Les exercices étoilés (*) s'adressent aux seuls étudiants inscrits à l'unité MO12

Devoir 3

1 Groupes libres, systèmes de générateurs et de relations

Exercice 1. *(devoir à rendre pour les MU11) Générateurs et système fondamental de relations pour $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$:*

(a) *Générateurs et relations pour $\mathcal{S}_n$: on note pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $a_i = (i, i+1)$. Le groupe $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions a_i pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ qui vérifient les relations suivantes:*

$$\begin{aligned} a_i^2 &= 1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ (a_i a_{i+1})^3 &= 1 \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-2 \\ (a_i a_j)^2 &= 1 \qquad |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Le but de l'exercice est de montrer que ces relations forment un système fondamental de relations de $\mathcal{S}_n$ pour les générateurs a_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Soit donc un groupe G engendré par des éléments $x_1, \cdots, x_{n-1}$ satisfaisant aux relations:

$$\begin{aligned} x_i^2 &= 1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ (x_i x_{i+1})^3 &= 1 \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-2 \\ (x_i x_j)^2 &= 1 \qquad |i-j| > 1. \end{aligned}$$

(i) *Montrez que pour $n = 2$, G est isomorphe à $\mathcal{S}_2$.*

(ii) *On suppose $n \geqslant 3$ et soit H le sous-groupe de G engendré par $x_1, \cdots, x_{n-2}$. On pose $K = H \cup Hx_{n-1} \cup \cdots \cup Hx_{n-1}.\cdots.x_2.x_1$. Montrez que K est un sous-groupe de G. En déduire que $K = G$.*

(iii) *Par récurrence, montrez que* card$G \leqslant n!$, *puis finalement que $G \simeq \mathcal{S}_n$.*

(b) *Générateurs et relations pour $\mathcal{A}_n$:*

(i) *Montrez que $a_1 = (1,2,3)$ et $a_i = (1,2)(i+1, i+2)$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$ est un système de générateurs de $\mathcal{A}_n$ soumis aux relations:*

$$\begin{aligned} a_1^3 = a_i^2 &= 1 \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-2 \\ (a_i a_{i+1})^3 &= 1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-3 \\ (a_i a_j)^2 &= 1 \qquad |i-j| > 1. \end{aligned}$$

(ii) Soit G un groupe engendré par des éléments $x_1, \cdots x_{n-2}$ satisfaisant aux relations:

$$x_1^3 = x_i^2 = 1 \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-2$$

$$(x_i x_{i+1})^3 = 1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-3$$

$$(x_i x_j)^2 = 1 \qquad |i-j| > 1.$$

$*$ *Montrez que pour $n = 3$, le groupe G est isomorphe à $\mathcal{A}_3$.*

$*$ *On suppose $n \geqslant 4$. Soit H le sous-groupe de G engendré par $x_1, \cdots x_{n-3}$. On pose*

$$K = H \cup Hx_{n-2} \cup \cdots \cup Hx_{n-2}. \cdots x_2.x_1 \cup Hx_{n-2}. \cdots .x_2.x_1^2$$

Montrez que K est un sous-groupe de G, puis que $K = G$.

$*$ *Par récurrence, montrez que* $\mathrm{card} G \leqslant n!/2$ *et conclure que $G \simeq \mathcal{A}_n$.*

2 (*) Le paradoxe de Banach-Tarski

(devoir à rendre pour les MO12)

Exercice 1. *(a) On considère les deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$, u, v dont les matrices dans la base canonique sont*

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Soit G le groupe engendré par u et v. Montrez que tout élément $r \in G \backslash \{Id, u\}$ s'écrit de manière unique sous la forme $r = u^{\epsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} u \cdots u v^{n_k} u^{\epsilon_2}$ avec $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ et les $n_i \in \{1, 2\}$.

(b) On définit une partition (I, J, K) de G de la manière suivante

- *pour tout n, $(v^2u)^n \in I$;*
- *pour tout n, $u(v^2u)^n \in J$;*
- *pour tout n, $vu(v^2u)^n \in K$;*
- *les éléments de G qui ne sont pas de cette forme appartiennent à I, J, K respectivement suivant que leur écriture commence à gauche par u, v, v^2 respectivement.*

Montrez que $K = vJ$, $I = vK$ et $I = u(J \cup K)$.

Exercice 2. *(a) Deux parties A et B de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ sont dites superposables et on notera $A\mathcal{D}B$, s'il existe un déplacement r de $\mathbb{R}^3$ tel que $B = r(A)$. Montrez que l'on définit bien ainsi une relation d'équivalence.*

(b) Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$; on pose

$$D = \{x \in S \ / \ \exists r \in G \backslash \{Id\}, \ r(x) = x\}$$

Montrez que D est dénombrable et est stable par G.

(c) Les orbites de $S\backslash D$ sous l'action de G, constituent une partition de $S\backslash D$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble T contenant un élément de chaque orbite. En posant $A = I(T)$, $B = J(T)$ et $C = K(T)$, montrez que l'on a ainsi une partition finie (A, B, C, D) de S avec D dénombrable, A, B, C superposables et $A\mathcal{D}(B \cup C)$. [1]

Exercice 3. *(a) On appelle découpage d'une partie A de $\mathbb{R}^3$, une partition finie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de A. On dira que deux parties A, B de $\mathbb{R}^3$ sont puzzle-équivalentes s'il existe une entier n et des découpages $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i et B_i sont superposables. Vérifiez que l'on obtient bien ainsi une relation d'équivalence que l'on notera $\mathcal{P}$.*

(b) Soient S_1 et S_2 deux sphères disjointes de rayon 1, de centres respectifs O_1, O_2 et soient (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) les découpages obtenus en translatant (A, B, C, D). Montrez que

$$(S\backslash D)\mathcal{P}((S_1\backslash D_1) \cup (S_2\backslash D_2))$$

(c) On cherche à éliminer les ensembles dénombrables dans la duplication de la sphère ci-dessus. On veut prouver le résultat suivant: si Σ est une sphère et Δ est un sous-ensemble dénombrable de Σ, alors

$$\Sigma\mathcal{P}(\Sigma\backslash\Delta)$$

Pour cela montrez que l'on peut choisir $\delta \in \Sigma$ tel que $\pm\delta \notin \Delta$. En déduire que l'ensemble des rotations d'axe (O, δ) vérifiant qu'il existe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $x, y \in \Delta$ tels que $r^n(x) = y$ est dénombrable. Soit alors ρ une rotation n'appartenant pas à cet ensemble, de sorte que les ensembles $\rho^n(\Delta)$ sont deux à deux disjoints. En considérant $U = \bigcup_{n\geqslant 0} \rho^n(\Delta)$, prouvez le résultat.

(d) On veut désormais dupliquer les boules fermées. Montrez que

$$(K\backslash\{O\})\mathcal{P}((K_1\backslash\{O_1\}) \cup (K_2\backslash\{O_2\}))$$

En considérant $\Delta = \{(\cos n, \sin n, 0),\ n \in \mathbb{N}\}$, montrez que la rotation d'axe z et d'angle 1 radian envoie Δ sur $\Delta\backslash\{(1, 0, 0)\}$. En déduire que

$$K\mathcal{P}K\backslash\{(1, 0, 0)\}$$

puis le résultat de duplication des boules.
Remarque: De manière plus générale, on peut montrer le théorème suivant
Théorème *(Banach-Tarski) Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^3$ bornées et d'intérieurs non vides, alors A et B sont puzzle-équivalentes.*

[1]En quelque sorte, A est à la fois la moitié et le tiers de la sphère.