Problème 1 Le jeu de taquin, dit $15-14$ fut commercialisé en 1873. Il s'agissait d'un carré constituait de 15 cases numérotées de 1 à 15 ainsi qu'un seizième emplacement vide

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Une opération élémentaire consiste à faire glisser une des cases numérotées dans l'espace libre comme dans la figure ci-dessous

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14 $\longrightarrow$	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15		14

Le jeu suscita un engouement extraordinaire après le défi lancé par le fabriquant qui avait proposé une fortune au premier qui parviendrait à remettre les cases dans le bon ordre.

Afin de résoudre le défi, on propose de numéroter la case vide par 16 et de noter la configuration suivante

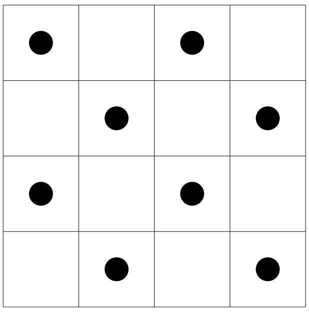
3	5	11	6
7	9	14	12
1	10		2
4	15	8	13

sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 3 & 5 & 11 & 6 & 7 & 9 & 14 & 12 & 1 & 10 & 16 & 2 & 4 & 15 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

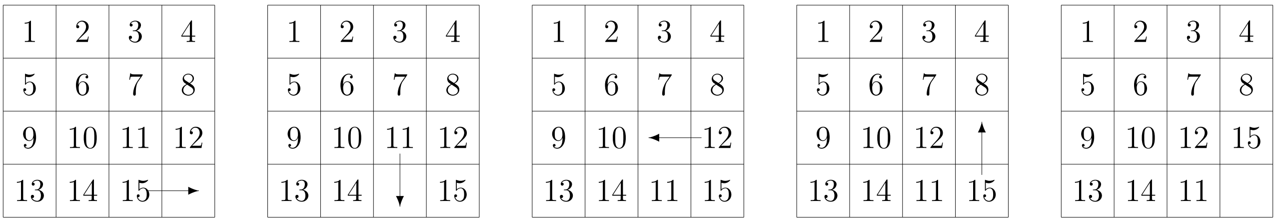
et de le considérer comme un élément de $\mathcal{S}_{16}$. Ainsi un mouvement élémentaire correspond à une transposition de 16 avec un de ses voisins, ici 14, 10, 8 et 2. On considère le marquage suivant

(1) Montrer que si la cas 16 est sur une case marquée (resp. non marquée) alors la permutation associée est de signature 1 (resp. -1). Que pensez-vous du défi proposé à l'époque ?



(2) On inverse, en démontant le jeu, les cases 14 et 15. On veut alors déterminer quelles sont exactement toutes les permutations de $\mathcal{S}_{16}$ que l'on peut obtenir. On commence par étudier celles telle que 16 est invariante, de sorte que l'on peut considérer la permutation en question comme un élément de $\mathcal{S}_{15}$ qui d'après (1) est un élément de $\mathcal{A}_{15}$.

(i) On considère les 3 déplacements élémentaires de la case 16 suivant.



Quel élément de $\mathcal{A}_{15}$ obtient-on?

(ii) Construire d'autres 3-cycles, par exemple $(1\ 6\ 2)$, $(7\ 6\ 11)$, $(6\ 7\ 3)$, $(5\ 9\ 6)$, $(6\ 10\ 7)$, $(4\ 3\ 8)$, $(11\ 15\ 12)$, $(10\ 14\ 11)$, $(9\ 13\ 10)$.

(iii) Montrer que $\mathcal{A}_{15}$ est engendré par les 3-cycles $(1\ 2\ i)$ pour $3 \leqslant i \leqslant 15$.

iv) Montrer que toute permutation de $\mathcal{A}_{15}$ peut être obtenue.

(3) Déterminer alors toutes les configurations possibles. En outre en démontant et remontant le jeu de manière aléatoire, quelles sont les chances de pouvoir, en jouant, revenir sur la position ordonnée comme précédemment.

Preuve : (1) On remarque qu'une opération élémentaire correspond, dans $\mathcal{S}_{16}$, à une transposition et fait passer la case vide, numérotée 16, d'une case marquée (resp. non marquée) à une case non marquée (resp. marquée), de sorte qu'au bout de n opérations élémentaires la signature de la permutation obtenue est $(-1)^n$ et la cas 16 se trouve sur une case non marquée pour n impair et marquée pour n pair.

Ainsi si la case vide se retrouve en position initiale, la signature de la permutation obtenue est forcément égale à 1 de sorte qu'il est impossible d'obtenir la transposition $(14\ 15)$ et de gagner la fortune promise.

(2) (i) On obtient le 3-cycle $(11\ 15\ 12)$.

(ii) Pour obtenir les autres 3-cycles de l'énoncé, il suffit de faire glisser la cas vide dans la bonne position et d'opérer les manipulations de l'énoncé pour obtenir le nouveau 3-cycle, puis de ramener la case vide dans sa position initiale. On illustre se principe dans le cas de $(9\ 13\ 10)$.

(iii) On rappelle que $\mathcal{A}_{15}$ est engendré par les 3-cycles. Le principe est alors d'écrire tout 3-cycle $(i\ j\ k)$ comme un produit de 3-cycles $(1\ 2\ s)$. L'idée est alors de considérer des conjugués,

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13		14	15

1	2	3	4
5	6	7	8
10	13	11	12
9		14	15

1	2	3	4
5	6	7	8
10	13	11	12
9	14	15	

par exemple pour i, j, k distincts et distincts de 1 et 2, on a: $(1\ 2\ i)(1\ 2\ j)(1\ 2\ i)^{-1} = (2\ i\ j)$ et $(1\ 2\ k)(2\ i\ j)(1\ 2\ k)^{-1} = (k\ i\ j)$ d'où le résultat.

(iv) D'après (iii), $\mathcal{A}_5$ est engendré par les 3-cycles $(2\ 1\ i)$ pour $3 \leqslant i \leqslant 15$. Par ailleurs le sous-ensemble cherché est évidemment un sous-groupe de $\mathcal{A}_5$ de sorte qu'il suffit de montrer que l'on peut obtenir tous les $(2\ 1\ i)$. A nouveau on considère des conjugaisons des éléments dont on dispose. Ainsi en conjugant $(2\ 1\ 6)$ avec $(5\ 9\ 6)$, $(5\ 9\ 6)^{-1}$, $(6\ 10\ 7)$, $(6\ 11\ 7)$, $(6\ 7\ 3)$ et $(6\ 7\ 3)^{-1}$, on obtient respectivement $(2\ 1\ 5)$, $(2\ 1\ 9)$, $(2\ 1\ 10)$, $(2\ 1\ 11)$, $(2\ 1\ 7)$ et $(2\ 1\ 3)$. En conjuguant $(2\ 1\ 3)$ (resp. $(2\ 1\ 11)$, resp. $(2\ 1\ 10)$) avec $(3\ 8\ 4)$ et $(3\ 8\ 4)^{-1}$ (resp. $(11\ 15\ 12)$, resp. $(10\ 14\ 11)$, $(9\ 13\ 10)$ et $(9\ 13\ 10)^{-1}$), on obtient $(2\ 1\ 8)$ et $(2\ 1\ 4)$ (resp. $(2\ 1\ 15)$, resp. $(2\ 1\ 14)$, $(2\ 1\ 9)$ et $(2\ 1\ 13)$), d'où le résultat.

(3) La condition de parité du point (i) est le seul impératif. En effet il suffit de décider d'un chemin pour faire passer la case vide de la position initiale (celle de (i)) à la position cherchée, ce qui induit une bijection de l'ensemble des configurations avec la case vide en position initiale avec l'ensemble des configurations avec la case vide à la position considérée, d'où le résultat.

Ainsi si on remonte le jeu au hasard, on a une chance sur deux de tomber juste.