Université Paris 13 L3 Algèbre et géométries

DM2

Pour répondre aux questions de cours suivantes, aidez vous du cours en ligne et des ressources sur le web (faites une meilleure rédaction que sur le poly).

Exercice 1. *Soit h une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ possédant un unique point fixe (resp. 2 points fixes). Montrer qu'à conjugaison près f est une translation $t \mapsto t + a$ (resp. une homothétie $t \mapsto \lambda t$).*

Exercice 2. *Soit h une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Montrer que les points suivants sont équivalents.*
(i) h est une involution.
(ii) $h = \mathbb{P}(u)$ avec $u \in GL_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.
(iii) Il existe un point $m \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tel que $h(m) \neq m$ et $h^2(m) = m$.

Exercice 3. *Montrer qu'une homographie involutive est uniquement déterminée par la donnée de deux couples de points non fixes $(p, h(p))$ et $(q, h(q))$.*

Exercice 4. *Soit h une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et trois points distincts a, b, c d'images respectives a', b', c'. On suppose $a \neq a'$. Montrer que h est involutive si et seulement si $[a, b, c, a'] = [a', b', c', a]$.*

Exercice 5. *Soit h une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ possédant 2 points fixes $a \neq b$.*
- *Montrer que si h est involution alors pour tout m distinct de a, b, on a $[a, b, m, h(m)] = -1$.*
- *Montrer que s'il existe m distinct de a, b tel que $[a, b, m, h(m)] = -1$ alors h est un involution.*

Exercice 6. *Soit $h_{f,\mathcal{C}}$ l'involution de Frégier de $\mathcal{C}$ de centre f. On note i, j les points de contact de $\mathcal{C}$ avec ses tangentes passant par f. On rappelle que $h_{f,\mathcal{C}}(f)$ est le centre O du cercle $\mathcal{C}$. Montrer que $h_{f,\mathcal{C}}(\infty)$ est le deuxième point d'intersection des cercles de diamètre $[Oi]$ et $[Oj]$.*

Exercice 7. *Enoncer le théorème corrélatif du théorème de Pappus.*

Exercice 8. *Prouver le lemme des trois perspectives (cf. le cours) dont on rappelle ci-après l'énoncé. Soient trois droites concourantes A, B, C en un point o. Etant donnés trois points u, v, w n'appartenant pas à $A \cup B \cup C$, on note $p_u : B \to C$ (resp. $p_v : C \to A$, resp. $p_w : A \to B$) la perspective de centre u (resp. v, resp. w). On suppose que $p_w \circ p_v \circ p_u : B \to B$ est l'identité. Montrer alors que les points u, v, w sont alignés.*

Exercice 9. *Prouver la réciproque du théorème de Desargues, i.e. si deux triangles a, b, c et a', b', c' sont tels que les points $p = (b'c) \cap (bc')$, $q = (c'a) \cap (ca')$ et $r = (ab') \cap (a'b)$ sont alignés alors les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes.*