Université Pierre et Marie Curie Licence A

Devoir 1

Exercice 1. *Soient I et J des idéaux de A, rappelez les définitions de $I+J$ et $I.J$. Enoncez le théorème chinois et décrivez les idéaux de A/I en fonction de ceux de A.*

Exercice 2. *(a) Un idéal strict de A est dit maximal s'il l'est pour l'inclusion, i.e. le seul idéal qui le contienne est A lui-même. Montrez que $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de A si et seulement si $A/\mathcal{M}$ est un corps.*

(b) Un idéal $\mathcal{P}$ de A est dit premier s'il vérifie la propriété suivante:

$$xy \in \mathcal{P} \text{ et } x \notin \mathcal{P} \Rightarrow y \in \mathcal{P}$$

Montrez que $\mathcal{P}$ est un idéal premier de A si et seulement si $A/\mathcal{P}$ est intègre.

(c) Un idéal $\mathcal{Q}$ sera dit primaire s'il vérifie:

$$\forall x, y \in A \; xy \in \mathcal{Q}, \; x \notin \mathcal{Q} \Rightarrow \exists n \; y^n \in \mathcal{Q}.$$

Si $\mathcal{Q}$ est primaire que peut-on dire de $A/\mathcal{Q}$? Pour tout idéal I de A, on pose $\sqrt{I} = \{x \in A \;/\; \exists n \; x^n \in I\}$. Montrer que Q primaire entraine que sa racine est un idéal premier. Réciproquement: soit $I = (X)$, $n > 1$ $J = (X,Y)^n$ dans $A = \mathbb{C}[X,Y]$. Montrer que $Q = I \cap J$ n'est pas primaire bien que son radical soit premier.

Exercice 3. *Soient A un anneau intègre de corps des fractions $\mathbb{K}$ et soit S une partie multiplicative de A, i.e. $0 \notin S$, $1 \in S$ et $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$. On appelle localisé de A relativement à S, l'ensemble noté $S^{-1}A$ des éléments de $\mathbb{K}$ que l'on peut écrire comme une fraction $\frac{a}{s}$ avec $s \in S$.*

(i) Montrez que $S^{-1}A$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$ qui contient A.

(ii) Montrez que si A est principal alors $S^{-1}A$ aussi.

(iii) Soit P un idéal premier de A et soit $S = A \backslash P$. Montrez que S est multiplicativement stable et que $S^{-1}A$ est un anneau local, i.e. possède un unique idéal maximal.

(iv) Soit S' l'ensemble des $x \in A$ dont un multiple appartient à S. Montrez que S' est multiplicativement stable et que $(S')^{-1}A = S^{-1}A$. En déduire que si A est factoriel alors $S^{-1}A$ aussi.

(v) Montrez que si A est principal (resp. euclidien) alors $S^{-1}A$ l'est aussi.

Etude de quelques anneaux de fonctions

Exercice 4. *Soit k un corps et $A = k[[X]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans k.*

(i) Montrez que A est intègre et déterminez $A^\times$.

(ii) Montrez que tout idéal non nul de A est de la forme X^nA, $n \in \mathbb{N}$. En déduire que A est principal et déterminez ses éléments irréductibles.

(iii) Montrez que A est euclidien.

Exercice 5. *Soit E un espace compact et $A = \mathcal{C}(E)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur E, muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit ϕ l'application qui à un fermé associe l'idéal $V(F) = \{f \in A,\ f_{|F} = 0\}$.*

(i) Déterminez $A^\times$.

(ii) Montrez que tout idéal maximal de A est fermé.

(iii) Montrez que les idéaux maximaux de A sont les $V(\{a\})$ avec $a \in E$.

(iv) Montrez que ϕ établit une bijection entre les fermés de E et les idéaux fermés de A.

Exercice 6. *Soit $A = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe.*

(i) Montrez que A est intègre et donnez son corps des fractions.

(ii) Montrez que A n'est pas noethérien.

(iii) Donnez $A^\times$ et montrez que $f \in A$ est inversible si et seulement si $f = \exp(g)$ pour $g \in A$.

(iv) Montrez que les éléments irréductibles de A sont les fonctions possèdant un unique zéro simple, et en déduire que A n'est pas factoriel.

(v) Montrez que A est intégralement clos.

Exercice 7. *Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\overline{D}$ le disque unité fermé. On note $\mathcal{A}(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{D}$ et holomorphes sur D. L'algèbre $\mathcal{A}(D)$ munie de la norme de la convergence uniforme est alors de Banach.*

(i) Montrez que l'ensemble des polynômes complexes est dense dans $\mathcal{A}(D)$.

(ii) Soient $f_1, \cdots, f_n$ ($n \geqslant 2$) des éléments de $\mathcal{A}(D)$, n'ayant pas de zéros communs. Montrez que l'idéal I qu'ils engendrent est $\mathcal{A}(D)$ tout entier.

(iii) Montrez que les idéaux maximaux de $\mathcal{A}(D)$ sont les $\{f \in \mathcal{A}(D),\ f(\alpha) = 0\}$ où $\alpha \in \overline{D}$.

Indication: on rappelle que dans une algèbre de Banach, les idéaux maximaux sont les noyaux des formes linéaires multiplicatives non nulles.