Les exercices étoilés (*) s'adressent aux seuls étudiants inscrits à l'unité MO12

Feuille d'exercices 4

Exercice 1. *Soient G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'une représentation (ρ, V) de G sur V, est un morphisme de groupe $\rho : G \longrightarrow GL(V)$; pour tout $g \in G$, on notera ρ_g son image dans $GL(V)$. Un sous espace vectoriel W de V est dit stable par ρ s'il l'est par tous les ρ_g pour $g \in G$; dans ce cas ρ induit une action de G sur W appelée la restriction de ρ à W. On dira que ρ est irréductible si les seuls sous-espaces stables par ρ sont $\{0\}$ et V.*

- *En remplacant le corps $\mathbb{C}$ par successivement $\mathbb{R}$ et κ un corps de caractéristique p impair ne divisant pas le cardinal de G, quels sont les résultats du cours (existence d'un supplémentaire, complète réductivité, lemme de Schur...) qui subsistent ?*
  Indication Essayer avec $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $G = \mathbb{Z}$.

- ***Premiers exemples**: on appelle degré de (ρ, V), la dimension de V en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel; décrivez les représentations de degré 1. On suppose que G opère sur un ensemble fini X et soit V un espace vectoriel ayant une base $(e_x)_{x\in X}$ indexée par les éléments de X. Pour $g \in G$, on considère l'application linéaire ρ_g définie par $\rho_g(e_x) = e_{g.x}$. Montrez que l'application $\rho : g \in G \mapsto \rho_g \in GL(V)$ définie une représentation de G que l'on appelle la représentation de permutation associée à G. Dans le cas où $X = G$, la représentation obtenue est nommée la représentation régulière. On note ξ le caractère correspondant.*

  (i) Montrez que $\xi(g)$ est le nombre d'éléments de X fixés par g.

  (ii) Montrez que le nombre c d'orbites est égal au nombre de fois que ρ contient la représentation unité, i.e. $(\xi|1) = c$. En particulier montrez que si G est transitif (i.e. $c = 1$), on peut décomposer ρ en $1 \oplus \sigma$, où σ ne contient pas la représentation unité; en notant ψ le caractère de σ, on a alors $\xi = 1 + \psi$ avec $(\psi|1) = 0$.

  (iii) On fait opérer G sur le produit $X \times X$ via $g.(x, y) = (g.x, g.y)$. Montrez que le caractère de la représentation de permutation correspondante est égal à ξ^2.
  On suppose que G agit transitivement sur X et que X a au moins deux éléments . On dit que G est doublement transitif si $\forall x, y, x', y' \in X$ avec $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $x' = g.x$ et $y' = g.y$. Démontrez l'équivalence des propriétés suivantes:

  (1) G est doublement transitif;

  (2) L'action de G sur $X \times X$ a deux orbites, la diagonale et son complémentaire;

  (3) $(\xi^2|1) = 2$;

  (4) la représentation ψ est irréductible.

  (iv) On considère désormais la représentation régulière, i.e. $X = G$.

  (1) Donnez le caractère r_G de la représentation régulière.

  (2) Montrez que chaque représentation irréductible (ρ_i, W_i) de G est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égal à son degré n_i et en déduire les relations $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|$ et $\sum_{i=1}^{h} n_i\xi_i(g) = 0$ pour $g \neq 1$ dans G, où les ξ_i sont les caractères irréductibles de G.

Exercice 2. *Donnez le nombre h de représentations irréductibles à isomorphismes près, les degré n_i, la table des caractères irréductibles pour les groupes suivant (dans la mesure du possible on explicitera les représentations irréductibles obtenues):*

(i) le groupe cyclique C_n d'ordre n;

(ii) le groupe diédral D_n;

(iii) du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$;

(iv) du groupe alterné $\mathcal{A}_4$;

(v) du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$;

(vi) du groupe du cube.

Exercice 3. *Etant donnés deux espaces vectoriels V_1, V_2, on appelle produit tensoriel de V_1 et V_2, un espace vectoriel W muni d'une application $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \mapsto x_1 \otimes x_2 \in W$ telle que $x_1 \otimes x_2$ dépend linéairement de chacune des variables x_1, x_2 et telle que si $(e_i^1)_i$ (resp. $(e_j^2)_j$) est une base de V_1 (resp. V_2), la famille $(e_i^1 \otimes e_j^2)_{i,j}$ est une base de W. Il est aisé de voir qu'un tel espace W existe et est unique à isomorphisme près; on le note $V_1 \otimes V_2$ et $\dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \dim V_2$.*

(a) Etant donnés $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ des représentations de G, montrez que la formule $(\rho_1 \otimes \rho_2)_g(x_1 \otimes x_2) = \rho_{1,g}(x_1) \otimes \rho_{2,g}(x_2)$ définit une représentation $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$, appelée le produit tensoriel des représentations ρ_1 et ρ_2. Donnez le caractère de la représentation $\rho_1 \otimes \rho_2$.

(b) On considère la représentation $(\rho \otimes \rho, V \otimes V)$. Montrez l'existence d'un automorphisme θ de $V \otimes V$ tel que $\theta(x \otimes y) = y \otimes x$ pour tout $x, y \in V$. En déduire que $V \otimes V$ se décompose en une somme directe $\mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$ où $\mathrm{Sym}^2(V)$ (resp. $\mathrm{Alt}^2(V)$) est l'ensemble des éléments $z \in V \otimes V$ tels que $\theta(z) = z$ (resp. $\theta(z) = -z$). Donnez une base de $\mathrm{Sym}^2(V)$ et de $\mathrm{Alt}^2(V)$ et précisez leur dimension respective.
Quel sont les caractères de ρ restreint à $\mathrm{Sym}^2(V)$ et $\mathrm{Alt}^2(V)$?

(c) Etant donnés deux groupes finis G_1, G_2 et $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ des représentations respectives de G_1 et G_2, $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ définit via la formule

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)_{(g_1,g_2)}(v_1 \otimes v_2) = \rho_{1,g_1}(v_1) \otimes \rho_{2,g_2}(v_2)$$

une représentation de $G_1 \times G_2$. Explicitez le lien avec (a). Montrez ensuite que si ρ_1 et ρ_2 sont irréductibles, il en est alors de même pour $\rho_1 \otimes \rho_2$. Réciproquement montrez que si (ρ, V) est une représentation irréductible de $G_1 \times G_2$, alors il existe des représentations $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ de respectivement G_1, G_2 telles que $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$.

Exercice 4. *On considère la représentation de permutation naturelle de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$. Donnez son caractère et montrez qu'elle contient une fois la représentation triviale; donnez le sous-espace de dimension 1 correspondant. Montrez ensuite que le supplémentaire stable de 1 dans $\mathbb{C}^n$ est une représentation irréductible de dimension $n-1$ de $\mathcal{S}_n$ que l'on appelle la représentation standard de $\mathcal{S}_n$; donnez son caractère. Que peut-on dire de la restriction à $\mathcal{A}_n$ de la représentation standard ?*
Remarque: Dans le cas $n = 5$, on donnera une preuve de l'irréductibilité de la représentation standard via son caractère.

Exercice 5. *(*) (i) Donnez les classes de conjugaison dans* $G := \mathcal{S}_5$.

(ii) Donnez ensuite les représentations de dimension 1 *de* G *puis en utilisant la représentation standard* V *donnez les dimensions des représentations irréductibles de* G.

(iii) Montrez que $Alt^2 V$ *est une représentation irréductible (resp. est la somme directe de deux représentations irréductibles) et donnez la table de caractères de* G.

(iv) Soit H *le sous-groupe de* $\mathcal{S}_5$ *engendré par la permutation* $(123)(45)$*;* $H \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*. Pour* ξ *une représentation irréductible non triviale de* H*, décrivez* $\mathrm{Ind}_H^{\mathcal{S}_5} \xi$.

Exercice 6. *(*) Soit* $q = p^r$ *pour* p *premier impair et on note* $G := GL_2(\mathbb{F}_q)$*. On considère le sous-groupe de Borel standard* $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\} \subset G$ *et son sous-groupe unipotent* $N = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ *ainsi que son tore maximal déployé* $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\} \simeq (\mathbb{F}_q^\times)^2$*. On considère aussi* $\mathbb{F}_{q^2}$ *"le" sur-corps de* $\mathbb{F}_q$ *de degré* 2 *de sorte que la multiplication d'un élément* $z \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ *dans* $\mathbb{F}_{q^2}$ *induit un morphisme* $\mathbb{F}_q$ *linéaire. Une base de* $\mathbb{F}_{q^2}$ *en tant que* $\mathbb{F}_q$*-espace vectoriel étant fixée, on définit donc ainsi une injection*

$$K := \mathbb{F}_{q^2}^\times \simeq \mathbb{Z}/(q^2-1)\mathbb{Z} \hookrightarrow G$$

Dans la suite on choisit ϵ *un générateur de* $\mathbb{F}_q^\times$ *et soit* α *une racine carrée de* ϵ *dans* $\mathbb{F}_{q^2}$*:* $\alpha^2 = \epsilon$.

(i) montrez que $(1, \alpha)$ *est une base de* $\mathbb{F}_{q^2}$ *telle que l'injection précédente s'écrit*

$$x + y\alpha \mapsto \begin{pmatrix} x & \alpha y \\ y & x \end{pmatrix}$$

(ii) Montrez que les classes de conjugaison dans G *sont:*

représentant	*cardinal de la classe*	*nombre de classe*
$a_x = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	1	$q-1$
$b_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	q^2-1	$q-1$
$c_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \ x \neq y$	q^2+q	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$
$d_{x,y} = \begin{pmatrix} x & \alpha y \\ y & x \end{pmatrix}, \ y \neq 0$	q^2-q	$\frac{q(q-1)}{2}$

(iii) Donnez les représentations de dimension 1 *de* G.

(iv) Donnez les représentations de dimension 1 *de* B *et décrivez en les induites à* G.

(v) Pour un caractère de K*, décrivez en les induites à* G.

(vi) En considérant des produits tensoriels bien sentis, construisez la table de caractère de G.