2-1}[P(z)-(\frac{n_1\omega_2+n_2\omega_1}{n_1+n_2})]$. Soit alors $E=\{\omega\in\mathbf{C}\ /\ \{z\ /\ P(z)=\omega\}\subset K\}$; ainsi pour tous $\omega_1,\omega_2\in E$ et tous $n_1,n_2\in$

$\mathbf{N}^*$, on a $\{z\ /\ P(z) = \frac{n_1\omega_2+n_2\omega_1}{n_1+n_2}\} \subset \{z\ /\ Q'(z) = 0\}$. Or $\{z\ /\ Q'(z) = 0\}$ est inclus dans l'enveloppe convexe des zéros de $P(z) - \omega_1$ et $P(z) - \omega_2$ et donc contenu dans K car K est convexe. On conclut alors par un petit argument de topologie en utilisant le fait que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Racines des polynômes à coefficients réels

Solution de l'exercice (??) On utilise la formule de Taylor $P(X) = P(a) + (X-a)P'(a) + \cdots + \frac{(X-a)^n}{n!}P^{(n)}(a)$ qui est une égalité car P est un polynôme de degré n.

Solution de l'exercice (??) Si x est une racine multiple de P, on a alors $P(x) = P'(x) = 0$ soit $1 + x + \cdots + \frac{x}{n!} = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} = 0$ soit $x^n = 0$ et donc $x = 0$ qui ne convient pas.

Solution de l'exercice (??) On a $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0q^n = 0$ de sorte que p (resp. q) divise a_0q^n (resp. a_np^n), et comme $(p \wedge q) = 1$, p (resp. q) divise a_0 (resp. a_n).
Ainsi les solutions rationnelles de $P(X) = 3X^3 + 4X^2 + 2X - 4$ sont à chercher avec $p = 1, 2, 4$ et $q = 1, 3$; on vérifie alors que $2/3$ est solutions et $P(X) = 3(X - 2/3)(X^2 + 2X + 2)$.

Solution de l'exercice (??) On raisonne par récurrence sur le degré de P ; le résultat est évident pour P de degré 1, supposons alors le résultat vrai pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n et soit P de degré $n+1$. On note $\delta = (P \wedge P')$ de degré supérieur ou égal à 1 par hypothèse car $\delta(x) = 0$. Ainsi δ divise P et donc P n'est pas irréductible $(\deg \delta < \deg P)$. Soit donc $P = QR$ avec $\deg Q$ et $\deg R$ sont dans $\mathbf{Q}[X]$ de degré inférieurs à n. Par hypothèse on a $v_P(x) = v_Q(x) + v_R(x) > (n+1)/2$ et donc soit $v_Q(x) > (\deg Q)/2$ soit $v_R(x) > (\deg R)/2$ et par hypothèse de récurrence $x \in \mathbf{Q}$.

Solution de l'exercice (??)

Soit $P(X) = a_0X^n + \cdots + a_n$ avec $a_0 \neq 0$. Supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbf{R}^+$ de sorte que $a_n = P(0)$ est du même signe que a_0 car la limite de P en $+\infty$ est $a_0(+\infty)$. On en déduit alors que V_P, qui est égal au nombre de changements de signe entre a_0 et a_n, est pair, d'où le lemme de Descartes dans ce cas. Supposons le résultat acquis pour tout polynôme possédant strictement moins de n racines réelles positives. Soit alors $\alpha > 0$ une racine de P et considérons $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$ avec $Q(X) = b_0X^{n-1}+\cdots+b_{n-1}$ de sorte que

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 - \alpha b_0 \\ \cdots \\ a_i = b_i - \alpha b_{i-1} \\ \cdots \\ a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2} \\ a_n = -\alpha b_{n-1} \end{cases}$$

On remarque tout d'abord que les égalités $a_0 = b_0$ et $a_n = -\alpha b_{n-1}$ avec $\alpha > 0$, impliquent que $V(P) \equiv V(Q)+1 \mod 2$. Il ne reste alors plus qu'à montrer que $V(P) \geq V(Q)$. Quitte à changer P en $-P$, on peut supposer $b_0 > 0$, soient alors $i_1 = 0 < i_1 < \cdots < i_r \leq n-1$ tels que pour tout $i_{k-1} \leq j < i_k$, b_j est du même signe que $(-1)^k$. On remarque alors que pour tout $1 \leq k \leq r$, $a_{i_k} = b_{i_k} - \alpha b_{i_{k-1}}$ est du même signe que b_{i_k}, i.e. celui de $(-1)^{k-1}$. On en déduit donc $V(P) \geq r = V(Q)$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice (??) Si x est une racine d'un $P^{(i)}$ pour $i > 0$ avec $P(x) \neq 0$, alors $V(x^+) - V(x^-)$ est un nombre négatif pair: en effet soit $[i, i+r] \subset [1, d-1]$ un segment tel que $P^{(j)}(x) = 0$ pour $i \leq j \leq i+r$ et $P^{(i-1)}(x)P^{(i+r+1)} \neq 0$, on remarque que $i+r < d$ car $P^{(d)}$ est une constante non nulle, on a alors $P^{(i+k)}(x+h) = h^{r+1-k}P^{(i+r+1)}(x) + o(h^2)$ de sorte le nombre de changements de signes de la sous-suite $(P^{(i)}(x^-), \cdots, P^{(i+r+1)}(x^-))$ est maximal tandis que celui de $(P^{(i)}(x^+), \cdots, P^{(i+r+1)}(x^+))$ est minimal, de sorte que la différence du nombre de changements de signes de la sous-suite $(P^{(i-1)}, \cdots, P^{(i+r+1)})$ est négatif ou nul. On conclut alors aisément que $V(x^+) - V(x^-)$ est négatif ou nul; ce nombre est de plus pair car les signes des deux extrémités $P, P^{(d)}$ est le même en x^- et x^+ et que le signe de $P^{(d)}(x)$ est égal au signe de $P(x)$ multiplié par $(-1)^{V(x)}$.
Si x est une racine de P d'ordre r, le même raisonnement permet de conclure que $V(x^-) - V(x^+)$ est égal à $k+2l$ pour un certain entier l.

On en déduit alors facilement l'énoncé de l'exercice. Le lemme de Descartes correspond alors au calcul de $V(0) - V(+\infty)$.

Solution de l'exercice (??) On pose $G(x) = e^{-\alpha_0 x}F(x)$ et on raisonne par récurrence sur la somme m des degrés des P_i, le premier cas, $m = 0$ étant évident; par hypothèse de récurrence $G^{(d_0)}$ a alors au plus $\sum_{i=1}^n d_i + (n-1)$ zéros réels de sorte que d'après le théorème de Rolle G a au plus $\sum_{i=0}^n d_i + n$ zéros réels.

Solution de l'exercice (??) D'après le lemme de Descartes, le nombre de racines réelles positives est inférieur à $V(P) = V(-13.6, -14.6, -7.13, 1) = 1$ tout en y étant congru modulo 2, ce qui donne donc exactement 1 racine positive. En ce qui concerne les racines réelles négatives, on considère le polynôme $P(-X) = X^{14} - 7.13X^2 + 14.6X - 13.6$ de sorte que le nombre de racines négatives est inférieur à $V(P(-X)) = V(-13.6, 14.6, -7.13, 1) = 3$ tout en y étant congru modulo 2 ce qui donne une ou trois racines réelles négatives.

Afin de déterminer le nombre de racines négatives, on applique la règle de Sturm, soit $P'(X) = 14(X^{13} - 13X - 6)$ de sorte que modulo P', on a $X^{13} \equiv 13X + 6 \mod P'$ soit $P(X) \equiv X(13X + 6) - 7.13X^2 - 14.6X - 13.6 \equiv -13.6(X^2 + X + 1) \mod P'$. On pose $P_1 = 13.6(X^2 + X + 1)$ de sorte que $X^3 \equiv 1 \mod P_1$ et donc $X^{13} \equiv X \mod P_1$ de sorte que $P' \equiv -14(X - 13X + 6) \equiv -14.6(2X + 1) \mod P_1$. On pose $P_2 = 14.6(2X + 1)$ de sorte que $P_1 \equiv 13.6((-1/2)^2 + (-1/2) + 1) \equiv 13.6.3/4 \mod P_2$. La règle de Sturm donne alors que le nombre de racines réelles négatives de P est égale à $V(P, P', -\infty) - V(P, P', 0) = V(1, -14, 13.6, -12, 3/4) - V(-13.6, -6.14, 13.6, 12, 3/4) = 4 - 1 = 3$. On retrouve par ailleurs que le nombre de racines réelles positives est égale à $V(P, P', 0) - V(P, P', +\infty) = V(-13.6, -6.14, 13.6, 12, 3/4) - V(1, 14, 13.6, 12, 3/4) = 1 - 0 = 1$.

Résultant, Discriminant

Solution de l'exercice (??) L'équation algébrique est donnée par le résultant des polynômes à coefficient dans $\mathbf{Q}[x, y]$, $t^2 + t + 1 - x$ et $t^2 - 1) - y(t^2 + 1)$, soit

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-x \\ 1-y & 0 & -1-y & 0 \\ 0 & 1-y & 0 & -1-y \end{vmatrix}$$

soit $y^2x^2 - 2yx^2 + (y + x)^2 - 2x + 3 = 0$.

Solution de l'exercice (??) En effet c'est le lieu où le discriminant du polynôme caractéristique est non nul.

Solution de l'exercice (??)

(i) Il s'agit de calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

On peut par exemple faire les manipulations suivantes sur les lignes: $L_5 \leftarrow L_5 - 3L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ ce qui donne la matrice suivante :

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3q & -2p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3q & -2p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ce qui donne $4p^3 + 27q^2$.

(ii) On suppose pour commencer $p \neq 0$. En notant que $X^2 \equiv -p/3 \mod (3X^2 + p)$, on obtient $X^3 + pX + q \equiv \frac{2pX}{3} + q \mod (3X^2 + p)$ soit $P_1(X) = -(\frac{2pX}{3} + q)$. Ensuite on a $3X^2 + p \equiv 3(\frac{-3q}{2p})^2 + p \equiv \frac{27q^2+4p^3}{4p^2} \mod P_1$. Ainsi P et P' sont premiers entre eux, si et seulement si $27q^2+4p^3 \neq 0$ de sorte que $P(X) = X^3 + pX + q$ et P' ont une racine commune si et seulement si $27q^2+4p^3 = 0$, de sorte que le discriminant est égale à $27q^2+4p^3$ (cf. le corollaire (5.3.3)).

Pour $p = 0$, on a $X^3 + q \equiv q \mod (3X^2)$ de sorte que $P(X) = X^3 + q$ et P' ont une racine commune si et seulement si $q = 0$, soit si et seulement si $27q^2 = 0$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice (??) On considère donc $P_X(Y)$ et $Q_X(Y)$ comme des polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}[X]$. Le résultant est alors donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -X & X^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & -X & X^2-1 \\ 1 & -1 & 2X^2-2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2X^2-2 \end{vmatrix}$$

Un calcul aisé nous donne alors $3X(X^2 - 1)(X - 1)$.

Les points d'intersection cherchés ont pour abscisse $0, 1$ et -1 ce qui donne, en calculant Y, les points $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, 0)$, soit 4 points réels (pour rappel le théorème de Bezout donne 4 points à priori complexe dans le plan projectif).

Solution de l'exercice (??) (i) Le résultant est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & b & X^2+c \\ 1 & X^2+g & 0 \\ 0 & 1 & X^2+g \end{vmatrix}$$

soit $X^4+(2g-b+1)X^2+(g^2-bg+c)$: c'est évidemment ce que l'on trouve en éliminant Y dans les deux équations. On pose dans la suite $\alpha=2g-b+1$ et $\beta=g^2-bg+c$.

(ii) Si on veut 4 points de même abscisse, *i.e.* $P(X)=X^4+\alpha X^2+\beta=(X-x_0)^4$, il faut $x_0=0$ ce qui revient à imposer $\alpha=\beta=0$.

(iii) Pour avoir 4 racines réelles il faut et il suffit que l'équation $Z^2+\alpha Z+\beta=0$ ait deux racines réelles positives, soit $\delta=\alpha^2-4\beta\geq 0$, $\beta\geq 0$ et $\alpha\leq 0$ (la somme des racines et le produit doivent être positifs).

En utilisant la règle de Sturm (*cf.* le théorème (**??**)), on effectue les divisions euclidiennes suivantes :

$$X^4+\alpha X^2+\beta=(4X^3+2\alpha X)\frac{X}{4}-(-X^2\frac{\alpha}{2}-\beta)$$

$$4X^3+2\alpha X=(-X^2\frac{\alpha}{2}-\beta)(-X\frac{8}{\alpha})-(-X\frac{2\delta}{\alpha})$$

$$-X^2\frac{\alpha}{2}-\beta=(-X\frac{2\delta}{\alpha})X\frac{\alpha^2}{4\delta}-\beta$$

de sorte que $V(P,P',-\infty)=V(1,-4,-\alpha/2,2\delta\alpha,\beta)$ et $V(P,P',+\infty)=V(1,4,-\alpha/2,-2\delta/\alpha,\beta)$. Si on veut 4 racines réelles il faut $V(P,P',-\infty)-V(P,P',+\infty)=4$ soit $V(P,P',-\infty)=4$ et $V(P,P',+\infty)=0$ soit $\alpha\leq 0$, $\delta\geq 0$ et $\beta\geq 0$.

Solution de l'exercice (??) (i) Le système en d'équations $A(X)=B(Y-X)=0$ possède comme solutions les couples (x_a,x_b+x_a) où x_a (resp. x_b) décrit les solutions de $A(X)=0$ (resp. $B(X)=0$). On considère alors les polynômes $A(X)$ et $B(Y-X)$ comme des polynômes à valeurs dans $K[Y]$ et on introduit leur résultant qui est un polynôme en Y dont les zéros sont d'après ce qui précède, exactement les sommes des zéros de A avec ceux de B.

(ii) Appliquons ce qui précède à $A(X)=X^2-2$ et $B(X)=X^3-7$. Le résultant en question est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3Y & -3Y^2 & Y^3-7 & 0 \\ 0 & -1 & 3Y & -3Y^2 & Y^3-7 \end{vmatrix}$$

soit après calcul $Y^6 - 6Y^4 - 14Y^3 + 12Y^2 - 84Y + 41$.

Fonctions symétriques des racines

Solution de l'exercice (??) L'inégalité proposée découle directement de la concavité du logarithme $\frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n} \leq \ln \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. On applique cette inégalité aux carrés des racines de $P(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$, soit $(\sigma_n^2)^{1/n} \leq \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{n} \leq 3/n$, soit $n \leq 3$. Une inspection cas par cas donne $X \pm 1$, $X^2 \pm X - 1$, $X^3 + X^2 - X - 1$ et $X^3 - X^2 - X + 1$.

Solution de l'exercice (??) Une CNS pour que ABC soit rectangle isocèle en A est $b - a = \pm i(c-a)$, soit $(b-a)^2 + (c-a)^2 = 0$, i.e. $b^2 + c^2 + 2a^2 = 2a(b+c)$. En outre on a $a+b+c = 0$, $abc = -q$ et $ab + ac + bc = p$. Le but est alors d'éliminer dans la CNS a, b, c et de les remplacer par p et q; on a $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2p = -2p$ de sorte que la CNS s'écrit $-2p + a^2 = -2a^2$ soit $3a^2 = 2p$. Or on a $a^3 = -pa + q \neq 0$ de sorte que la CNS s'écrit $-3pa + 3q = 2pa$, soit $a = \frac{3q}{5p}$. Ainsi l'équation $3a^2 = 2p$ devient $27q^2 - 50p^3 = 0$.

Solution de l'exercice (??) On a donc $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2 = 2(\alpha+\beta)$, $\alpha\beta\gamma\delta = 1 = -(\alpha\beta)^2$ de sorte que α, β (resp. γ, δ) sont les racines de $X^2 - X + i$ (resp. $X^2 - X - i$). En outre on a $(\beta+\alpha)(\gamma+\delta) + (\alpha\beta + \gamma + \delta) = -a = 1$ et $\alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = b = 0$.

Solution de l'exercice (??) Les relations de Newton donnent $2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^4 - 4\sigma_2\sigma_1^2 + 4\sigma_3\sigma_1 + 2\sigma_2^2$ soit $\sigma_2 = \sigma_1^2/2 - 1$ et $3\sigma_3 = 2 - \sigma_1^3 + 3\sigma_1(\sigma_1^2/2 - 1)$ et la dernière équation devient alors $\sigma_1(\sigma_1^3/6 - 2\sigma_1 + 8/3) = 0$. Les racines de $X^3 - 12X + 16$ étant 2 et -4, on obtient alors $\sigma_1 = 0, 2, -4$ et donc $\sigma_2 = -1, 1, 7$ et $\sigma_3 = 2, 0, -6$. Les triplets (x, y, z) sont alors les racines des polynômes $X^3 - X - 2$, $X^3 - 2X^2 + X$, $X^3 + 4X^2 + 7X + 6$.

Problèmes

Solution du problème (??)

(1) Soit $l_i(X)=\prod_{0\leq j\neq i\leq n}\frac{(X-a_j)}{a_i-a_j}$ et soit $P(X)=\sum_{i=0}^n b_i l_i(X)$ qui est donc de degré inférieur ou égal à n. On a alors $P(a_i)=b_i$ pour tout $i=0,\cdots,n$.

Montrons alors l'unicité d'une telle solution dans $\mathbf{C}_n[X]$. Pour tout complexe a, on note δ_a la forme linéaire définie par $\delta_a(f)=f(a)$. Sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}_n[X]$ de dimension $n+1$, les $n+1$ formes linéaires $\delta_{a_0},\cdots,\delta_{a_n}$ sont indépendantes. En effet soit $l_i(X)=\prod_{0\leq j\neq i\leq n}\frac{(X-a_j)}{a_i-a_j}$ de sorte que $\delta_{a_i}(l_j)=\delta_{i,j}$. Ainsi pour toute relation $\sum_{i=0}^n \lambda_i\delta_{a_i}=0$, on obtient, en la testant sur l_i, $\lambda_i=0$, d'où la liberté de la famille $(\delta_{a_0},\cdots,\delta_{a_n})$. On en déduit alors que si P_1 et P_2 vérifient $P_1(a_i)=P_2(a_i)$ pour tout $i=0,\cdots,n$, alors P_1-P_2 appartient à l'intersection des noyaux $\ker\delta_{a_i}$ qui est de dimension celle de l'espace moins le nombre de formes linéaires indépendantes, soit $(n+1)-(n+1)=0$. On a ainsi montrer l'unicité de la solution.

(2) (a) La réponse est évidemment négative comme on peut le constater dans le cas $Q(X)=X$ et $P(x)=X^2$.

(b) On note n_i (resp. m_i) la multiplicité de α_i (resp. β_i) dans P (resp. dans $P-1$). On a alors $\sum_{i=1}^r n_i=\sum_{i=1}^s m_i$. Par ailleurs si $n_i\geq 2$ (resp. $m_i\geq 2$), alors α_i (resp. β_i) est une racine de P' de multiplicité n_i-1 (resp. m_i-1). Par ailleurs comme les α_i sont distincts de β_j, on en déduit alors l'inégalité

$$\sum_{i=1}^s(m_i-1)+\sum_{i=1}^r(n_i-1)\leq\deg P-1$$

soit $2\deg P-r-s\leq\deg P-1$ et donc $r+s\geq\deg P+1$.

(c) On considère le polynôme $R=P-Q$ de sorte que les α_i et les β_i sont des racines de R. D'après la question précédente, on a ainsi $r+s>\deg R$ racines ce qui impose que R soit le polynôme nul.

Solution du problème (??)

à $\cos(nx)$.