Les exercices étoilés (*) s'adressent aux seuls étudiants inscrits à l'unité MO12

Devoir 2

1 Simplicité des $PSL(V)$

(Devoir à rendre avant les vacances de Noel)

Exercice 1. *Soient k un corps, V un $k$espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $GL(V)$ invariant par conjugaison par les éléments de $SL(V)$. On veut montrer que si G n'est pas inclu dans le centre de $GL(V)$ alors il contient $SL(V)$.*

Etant donnés une forme linéaire $f : V \longrightarrow k$ et $u \in \operatorname{Ker} f$, on note $\tau_{f,u}$ la transvection définie par

$$\tau_{f,u}(v) = v + f(v)u$$

(i) On suppose $n \geqslant 3$. Montrer qu'il existe $\sigma \in G$ tel que

$$\{\sigma(v) - v \ / \ v \in V\} \neq V.$$

Indication: On montrera qu'il existe $\rho \in G$ et $u \in V$ tel que u et $\rho(u)$ ne sont pas colinéaires. Considérer $\sigma = \tau^{-1}\tau^{\rho}$ pour une transvection τ bien choisie.

Une fois choisi un tel élément $\sigma \in G$, on note U un hyperplan de V qui contient tous les $\sigma(v) - v$. Soit $\tau_{f,u}$ une transvection associée à U. Montrer que $\tau_{f,u}^{\sigma} = \tau_{f,\lambda.u^{\sigma}}$ pour un élément λ non nul de k.
Conclure.

(ii) On suppose $n = 2$ et $|k| \geqslant 4$. Justifier que l'on peut trouver $\rho \in G$ et une base v_1, v_2 de V tels qu'il existe des scalaires λ_1, λ_2 avec:

$$\rho(v_1) = v_2 \qquad \rho(v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

En considérant des commutateurs $\sigma = \tau^{-1}\rho^{-1}\tau\rho$ où τ est tel que

$$\tau(v_1) = \lambda_0\lambda_2 v_1 - \lambda_0 v_2 \qquad \tau(v_2) = \lambda_0^{-1} v_1$$

pour λ_0 un scalaire tel que $\lambda_0^2 \neq \lambda_1^{-1}$, montrer qu'il existe une transvection d'axe v_1 qui est dans G. Montrer ensuite que toutes les transvections d'axe v_1 sont dans G et conclure.

En déduire que $PSL(V)$ est simple.