Les exercices étoilés (*) s'adressent aux seuls étudiants inscrits à l'unité MO12

Feuille d'exercices 2

1 Polyèdres réguliers

1.1 Trois polyèdres réguliers et leurs groupes.

Exercice 1. *Le tétraèdre régulier: on note $\mathcal{I}_T$ le groupe des isométries qui laissent le tétraèdre globalement invariant et $\mathcal{D}_T$ le sous-groupe de $\mathcal{I}_T$ constitué par les déplacements de $\mathcal{I}_T$.*

(i) *Montrez que l'on peut considérer $\mathcal{I}_T$ (resp. $\mathcal{D}_T$) comme un sous-groupe de $O(3)$ (resp. $SO(3)$).*

(ii) *Montrez que $\mathcal{I}_T$ est fini de cardinal $\leqslant 24$.*

(iii) *Montrez que $\mathcal{I}_T \simeq \mathcal{S}_4$ et $\mathcal{D}_T \simeq \mathcal{A}_4$.*

Exercice 2. *Le cube: avec des notations analogues on introduit $\mathcal{I}_C$ et $\mathcal{D}_C$.*

(i) *Montrez que $\mathcal{I}_C$ est fini. Quel est l'indice $[\mathcal{I}_C : \mathcal{D}_C]$.*

(ii) *En faisant opérer $\mathcal{I}_C$ sur l'ensemble Δ des 4 diagonales, montrez que $\mathcal{D}_C$ est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.*

(iii) *Décrivez $\mathcal{I}_C$.*

Exercice 3. *L'octaèdre: soit S la sphère circonscrite à l'octaèdre. On introduit le cube dont les faces sont les plans polaires aux 6 sommets de l'octaèdre par rapport à S. On l'appelle le cube dual à l'octaèdre, pourquoi?*

Montrez qu'une isomètrie laisse l'octaèdre globalement invariant si et seulement si il laisse son cube dual globalement invariant. Conclure.

Quel est le dual du tétraèdre?

1.2 Les sous-groupes finis de $SO(3)$

Soit Γ un sous-groupe fini de $SO(3)$ et N son cardinal.

Exercice 4. *Equation aux classes: on appelle pôle de Γ, un élément de la sphère unité tel qu'il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) = x$.*

(i) *Soit x un pôle de Γ, décrivez le stabilisateur Γ_x. On note n_x le cardinal de Γ_x.*

(ii) *On note $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x sous Γ. Montrez que tout élément de $\mathcal{O}_x$ est un pôle de Γ et que pour tout $x' \in \mathcal{O}_x$ on a $n_{x'} = n_x$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des orbites et pour $C \in \mathcal{C}$, on note n_C le nombre n_x pour $x \in C$.*

(iii) On considère les couples (γ, x) où $\gamma \in \Gamma \backslash \{e\}$ et où x est un pôle relatif à γ. En comptant ces couples de deux manières différentes, montrer que l'on a l'équation aux classes:

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{C \in \mathcal{C}} (1 - \frac{1}{n_C}).$$

Exercice 5. *(*) Discussion de l'équation aux classes: montrez qu'il y a 2 ou 3 orbites.*

(i) Cas de 2 orbites: résoudre l'équation aux classes et donner les sous-groupes correspondants.

(ii) Cas de 3 orbites: on classe les n_C: $2 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$. Montrer que $n_1 = 2$ puis que $n_2 = 2$ ou 3.
Montrez que dans le cas où $n_1 = n_2 = 2$, on trouve le groupe diédral $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Montrez que dans le cas où $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ il y a 3 possibilités $n_3 = 3$ et $N = 12$ ou $n_3 = 4$ et $N = 24$ ou $n_3 = 5$ et $N = 60$.
On pourra se référer à Arnaudiès **Les cinq polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$ et leurs groupes.** *pour l'étude de ces 3 cas. Le résultat final est que l'on retrouve les groupes $\mathcal{A}_4, \mathcal{S}_4$ et $\mathcal{A}_5$. On décrit aussi les pôles dans chacun des cas.*

2 Produits semi-direct

2.1 Définition et généralités: rappels du cours

Soient N et H deux groupes, $\Psi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupe. Soit $G = N \times H$ en tant qu'ensemble.

- Montrez que G peut être muni d'une structure de groupe via la formule suivante:

  $$(n, h).(n', h') := (n\Psi(h)(n'), hh')$$

  On notera $h.n$ pour $\Psi(h)(n)$. L'ensemble G muni de cette structure de groupe sera appelé le produit semi-direct de N par H et noté $N \rtimes_\Psi H$.

  Remarque: Si $\Psi(h) = \mathrm{Id}_N$ pour tout $h \in H$, quelle structure de groupe retrouve-t-on?

- Montrez que dans G, on retrouve deux sous-groupes $\overline{N}$ et $\overline{H}$ isomorphes respectivement à N et H. Montrez que $\overline{N}$ est distingué dans G et que $\overline{h.n} = \overline{h}\overline{n}\overline{h}^{-1}$. Montrez que l'on a une suite exacte courte

  $$1 \longrightarrow N \longrightarrow N \rtimes_\Psi H \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

2.2 Suite exacte scindée

Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. On dit d'un sous-groupe H de G qu'il est un relèvement de G/N, si la surjection canopnique $G \longrightarrow G/N$ induit un isomorphisme de H vers G/N. On dit aussi que la suite exacte

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow N \rtimes_\Psi H \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

est scindée. Montrez que si G/N admet un relèvement H alors G est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes_\Psi H$ et précisez Ψ.

2.3 Isomorphismes entre produits semi-directs

Soient ψ, ϕ des morphismes de H vers $\mathrm{Aut}(N)$. Montrez que dans les deux situations suivantes, on a $N \rtimes_\psi H \simeq N \rtimes_\phi H$:

- on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$;
- on suppose qu'il existe $u \in \mathrm{Aut}(N)$ tel que $\forall h \in H$, $\phi(h) = u\psi(h)u^{-1}$.

2.4 Le groupe diédral

Dans le plan affine, on considère le polygone régulier à n cotés, formé par les points d'affixe les racines n-ièmes de l'unité. On considère le sous-groupe G du groupe des isométries du plan, constitués des isométries qui laissent stable ce polygone. Montrez que G est un produit semi-direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $\psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ que l'on précisera. Le groupe G ainsi défini est le groupe diédral noté D_n.

2.5 $\mathcal{S}_n$

- Montrez que $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit semi-direct $\mathcal{A}_n \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Peut-on faire en sorte que le produit soit direct ?
- Montrez que $\mathcal{S}_3 \simeq D_3$.

2.6 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

- Quels sont les produit semi-directs $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
- Même question pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- Même question pour $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p et q premiers impairs.
- (*) Soit p premier impair. Etudier les produits semi-direct $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et construire un groupe non abélien d'ordre p^3.
- (*) On note $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le groupe de Klein. Montrez qu'il existe des produits semi-directs non triviaux $V \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et qu'ils sont tous isomorphes. Même question avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes V$.
- (*) Etudier les produits semi-directs $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- On considère la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  Peut-on en trouver une section telle qu'éventuellement le produit soit direct ?

2.7 Groupes classiques

Soient n un entier strictement positif et $\mathbb{K}$ un corps.

- On note $T(n,\mathbb{K})$ (resp. $D(n,\mathbb{K})$, resp. $U(n,\mathbb{K})$) le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ formé des matrices triangulaires supérieures (resp. diagonales, resp. triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale). "Montrez" que $T_(n,\mathbb{K}) = U(n,\mathbb{K}) \rtimes D(n,\mathbb{K})$.
- On s'intéresse à la suite exacte

$$1 \longrightarrow SL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\det} \mathbb{K}^\times \longrightarrow 1$$

  - Montrez que $GL_n(\mathbb{K})$ est produit semi-direct de $SL_n(\mathbb{K})$ par $\mathbb{K}^\times$.
  - Montrez que cette suite exacte possède une section qui identifie $GL_n(\mathbb{K})$ au produit direct $SL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^\times$ si et seulement si il existe un homomorphisme de groupes $\phi : \mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^\times$, on ait $\phi(x)^n = x$.
  - En supposant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quelles sont les valeurs de n pour lesquelles il existe une section qui identifie $GL_n(\mathbb{R})$ au produit direct $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$?
  - Même question avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K}$ fini.
- (*) Soit G le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{K})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{K}^\times$ et $b \in \mathbb{K}$. On considère la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{K}^\times \longrightarrow 0$$

  Peut-on en trouver une section telle qu'éventuellement le produit soit direct ?

3 (*) Groupes de Sylow et simplicité

Exercice 1. *(*) Soit G un groupe d'ordre $11^2 13^2$. Montrez, en étudiant ses sous-groupes de Sylow, qu'un tel groupe est nécessairement abélien. En déduire la classification à isomorphisme près des groupes ayant cet ordre.*

Exercice 2. *(*) Groupes d'ordre pq, pq^2: soient p et q deux entiers premiers distincts.*

(a) *Déterminez à isomorphisme près tous les groupes d'ordre pq.*
Indication: On écrit $p < q$; montrez qu'il existe un unique q-Sylow, puis que G est un produit semi-direct.

(b) *Prouvez qu'un groupe d'ordre pq^2 n'est pas simple.*
Indication: Dans le cas où $p < q$, montrez qu'il existe un unique q-Sylow dans G. Dans le cas où $q < p$, montrez qu'il existe un unique p-Sylow dans G.

Exercice 3. *(*) Etude de la simplicité des groupes de cardinal $\leqslant 100$:*

(a) *Soit G un groupe ayant k p-Sylow ($k \geqslant 2$). Montrez que l'on a un morphisme $\phi : G \longrightarrow S_k$ non trivial.*

(b) *Soit S un 2-Sylow de G supposé cyclique. Montrez que G n'est pas simple.*
Indication: considérer l'opération de G sur lui-même par translation à gauche et en déduire un morphisme non trivial de G dans $\{-1, 1\}$. En déduire que si G est simple et $|G|$ est pair ($|G| \geqslant 2$) alors 4 divise $|G|$.

(c) *Soit G un groupe de cardinal n, non premier et $n \leqslant 100$ avec $n \neq 60$. Montrez que G n'est pas simple. Quand est-il pour $n = 60$?*

Exercice 4. *(*) Soient G un groupe d'ordre 30 et P_3 (resp. P_5) un 3-Sylow (resp. un 5-Sylow) de G.*

(a) *Montrez que soit P_3 soit P_5 est distingué dans G puis que si P_5 est distingué dans G alors P_3 aussi. En déduire que P_3 et P_5 sont tous deux distingués dans G.*
Indication: considérer G/P_5 et ses 3-Sylow puis conclure par un argument de comptage sur les éléments d'ordre 3 de G.

(b) *On pose $N = P_3.P_5$. Montrez que N est cyclique. On note alors a un générateur de N.*

(c) *Montrez qu'il existe un élément de G d'ordre 2, que l'on note b.*

(d) *Montrez qu'il existe un entier i congru à 1 modulo 15 tel que $bab^{-1} = a^i$.*

(e) *Montrez qu'à isomorphisme près les groupes d'ordre 30 sont*

$$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \quad D_{15} \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_5 \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_3$$

(on montrera en particulier que ces groupes ne sont pas isomorphes).

4 (*) Groupes résolubles et nilpotents: rappels et compléments

Exercice 1. *Si G est un groupe, H, K des sous-groupes, on note $[H, K]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $hkh^{-1}k^{-1}$ avec $(h, k) \in H \times K$; on remarquera que si K est distingué alors $[H, K] \subset K$ et si de plus H est aussi distingué alors $[H, K]$ l'est aussi.*

(a) *Montrez que le groupe dérivé $[G, G]$ est le plus petit sous-groupe distingué N de G tel que G/N est distingué.*

(b) *On pose $D_0(G) = G$ et pour $i > 0$, $D_i(G) = [D_{i-1}(G), D_{i-1}(G)]$; $(D_i(G))_i$ est appelé la suite dérivée de G. Le groupe G sera dit résoluble s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $D_n(G) = (e)$.*

- Montrez que G est résoluble si et seulement s'il existe une suite décroissante $(0) = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 = G$, avec G_i distingué dans G_{i-1} et G_{i-1}/G_i abélien.

- Montrez que ,$\mathcal{S}_4$ et D_n sont résolubles.

- Montrez que dans un groupe résoluble G, un sous-groupe non trivial H de G distingué et minimal pour cette propriété est nécessairement abélien. Dans le cas où H est fini, soit p premier divisant $|H|$; montrez que $H \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

(c) *On pose $C_0(G) = G$ et pour $i > 0$, $C_i(G) = [G, C_{i-1}(G)]$. La suite $(C_i(G)_i$ est appelée la suite centrale descendante de G. Le groupe G sera dit nilpotent s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $C_n(G) = (e)$.*

- Montrez que $C_i(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G; on rappelle qu'un sous-groupe H de G est dit caractéristique si pour tout $\phi \in \operatorname{Aut} H$, on a $\phi(H) = H$.

- Montrez ensuite que $C_{i+1}(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué N de G contenu dans $C_i(G)$ tel que $C_i(G)/N$ soit contenu dans le centre $Z(G/N)$ de G/N.

- Montrez que tout p-groupe est nilpotent.

- A quelle condition D_n est-il nilpotent ?

(d) (i) *Soit G un groupe nilpotent et H un sous-groupe propre de G; montrez que $H \not\subset N_G(H)$.*

(ii) *Soit G fini et P un p-Sylow de G; montrez que pour tout sous-groupe H de G contenant $N_G(P)$, on a $H = N_G(H)$.*

(iii) *Soit G fini; montrez que les 3 conditions suivantes sont équivalentes*

(1) G est nilpotent;

(2) pour tout sous-groupe propre H de G, on a $H \not\subset N_G(H)$;

(3) G est produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

5 Groupes orhtogonaux euclidiens

Soit donc q une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ et soit $O(q)$ le groupe orthogonal associé.

Exercice 1. *Donnez le centre de $O(q)$ (resp. $O^+(q)$) et montrez que $O(q)$ est un produit semi-direct de $O^+(q)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; a quelle condition ce produit semi-direct peut-il être pris direct ?*

Exercice 2. *Soit $u \in O(q)$ et $F_u = \{x \in E \ / \ u(x) = x\}$ et on note $p_u = n - \dim F_u$. Montrez par récurrence sur p_u, que u est le produit d'au plus p_u réflexions. Montrez ensuite que u est le produit d'au moins p_u réflexions.*

Exercice 3. *Montrez que pour $n \geqslant 3$, tout élément de $O^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.*

Exercice 4. *Soient u_1 et u_2 deux symétries orthogonales de même nature (i.e. tels que $\dim \operatorname{Ker}(u_1 - Id) = \dim \operatorname{Ker}(u_2 - Id)$). Montrez que u_1 et u_2 sont conjuguées par $O^+(q)$. En déduire alors que $D(O(q)) = D(O^+(q)) = O^+(q)$.*

Exercice 5. *Montrez que pour tout $u \in O(q)$, il existe une décomposition orthogonale*

$$E = \operatorname{Ker}(u - Id) \oplus \operatorname{Ker}(u + Id) \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_r$$

où les P_i sont des plans stables par u, tels que la restriction de u y soit une rotation.

Exercice 6. *(*) - On veut prouver la simplicité de* $O^+(3,\mathbb{R})$*. Soit donc* N *un sous-groupe distingué non réduit à l'identité; expliquez pourquoi il suffit de montrer que* N *contient un renversement.*

- Soit alors $u \in N$*, une rotation d'axe* D *et soit* P *le plan orthogonal à* D *à l'origine de sorte que la restriction de* u *à* P *est une rotation d'angle* θ *que l'on suppose* $0 < \theta < \pi$*. Soient alors* x *et* $y = u(x)$ *des points de la sphère unité de* E*; on note* d *la distance entre* x *et* y*. Montrez que pour tout* $0 \leqslant d' \leqslant d$*, il existe* x_1, x_2 *des points de la sphère unité à distance* d' *l'un de l'autre et tels que* $x_2 = u(x_1)$*.*

- Déduire de ce qui précède qu'étant donnés y_1, y_2 *des points de la sphère unité distant de* d' *avec* $0 \leqslant d' \leqslant d$*, il existe* $u' \in N$ *tels que* $u'(y_1) = y_2$*. En considérant la rotation d'axe* z *et d'angle* π/m *pour* m *assez grand, construire un retournement de* N *et conclure.*

Exercice 7. *(*) Montrez en se ramenant au cas de la dimension 3 et en considérant certains commutateurs bien choisis, que pour* $n \geqslant 5$*,* $PO(n,\mathbb{R})^+ := O(n,\mathbb{R})^+/Z(O(n,\mathbb{R})^+)$ *est simple.*

6 (*) Le corps des quaternions

Exercice 1. *(*) On note* H *le corps des quaternions et soit* G *ceux de norme 1:* $G = \{a + bi + cj + dk \ / \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$*. On considère alors l'action de* G *sur* H *par automorphismes intérieurs. En restreignant cette action aux quaternions purs, montrez que l'on obtient alors un isomorphisme* $G/\{\pm 1\} \simeq O(3,\mathbb{R})^+$*. La suite exacte associée est-elle scindée ?*

Exercice 2. *(*) On considère l'action de* $G \times G$ *sur* H *définie par* $(q_1, q_2).q := q_1 q \bar{q}_2$*. Montrez que l'on définit ainsi un isomorphisme* $G \times G/\{(1,1),(-1,-1)\} \simeq O(4,\mathbb{R})^+$ *et en déduire que* $PO(4,\mathbb{R})^+ \simeq O(3,\mathbb{R})^+ \times O(3,\mathbb{R})^+$*.*