# Cours 25 mars 2020

## Résumé

**Géométrie** : espace

⚠ groupe des transformations

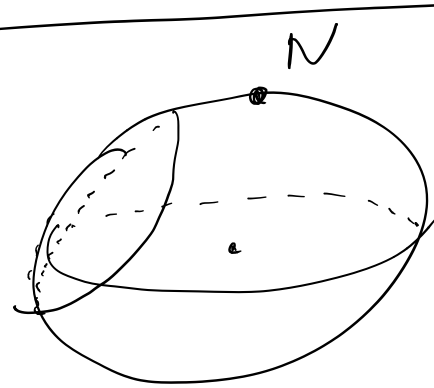
&

**invariants** : notions géo invariantes par toutes les transformations

$\boxed{\text{dim } 2}$

| | |
|---|---|
| Géométrie affine | Géométrie euclidienne |
| Géométrie inversive | Géométrie sphérique |

# Géométrie inversive




- points
- "droites"

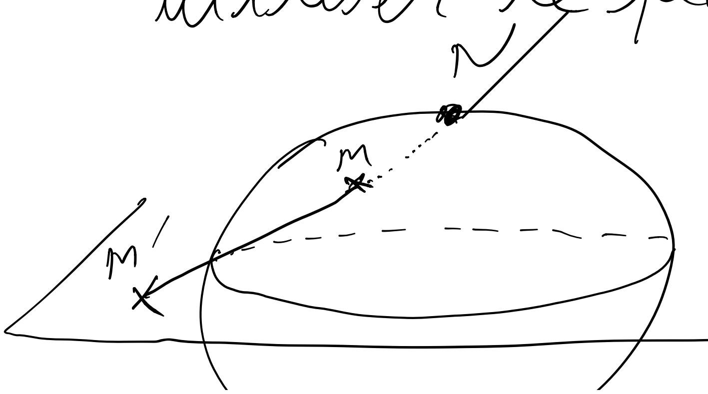
$\text{"droites"} = \text{cercle} = S^2 \cap \text{Plan}$

## Groupe des transformations

abstraitement : on demande à ce que {les cercles} soit conservé

<u>Idée</u> : utiliser la projection stéréographique $=: P$ pour utiliser le plan

$p : M \longmapsto M'$



⚠ $N \longmapsto \infty$

**Fait :** <u>cercle</u> dessiné sur $S^2$

"$\mathcal{E}$" $\Big\downarrow \boxed{p}$

- cercle $\iff N \notin \text{cercle} = \mathcal{E}$
- droite $\iff N \in \mathcal{E}$

<u>Rem</u> : en géométrie euclidienne des énoncés s'écrivent

..... cercle/droite .....

$\updownarrow$

provient d'un énoncé sur $S^2$ vu dans le plan après l'application de $p$

<u>ex</u> : critère de <u>cocyclicité</u>

Groupe circulaire = $G$

* $f \in G$ : $\boxed{N \overset{f}{\longmapsto} N}$

$\rightsquigarrow$ ~~fen~~ utilisant la proj stéréographique

$f$ devient une similitude du plan

- translations
- rotations
- symétries "glissées"
- homothéties

* si $f : N \longmapsto N' \neq N$

ex : les inversions

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$$

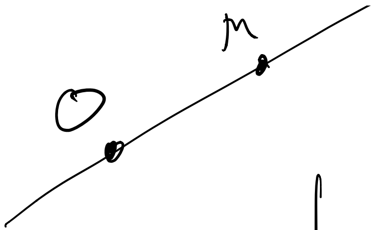
$$z \longmapsto \frac{\mu}{(\bar{z} - \bar{\alpha})}$$

de pôle $\alpha \in \mathbb{C}$

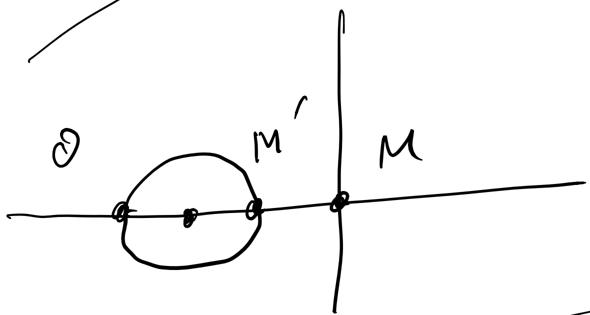
de rapport $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$

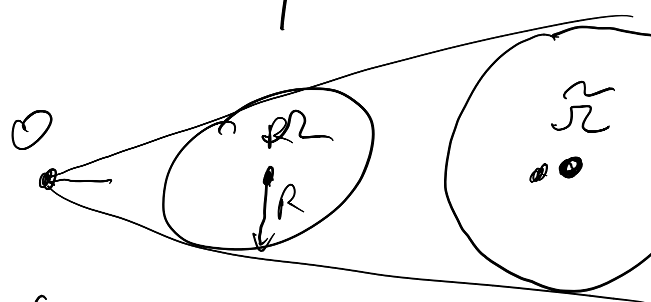
* $i_{O,\mu}$ → involution

$M'$




$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \mu$




$\tilde{\Omega} \neq \Omega' = i_{O,\mu}(\Omega)$

l'image de $\mathcal{C}(\Omega, R)$ est le cercle homothétique obtenu en appliquant l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\dfrac{\mu}{\delta}$

$\delta = \mathcal{P}(O, \mathcal{C}(\Omega, R))$

$\delta = O\Omega^2 - R^2$

**Fait :** $\boxed{\text{cf poly PG7}}$

<u>homographie</u>

$z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

$z \neq -\dfrac{d}{c}$

$\infty \longmapsto a/c$

$-d/c \mapsto \infty$

antihomographie $z \mapsto \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

$\boxed{\text{Thm. } \underline{\text{III}.2.4}}$ $G = \langle \text{similitudes, les inversions} \rangle$

$\Psi$

$g = \begin{cases} s & \text{similitude} \\ s \circ i & \begin{cases} s = \text{similitude} \\ i = \text{inversion} \end{cases} \end{cases}$

---

Exercice

$$PGL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{iso de groupes}} \{\text{homographies}\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

ex: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \longmapsto Id$

$$PGL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C}) / \{a\, Id \,;\, a \in \mathbb{C}\}$$

où $PGL_2(\mathbb{C})$ : multiplication des matrices {homographie} = composition

Forum 13h30

Zoom $\boxed{14h20}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto h_1$$

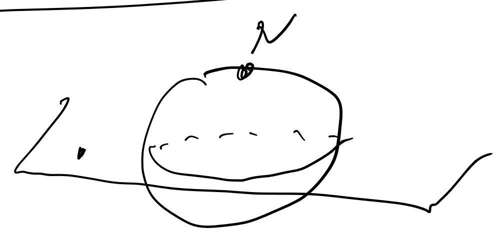
$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \longmapsto h_2 \quad \rightsquigarrow \quad h_1 \circ h_2$$

$$=?$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (\quad) \longmapsto h \overset{?}{=} h_1 \circ h_2$$

---

$\boxed{\text{p68 du poly}}$





Créer des invariants

Points : 1 points $\rightsquigarrow$ 2 paramètres réels

$\Updownarrow$

$z \in \mathbb{R}^2$

taille de G $\geq g \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{C})$

$\leadsto$ $g$ est donné par $4-1=3$ paramètres complexes

$\leadsto$ élément de $\underline{\mathbb{R}^6}$

<u>Prop III-3.1</u>

3 points de $S^2$ = $a, b, c$ (2 à 2 distincts)

3 ——— de $S^2$ = $a', b', c'$ (2 à 2 distincts)

$\} \exists g \in G$

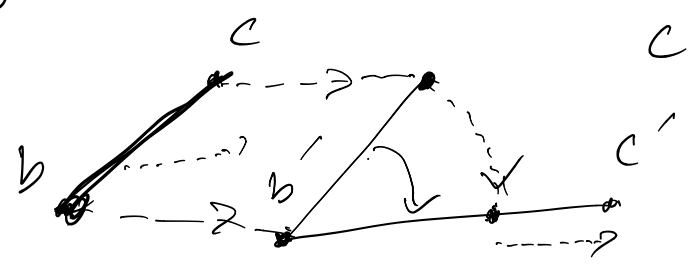
$$g : \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}$$

<u>translation</u>: $a' \longmapsto a$

$$\begin{vmatrix} a=\infty \\ b \\ c \end{vmatrix} \longleftrightarrow \begin{vmatrix} a=\infty \\ b' \\ c' \end{vmatrix}$$

$g \in G$ tq $g(a)=a \iff g$ similitude

$\exists$ similitude de $\mathbb{C}$ $\quad b \longmapsto b'$, $\quad c \longmapsto c'$



__

## 4 points

$$(a,b,c,d) \xrightarrow{\exists !\, g \text{ homographie}} ((\infty,0,1), ?)$$

**Notation** (3.2) $? = [a,b,c,d]$

l'invariant de Möbius (birapport en géométrie projective)

**Rem**: $\{(a,b,c,d)\} / G \longleftrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$
$\phantom{Rem: }\ \ \cap$
$\phantom{Rem: }(S^2)^4$

$\mapsto [a,b,c,d]$

$$(a,b,c,d) \overset{g}{\longmapsto} (\infty,0,1,[a,b,c,d])$$

rappel géométrie affine

$$\{(a,b,c) \in \text{droite affine}\} \longmapsto \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} \in \mathbb{R}$$

## Calcul de $[a,b,c,d]$ (Coro 3.4)

$$g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a \mapsto \infty \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{array} \right.$$

$$[a,b,c,d] = g(d)$$

$$g(z) = \frac{\lambda (z - \alpha')}{(z - \beta')} \qquad \left| \begin{array}{l} \beta' = a \\ \hline \alpha' = b \end{array} \right.$$

$$g(z) = \lambda \frac{(z-b)}{(z-a)} \qquad g(c) = \lambda \frac{(c-b)}{(c-a)} = 1$$

$$\boxed{\lambda = \frac{c-a}{c-b}}$$

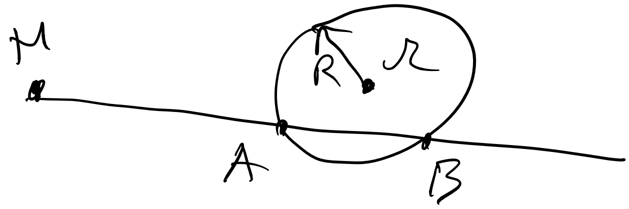
$$g(z) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

$$\boxed{[a,b,c,d] = g(d) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}}$$

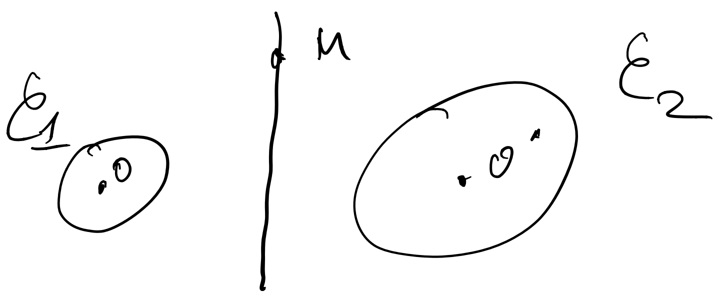
---

$\boxed{p\,69}$ <u>invariant associé à 2 cercles</u>

# Rappel sur l'axe radical de 2 cercles




$$\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \Omega M^2 - R^2$$




$\{M : \mathcal{P}(M,\mathcal{C}_1) = \mathcal{P}(M,\mathcal{C}_2)\}$ = droite appelée l'axe radicale de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$

<u>dem</u>: $OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$

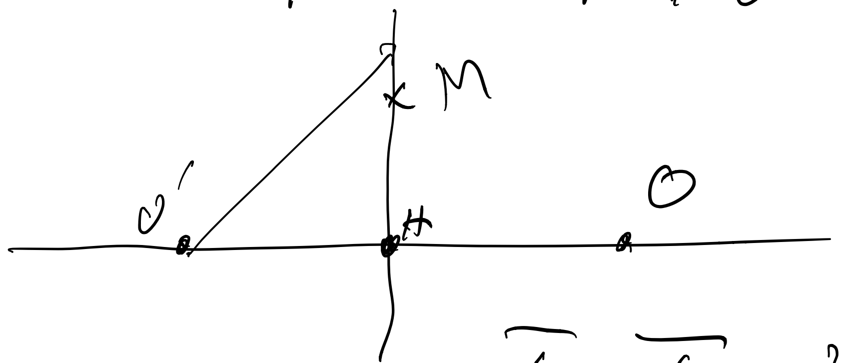
$$OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$$

$$\vec{OM}\cdot\vec{OM} = (\vec{OO'}+\vec{O'M})\cdot(\vec{OO'}+\vec{O'M})$$

$$= OO'^2 + 2\,\vec{OO'}\cdot\vec{O'M} + O'M^2$$

$$OM^2 - O'M^2 = OO'^2 + 2\,\vec{OO'}\cdot\vec{O'M} = R^2 - R'^2$$

$$\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'M} = R^2 - R'^2 + OO'^2$$




$$\overline{O'H}\cdot\overline{O'M} = R^2 - R'^2 - OO'^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O'O}\cdot\overrightarrow{HM} = 0}$$

---

Prop 3.5 $\quad \mathcal{E}(O,R) \quad \mathcal{E}'(O',R')$

$$c = \frac{R^2 + R'^2 - OO'^2}{2RR'} \longleftarrow \boxed{\in \mathbb{R}}$$

$P \notin \mathcal{E}\cup\mathcal{E}'$ $\quad i_{P,\rho}$ = inversion de centre $P$ de rapport $\rho$

$$i_{P,\rho} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_1(O_1, R_1)$$
$$\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}'_1(O'_1, R'_1)$$

$$c_1 = \frac{|R_1^2 + R_1'^2 - O_1O_1'^2|}{\phantom{x}} \leftarrow$$

$2 R_1 R'_1$

Alors $C = C_1$

**rem**: $f$ = similitude de rapport $\lambda$

$\mathcal{E}_1 (O_1, \lambda R_1)$ $\quad O_1 O'_1 = \lambda OO'$

$\mathcal{E}'_1 (O'_1, \lambda R'_1)$

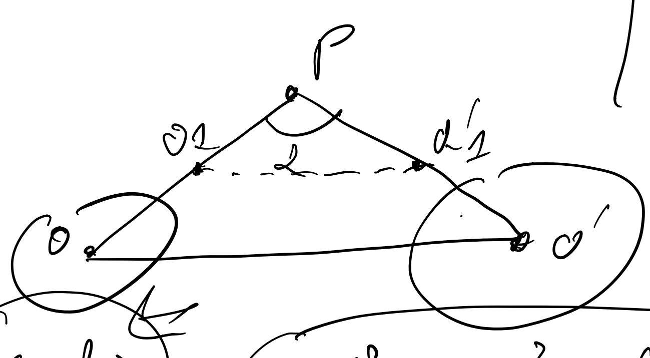
$C_1 = C$

**dem** $\quad \mathcal{E}_1 = h_{P, \frac{\mu}{s}} (\mathcal{E})$ $\quad s = PO^2 - R^2$

$\mathcal{E}'_1 = h_{P, \frac{\mu}{s'}} (\mathcal{E}')$ $\quad s' = PO'^2 - R'^2$

$R_1 = \frac{\mu}{s} R$

$R'_1 = \frac{\mu}{s'} R'$




Al Kashi: $OO'^2 = OP^2 + O'P^2 - 2\, OP \cdot O'P \cos \alpha$

$$O_1O_1'^2 = O_1P^2 + O_1'P^2 - 2O_1P.O_1'P\cos\alpha$$

même angle
car homothétie

$$O'O^2 = s + R^2 + s' + R'^2 - 2OP.O'P\cos\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{O'O^2 - R^2 - R'^2} = s + s' - 2OP.\,O'P\cos\alpha \\ &\underline{O_1'O_1^2 - R_1^2 - R_1'^2} = \sigma + \sigma' - 2PO_1 . PO_1'\cos\alpha \end{aligned}}$$

$\sigma$ = puissance de $P$ / $\mathcal{E}_1(O_1, R_1)$

$\sigma'$ = ——— / $\mathcal{E}_1'(O_1', R_1')$

$$\sigma = PO_1^2 - R_1^2 = \left(\frac{\mu}{s}\right)^2 (PO^2 - R^2)$$

$$= \boxed{\frac{\mu^2}{s}}$$

$$\sigma' = \frac{\mu^2}{s'}$$

$$\boxed{\sigma + \sigma' - 2PO_1 . PO_1' . \cos\alpha = \frac{\mu^2}{ss'}\left(s + s' - PO.PO'\cos\alpha\right)}$$

$$\sigma + \sigma' = \mu^2\left(\frac{1}{} + \frac{1}{}\right) - \mu^2(s + s')$$

$$PO_1 \cdot PO_1' = \frac{\mu}{s} PO \cdot \frac{\mu}{s'} PO'$$

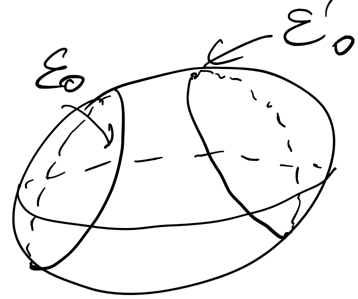
$$\frac{R^2 + R'^2 - OO'^2 = s + s' - 2PO \cdot PO' \cos\alpha}{R_1^2 + R_1'^2 - O_1O_1'^2 \qquad \frac{\mu^2}{ss'} (s + s' - 2PO \cdot PO' \cos\alpha)}$$

$$= \frac{ss'}{\mu^2} = \frac{RR'}{R_1 R_1'}$$

$$\boxed{\frac{R^2 + R'^2 - OO'^2}{RR'} = \frac{R_1^2 + R_1'^2 - O_1O_1'^2}{R_1 R_1'}}$$

$$\underbrace{\qquad}_{= C} \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{= C_1}$$

Synthèse (construction de l'invariant associé à 2 cercles de $S^2$)




$\leftarrow c(\varepsilon_0, \varepsilon_0')$

• $N \notin \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}'_0 \xrightarrow[\text{stéréo}]{\text{proj}}$ 2 cercles du plan

$c(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}'_0) = \dots\dots$

• $N \in \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}'_0$

$A \notin \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}'_0 \quad g \in G : A \longmapsto N$

$\xrightarrow{g} \quad g : \mathcal{E}_0 \longmapsto \mathcal{E}_1$

$\qquad \mathcal{E}'_0 \longmapsto \mathcal{E}'_1$

$N \notin \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}'_1$

$\downarrow$ proj stéréo

$c(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1) = c(p(\mathcal{E}_1), p(\mathcal{E}'_1))$

$g' = p \circ g$

Rem

homographie : $g = s \circ i$

$s$ = similitude

$i$ = inversion

alors $s$ et $i$ : conservent l'invariant $c(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}'_0)$