Devoir 2

Equations diophantienne: ce sont des équations à plusieurs variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont on cherche les solutions dans $\mathbb{Z}$. Il n'y a pas de résultat général loin de là puisque plus ou moins toutes les maths sont contenues dans cette question; on peut parfois chercher simplement l'existence ou non d'une solution, cf. par exemple l'équation de Fermat. C'est un domaine de recherche actuel très actif qui fourmille d'idées et de techniques très complexes. On donne dans ce qui suit des exemples très simples.

Exercice 1. *Etudier les solutions entières de l'équation* $(x^2-9)(x^2-16)=y^2$.
On pensera bien évidemment à factoriser le plus possible et à utiliser l'exercice ??

Exercice 2. *On considère l'équation* $y^2=x^3+7$*:*

(i) Montrer qu'il n'y a pas de solutions avec x *pair;*

(ii) En écrivant l'équation sous la forme $y^2+1=x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$ *et en utilisant l'exercice 1 b, en déduire qu'il n'existe pas de solutions entières.*

Exercice 3. *On cherche les solutions entières de l'équation* $x^2+y^2=z^2$ *avec* $(x,y,z)=1$*:*

(i) Montrez que z *et* y *(ou* x*) sont impairs;*

(ii) Montrez que $(z-y,z+y)=2$*;*

(iii) En déduire que les solutions sont paramétrées par u *et* v *avec* $u\not\equiv v \bmod 2$, $(u,v)=1$ *et* $x=2uv$, $z=u^2+v^2$ *et* $y=|u^2-v^2|$.

Exercice 4. *Soit* $A=\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]=\{a+ib\sqrt{2}\ /\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$*. On définit pour* $z=a+ib\sqrt{2}\in A$, $N(z)=a^2+2b^2$.

(a) Montrez que B *est euclidien et donc factoriel.*

(b) Soient $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$*, vérifiant l'équation* $y^2+2=x^3$*. Montrez que* x *est impair puis que dans* B, $y+i\sqrt{2}$ *et* $y-i\sqrt{2}$ *sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe* $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ *tels que* $x=a^2+2b^2$ *et* $y+i\sqrt{2}=(a+ib\sqrt{2})^3$*, puis décrire les solutions de l'équation précédente.*

(c) Etudier comme dans l'exercice précédent l'ensemble $S=\{n\in\mathbb{N}\ /\ \exists(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ n=x^2+2y^2\}$.
Indication*: on utilisera que* -2 *est un carré dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $p\equiv 1,3 \bmod 8$.

(d) Etudier de même l'ensemble $\{n\in\mathbb{Z}\ /\ \exists(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ n=x^2-2y^2\}$.

Exercice 5. *Etude de l'équation de Pell-Fermat:* $x^2-Ny^2=1$.

(i) Traitez le cas $N\leqslant 0$.

(ii) Montrez que dans le cas où N *est un carré parfait, les solutions triviales* $x=\pm1, y=0$ *sont les seules.*

(iii) *On suppose donc $N > 1$ et N n'est pas un carré parfait. En utilisant l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]$, montrez l'égalité:*

$$(x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

En déduire que s'il existe un solution non triviale (x_0, y_0) à l'équation de Pell-Fermat, alors il en existe une infinité (x_n, y_n) définie par récurrence:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0x_n + Ny_0y_n \\ y_{n+1} = x_0y_n + x_ny_0 \end{cases}$$

Calculez par exemple pour $N = 2$, les 3 premiers termes de cette suite en remarquant que $(3, 2)$ est solution.

(iv) *Montrez que pour (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des solutions positives de l'équation, les équivalences*

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2 \Leftrightarrow (x_1 + y_1\sqrt{N}) < (x_2 + y_2\sqrt{N})$$

En déduire que s'il existe des solutions non triviales alors il existe une solution minimale (x_0, y_0) pour une relation d'ordre que l'on définira. Montrez ensuite que l'ensemble des solutions sont les (x_n, y_n) définis ci-dessus.

(v) *On veut montrer l'existence d'une solution non triviale. Montrez qu'il existe une infinité de rationnels p/q tels que $|\sqrt{N} - p/q| < 1/q^2$.*

Indication: commencez par remarquer que p ou $p - 1$ est la partie entière de $q\sqrt{N}$, puis appliquez le principe des chaussettes et des tiroirs ($n+1$ chaussettes rangées dans n tiroir, implique qu'un tiroir contient au moins deux chaussettes), où les chaussettes sont les $n\sqrt{N} - [n\sqrt{N}]$ pour $0 \leqslant n \leqslant q$ et les tiroirs sont les intervalles $[k/q, (k+1) : q]$ pour $0 \leqslant k < q$.

En déduire qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux tels que $-1 - 2\sqrt{N} < p^2 - Nq^2 < 1 + 2\sqrt{N}$. En utilisant à nouveau le principe des tiroirs, montrez qu'il existe un entier $l < 1 + 2\sqrt{N}$, $p_1 \equiv p_2 \bmod l$, $q_1 \equiv q_2 \bmod l$ tels que $p_1^2 - Nq_1^2 = p_2^2 - Nq_2^2 = \pm l$, et en déduire l'existence d'une solution non triviale.