Cours 25 mars 2020

Résumé

Géométrie : espace

⚠ groupe des transformations

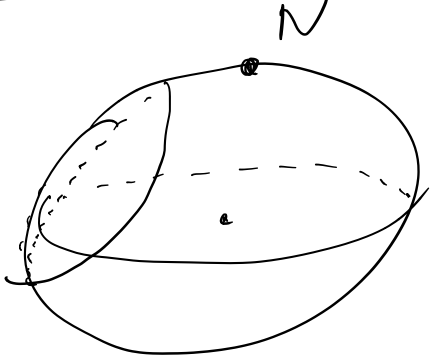
&

invariants : notions géo-
invariantes
par toutes les
transformations

$\boxed{\text{dim } 2}$

Géométrie affine	Géométrie euclidienne
Géométrie inversive	géométrie sphérique

Géométrie inversive



- points
- "droites"

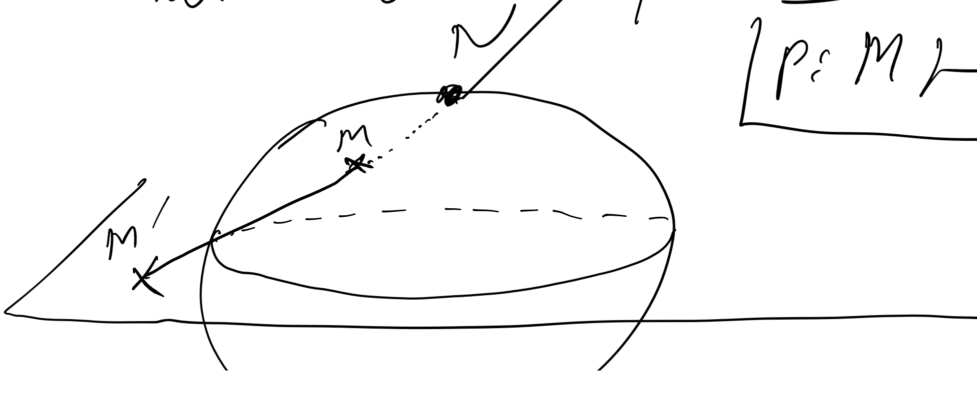
"cercle" = $S^2 \cap$ Plan

$\boxed{\text{Groupe des transformations}}$

[abstraitement] on demande à ce que {les cercles} soit conservé

Idée : utiliser la projection stéréographique pour utiliser le plan $\boxed{=: P}$

$\boxed{P : M \longmapsto M'}$



⚠ $N \longmapsto \infty$

__Fait :__ $\underbrace{\text{cercle}}_{\mathcal{E}}$ dessiné sur S^2

$\big\downarrow \boxed{p}$

- cercle $\iff N \notin \text{cercle} = \mathcal{E}$
- droite $\iff N \in \mathcal{E}$

__Rem :__ en géométrie euclidienne des énoncés s'écrivent

..... cercle/droite .....

$\updownarrow$

provient d'un énoncé sur S^2 vu dans le plan après l'application de p

__ex :__ critère de __cocyclicité__

Groupe circulaire = G

* $f \in G$: $\boxed{N \overset{f}{\longmapsto} N}$

⇝ ~~fen~~ utilisant
la proj stéréographique
f devient une similitude du plan

- translations
- rotations
- symétries "glissées"
- homothéties

* si $f : N \longmapsto N' \neq N$

ex : les inversions

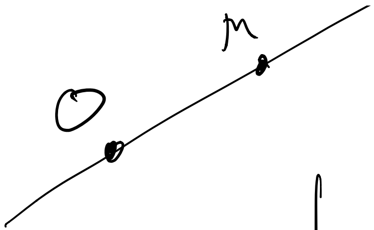
$\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$

$z \longmapsto \dfrac{\mu}{(z-\alpha)}$

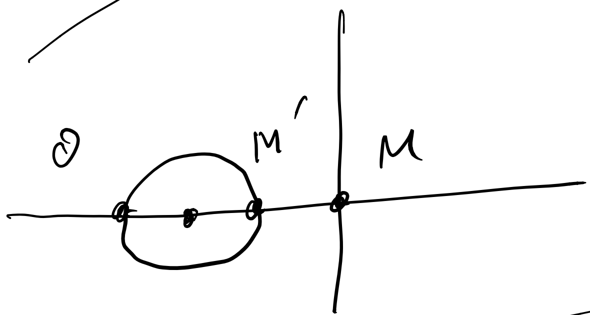
de pôle $\alpha \in \mathbb{C}$
de rapport $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$

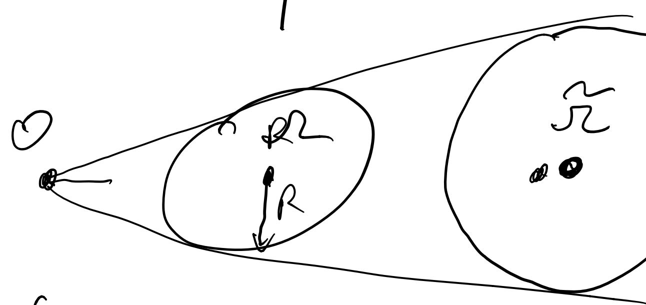
* $i_{O,\mu}$ → involution

M'



$\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = \mu$





$\tilde{\Omega} \neq \Omega' = i_{O,\mu}(\Omega)$

l'image de $\mathcal{C}(\Omega, R)$ est le cercle homothétique obtenu en appliquant l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{\mu}{p}$ $\quad p = \mathcal{P}(O, \mathcal{C}(\Omega, R))$

$p = O\Omega^2 - R^2$

Fait : $\boxed{\text{cf poly PG7}}$

Homographie
$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$
$z \neq -\dfrac{d}{c}$

$\infty \longmapsto a/c$

$-d/c \mapsto \infty$

<u>anti homographie</u> $z \mapsto \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

<u>Thm. III.2.4</u>

$G = \langle$ similitudes, les inversions $\rangle$

$\Downarrow$

$g = \begin{cases} s & \text{similitude} \\ s \circ i & \begin{cases} s = \text{similitude} \\ i = \text{inversion} \end{cases} \end{cases}$

<u>Exercice</u>

$$PGL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{iso de groupes}} \{\text{homographies}\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

ex: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \longmapsto Id$

$$PGL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C}) / \{a\,Id \,;\, a \in \mathbb{C}\}$$

où $PGL_2(\mathbb{C})$: multiplication des matrices {homographie} = composition

Forum 13h30

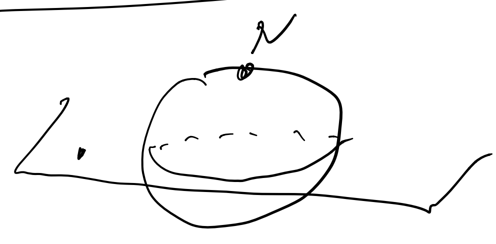
ZOOM $\boxed{14h20}$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \longmapsto h_1$$

$$\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix} \longmapsto h_2 \qquad \leadsto h_1 \circ h_2 \quad = ?$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix} = (\quad) \longmapsto h \overset{?}{=} h_1 \circ h_2$$

$\boxed{\text{p68 du poly}}$



Créer des invariants

Points : 1 points $\leadsto$ 2 paramètres réels

$\Updownarrow$

$z \in \mathbb{R}^2$

taille de $G \ni g \longleftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{C})$

$\rightsquigarrow$ g est donné par $4-1=3$ paramètres complexes

$\rightsquigarrow$ élément de $\underline{\mathbb{R}^6}$

Prop III-3.1

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ points de } S^2 = \overset{\text{2 à 2 distincts}}{a, b, c} \\ \phantom{3 \text{ points de } S^2 =} \ \mathrm{I},\ \mathrm{I},\ \mathrm{I}, \\ 3 \text{ —— de } S^2 = \underset{\text{2 à 2 distincts}}{a', b', c'} \end{array}\right\} \exists g \in G$$

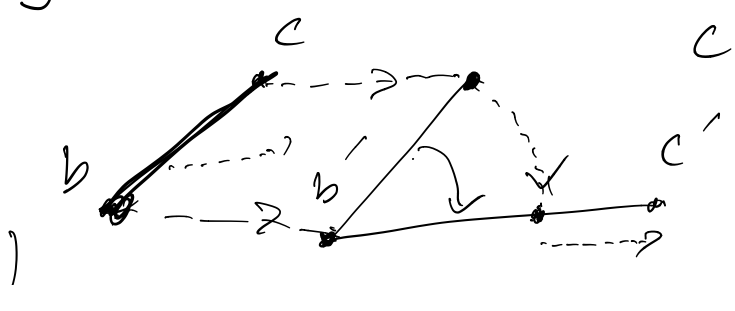
$$g : \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right. \longmapsto \left| \begin{array}{l} a' \\ b' \\ c' \end{array} \right.$$

translation : $a' \longmapsto a$

$$\left| \begin{array}{l} a = \infty \\ b \\ c \end{array} \right. \longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = \infty \\ b' \\ c' \end{array} \right.$$

$g \in G$ tq $g(a) = a \iff g$ similitude

$\exists$ similitude de $\mathbb{C}$ $\quad b \longmapsto b'$, $\ c \longmapsto c'$



4 points

$$(a,b,c,d) \xrightarrow{\exists !\, g \text{ homographie}} ((\infty,0,1),\ ?)$$

Notation (3.2) $? = [a,b,c,d]$

l'invariant de Möbius (birapport en géométrie projective)

Rem : $\{(a,b,c,d)\} / G \longleftrightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$
$\cap$
$(S^2)^4$

$[a,b,c,d]$

$$(a,b,c,d) \overset{g}{\longmapsto} (\infty,0,1,[a,b,c,d])$$

rappel géométrie affine

$$\{(a,b,c) \in \text{droite affine}\} \longmapsto \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} \in \mathbb{R}$$

Calcul de $[a,b,c,d]$ (Coro 3.4)

$$g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \longleftrightarrow \begin{cases} a \mapsto \infty \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{cases}$$

$$[a,b,c,d] = g(d)$$

$$g(z) = \frac{\lambda(z - \alpha')}{(z - \beta')} \qquad \begin{cases} \beta' = a \\ \alpha' = b \end{cases}$$

$$g(z) = \lambda \frac{(z-b)}{(z-a)} \qquad g(c) = \lambda \frac{(c-b)}{(c-a)} = 1$$

$$\boxed{\lambda = \frac{c-a}{c-b}}$$

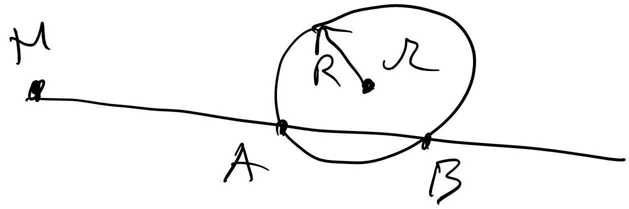
$$g(z) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

$$\boxed{[a,b,c,d] = g(d) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}}$$

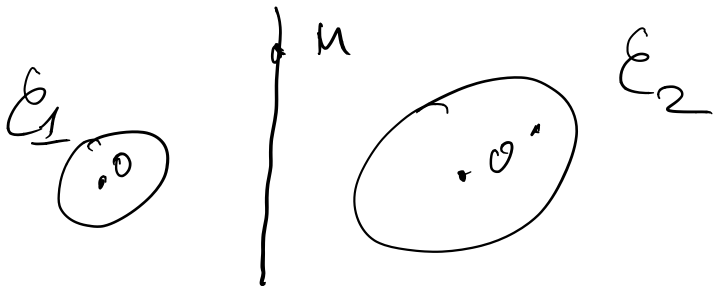
---

p69 invariant associé à 2 cercles

Rappel sur l'axe radical de 2 cercles



$$\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \Omega M^2 - R^2$$



$\{M : \mathcal{P}(M,\mathcal{E}_1) = \mathcal{P}(M,\mathcal{E}_2)\}$ = droite appelée l'axe radical de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$

<u>dem</u> : $OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$

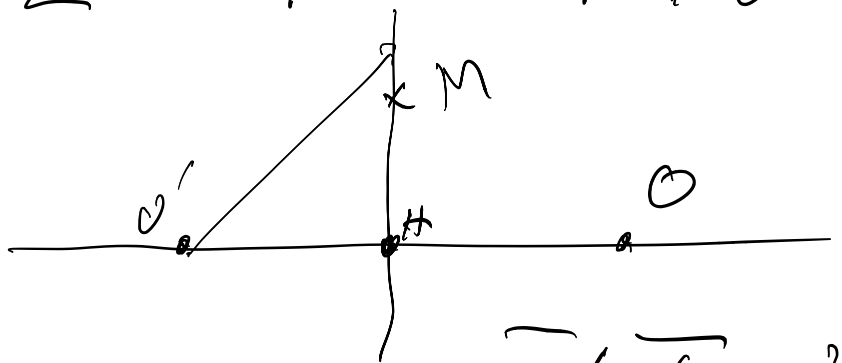
$$OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$$

$$\vec{OM}\cdot\vec{OM} = (\vec{OO'} + \vec{O'M})\cdot(\vec{OO'} + \vec{O'M})$$

$$= OO'^2 + 2\,\vec{OO'}\cdot\vec{O'M} + O'M^2$$

$$OM^2 - O'M^2 = OO'^2 + 2\,\vec{OO'}\cdot\vec{O'M} = R^2 - R'^2$$

$2\,\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{O'M} = R^2 - R'^2 + OO'^2$



$2\,\overline{OH} \cdot \overline{O'H} = R^2 - R'^2 - OO'^2$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{HM} = 0}$

Prop 3.5 $\mathcal{E}(O, R)$ $\mathcal{E}'(O', R')$

$C = \dfrac{R^2 + R'^2 - OO'^2}{2RR'} \longleftarrow \boxed{\in \mathbb{R}}$

$P \notin \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ $i_{P,p}$ = inversion de centre P de rapport p

$i_{P,\varepsilon} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_1(O_1, R_1)$

$\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}'_1(O'_1, R'_1)$

$C_1 = \dfrac{|R_1^2 + R_1'^2 - O_1O_1'^2|}{} \longleftarrow$

$2 R_1 R'_1$

Alors $C = C_1$

<u>rem</u>: f = similitude de rapport λ

$\mathcal{E}_1(O_1, \lambda R_1)$

$\mathcal{E}'_1(O'_1, \lambda R'_1)$

$O_1 O'_1 = \lambda OO'$

$C_1 = C$

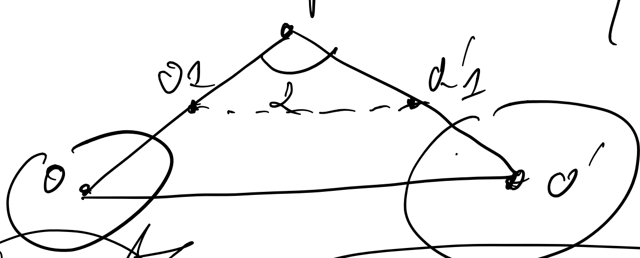
dem

$\mathcal{E}_1 = h_{P, \frac{\mu}{s}}(\mathcal{E})$ $\quad s = PO^2 - R^2$

$\mathcal{E}'_1 = h_{P, \frac{\mu}{s'}}(\mathcal{E}')$ $\quad s' = PO'^2 - R'^2$

$R_1 = \frac{\mu}{s} R$

$R'_1 = \frac{\mu}{s'} R'$



Al Kashi: $OO'^2 = OP^2 + O'P^2 - 2\,OP \cdot O'P \cos\alpha$

$$O_1O_1'^2 = O_1P^2 + O_1'P^2 - 2O_1P.O_1'P\cos\alpha$$

$\hat{m}$ angle car homothétie

$$O'O^2 = s + R^2 + s' + R'^2 - 2OP.O'P\cos\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{O'O^2 - R^2 - R'^2} = s + s' - 2OP.\,O'P\cos\alpha \\ &\underline{O_1'O_1^2 - R_1^2 - R_1'^2} = \sigma + \sigma' - 2PO_1 . PO_1'\cos\alpha \end{aligned}}$$

σ = puissance de P / $\mathcal{E}_1(O_1, R_1)$

σ' = ——— / $\mathcal{E}_1'(O_1', R_1')$

$$\sigma = PO_1^2 - R_1^2 = \left(\frac{\mu}{s}\right)^2 (PO^2 - R^2) = \boxed{\frac{\mu^2}{s}}$$

$$\sigma' = \frac{\mu^2}{s'}$$

$$\boxed{\sigma + \sigma' - 2PO_1 . PO_1' . \cos\alpha = \frac{\mu^2}{ss'}\left(s + s' - PO.PO'\cos\alpha\right)}$$

$$\sigma + \sigma' = \mu^2\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}\right) = \frac{\mu^2}{ss'}(s + s')$$

$\frac{\;}{s} \; \frac{\;}{s'} = \frac{1}{ss'}$

$$PO_1 \cdot PO_1' = \frac{\mu}{s} PO \cdot \frac{\mu}{s'} PO'$$

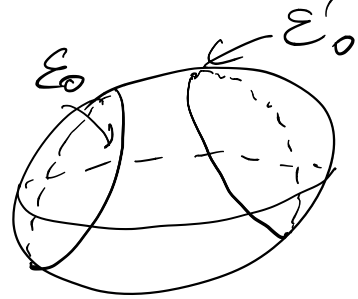
$$R^2 + R'^2 - OO'^2 = s + s' - 2PO\cdot PO'\cos\alpha$$

$$R_1^2 + R_1'^2 - O_1O_1'^2 \quad \frac{\mu^2}{ss'}\left(s + s' - 2PO\cdot PO'\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{ss'}{\mu^2} = \frac{RR'}{R_1R_1'}$$

$$\boxed{\frac{R^2 + R'^2 - OO'^2}{\underbrace{RR'}_{C}} = \frac{R_1^2 + R_1'^2 - O_1O_1'^2}{\underbrace{R_1R_1'}_{C_1}}}$$

Synthèse (construction de l'invariant associé à 2 cercles de S^2)



$\leftarrow c(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0')$

- $N \notin \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}'_0 \xrightarrow[\text{stéréo}]{\text{proj}}$ 2 cercles du plan

$c(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}'_0) = \dots\dots$

- $N \in \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}'_0$

$A \notin \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}'_0$ $\quad g \in G : A \longmapsto N$

$g : \mathcal{E}_0 \longmapsto \mathcal{E}_1$

$\xrightarrow{g}$ $\mathcal{E}'_0 \longmapsto \mathcal{E}'_1$

$N \notin \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}'_1$

$\downarrow$ proj stéréo

$c(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1) = c(f(\mathcal{E}_1), f(\mathcal{E}'_1))$

$g' = f \circ g$

Rem

homographie : $g = s \circ i$

s = similitude

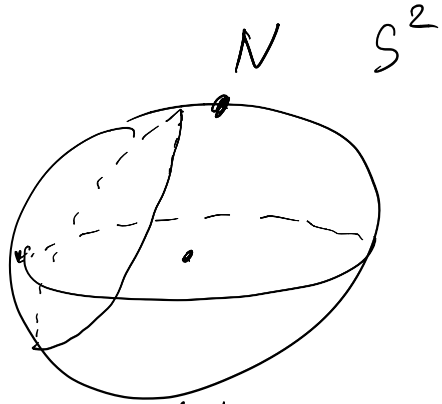
i = inversion

alors s et i : conservent l'invariant $c(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}'_0)$

---

cours vendredi 27/03

géométrie inversive



Groupe circulaire

homographies + anti-homographies

$\parallel$

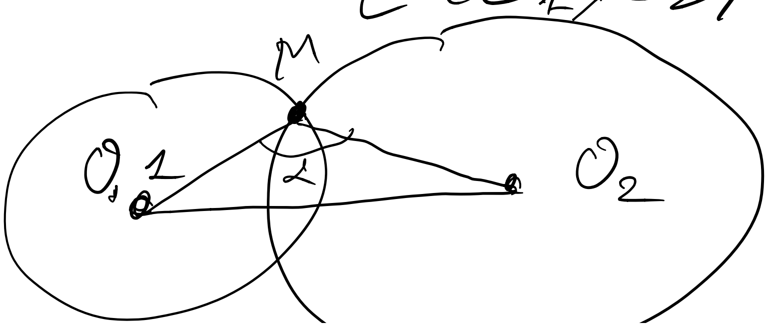
$\langle$ similitudes , inversion $\rangle$
de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\wr$

projection stéréographique

$\leadsto$ invariants : * points $[a,b,c,d]$
bi-rapport

* cercles
$\angle(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$



Al Kashi : $O_1 O_2 M$

$$O_1O_2^2 = O_1M^2 + O_2M^2 - 2\cos\alpha \, O_1M . O_2M$$

On sait que les homographies conservent (confir?) les angles non-orientés

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - O_1O_2^2}{2 R_1 R_2}}$$

$$c(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{R_1^2 + R_2^2 - O_1O_2^2}{2 R_1 R_2}$$

invariant par le groupe circulaire

(i.e. un invariant de la géométrie)

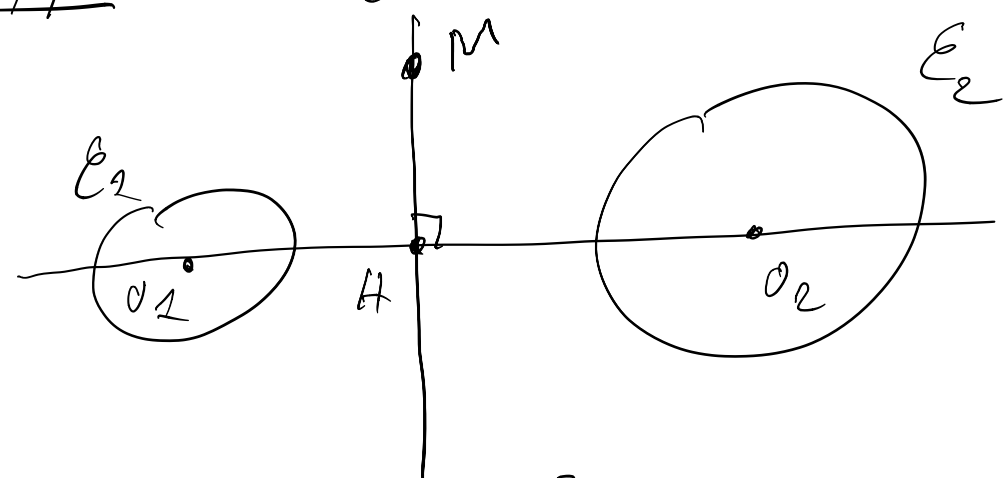
Poly Prop 3.7

Coro 3.8

But : $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ non sécants

alors $\exists$ une inversion qui transform $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ en deux cercles de même centre

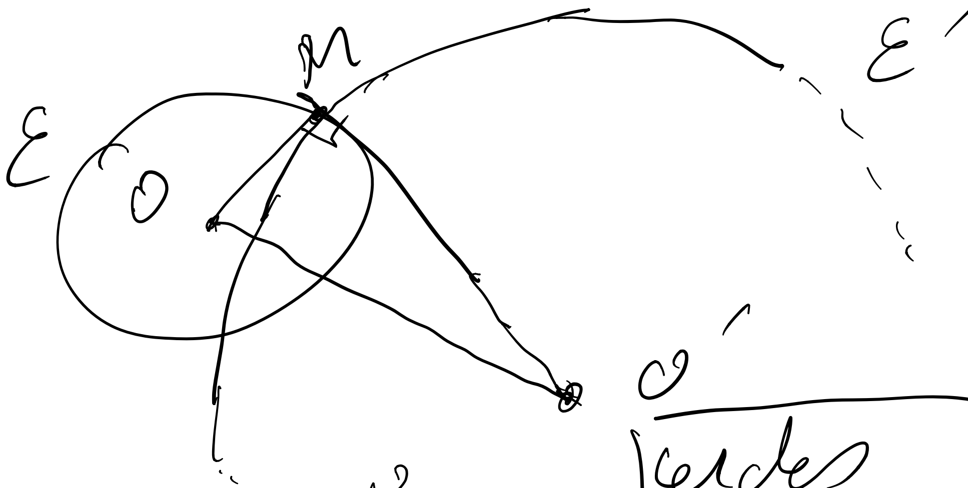
Rappel l'axe radical de 2 cercles



? $2\overline{O_1H} \cdot O_1O_2 = R_1^2 - R_2^2 - O_1O_2^2$?

$$\mathcal{P}(M, \mathcal{E}_1) = \mathcal{P}(M, \mathcal{E}_2)$$

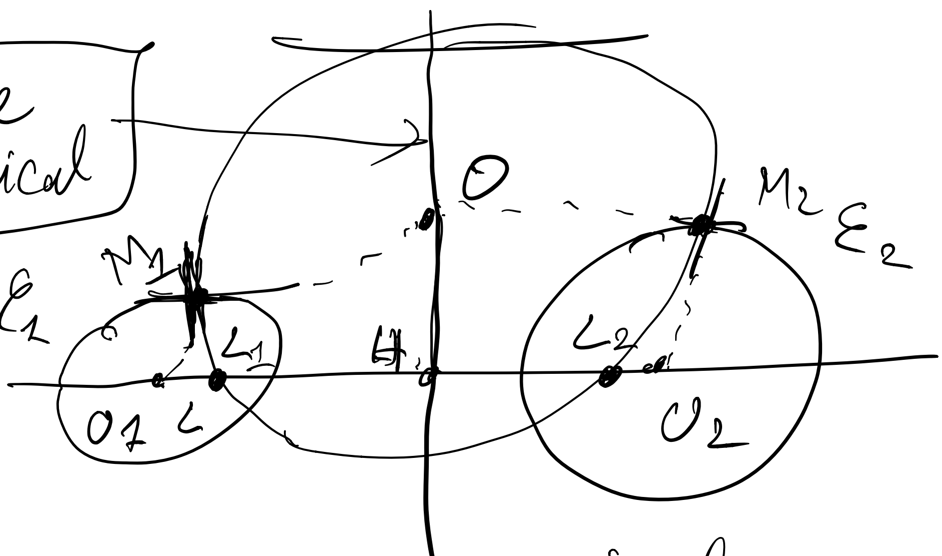
$$\underset{MO_1^2 - R_1^2}{\shortparallel} \qquad \underset{MO_2^2 - R_2^2}{\shortparallel}$$



$$OO'^2 = R^2 + R'^2$$

$\boxed{\text{cercles orthogonaux}}$

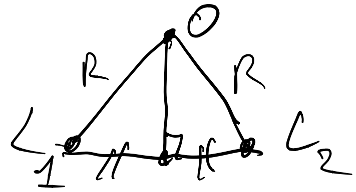
$\boxed{\text{axe radical}}$



Prop : • $O \in$ axe radical

$\boxed{3.7}$

• $L_1H = L_2H$



OK

• $\underline{L_1H^2 = HO_1^2 - R_1^2} = HO_2^2 - R_2^2 = L_2H^2$

dem : Pythagore

$$\left\{\begin{array}{ll} O_1HO & O_1O^2 = O_1H^2 + HO^2 \\ O_2HO & O_2O^2 = O_2H^2 + HO^2 \end{array}\right.$$

$$* \; O_1M_1O \rightarrow O_1O^2 = O_1M_1^2 + M_1O^2 = R^2 + R_1^2$$

$$O_2M_2O \rightarrow O_2O^2 = O_2M_2^2 + M_2O^2 = R^2 + R_2^2$$

$$OO_1^2 - R_1^2 = \mathcal{P}(O, \mathcal{C}_1) = R^2$$

$$\|$$

$$OO_2^2 - R_2^2 = \mathcal{P}(O, \mathcal{C}_2) = R^2$$

$$\Downarrow$$

$O \in$ axe radical

$$* \; \text{Pythagore} \left|\begin{array}{ll} OHL_1 & OL_1^2 = OH^2 + HL_1^2 \\ OHL_2 & OL_2^2 = OH^2 + HL_2^2 \end{array}\right.$$

$$HL_1^2 = R^2 - OH^2$$

<u>En résumé</u>: Tous les cercles orthogonaux à $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ $\longrightarrow$

- centre $\in$ axe radical
- passent tous par L_1, L_2

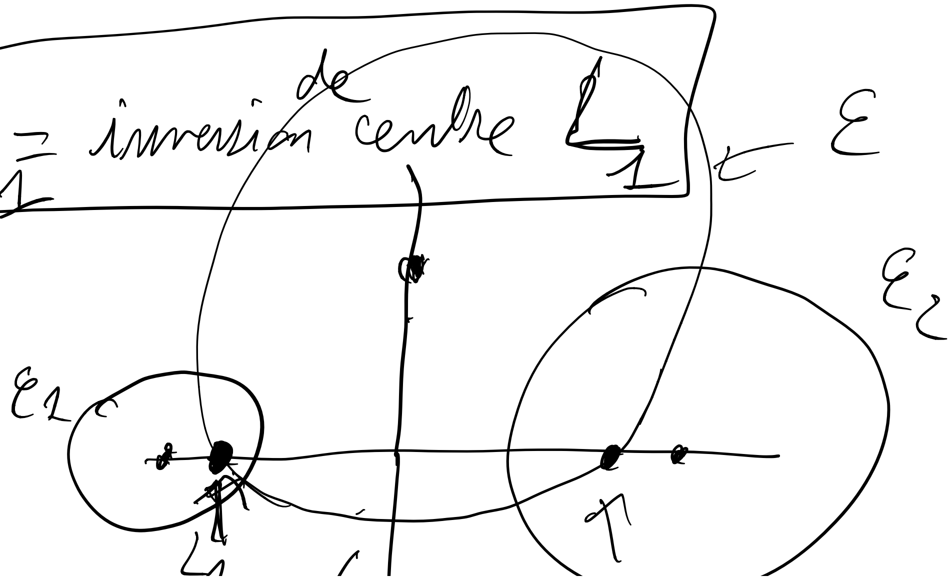
<u>Appli</u>: $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$

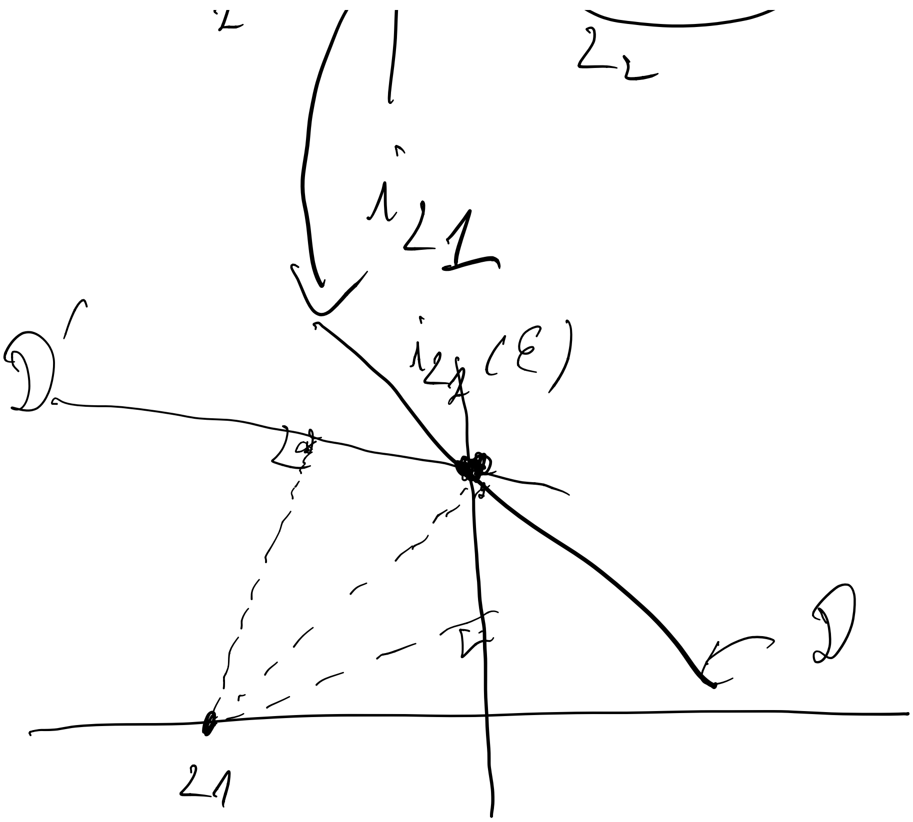
alors $\exists$ inversion i : $\mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_1'$

$\mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2'$

$\mathcal{E}_1'$ et $\mathcal{E}_2'$ = même centre

$\boxed{i_{L_1} = \text{inversion de centre } L_1}$





$\mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_1'(O_1', R_1')$

$\mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2'(O_2', R_2')$

$\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}$

$\Big\downarrow i_{\Sigma_1}$

$\mathcal{E}_1' \perp D$

$\Updownarrow$

$O_1' \in D$

$\mathcal{E}_2 \perp \mathcal{E}$

$\Big\downarrow i_{\Sigma_1}$

$\mathcal{E}_2' \perp D \Longleftrightarrow O_2' \in D$

$\Longrightarrow O_1', O_2' \in D$

On fait varier $\mathcal{E}$ $\rightsquigarrow$ fait varier les droites $\mathcal{D}$

$\Rightarrow O_1' = O_2'$ (sinon il n'y aurait que la droite $(O_1'O_2') = \mathcal{D}$)

Rem : en ajustant le rapport de i_{C_1}

$\leadsto R_1' = 1$

$\boxed{R_2' ?}$

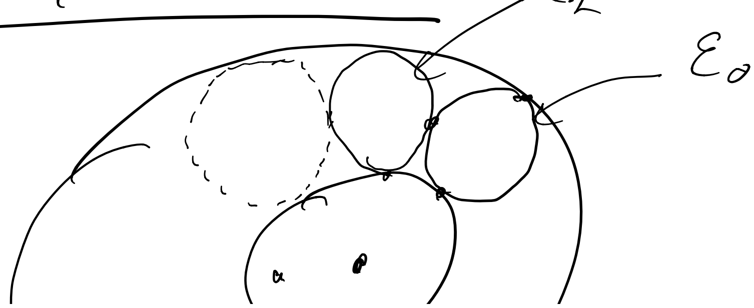
$$c(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{R_1^2 + R_2^2 - O_1O_2^2}{2R_1R_2}$$

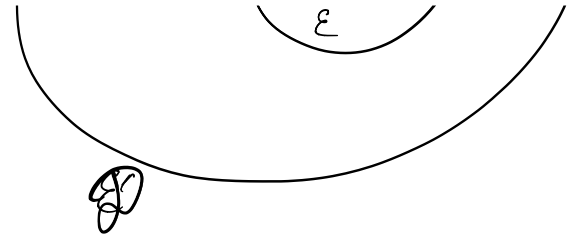
$$c(\mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2') = \frac{1 + R_2'^2 - 0}{2R_2'}$$

$$c = \frac{1 + R_2'^2}{2R_2'} \leadsto R_2' = \dots$$

Porisme de Steiner

Feuille 4 exo 3

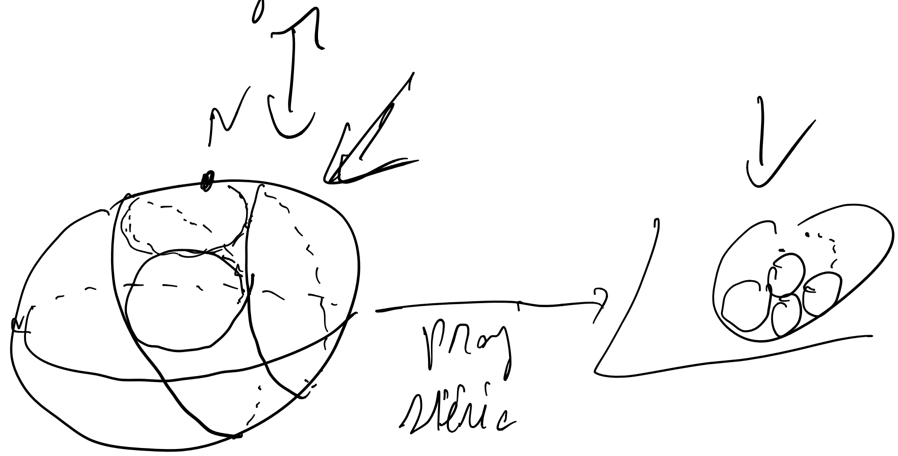




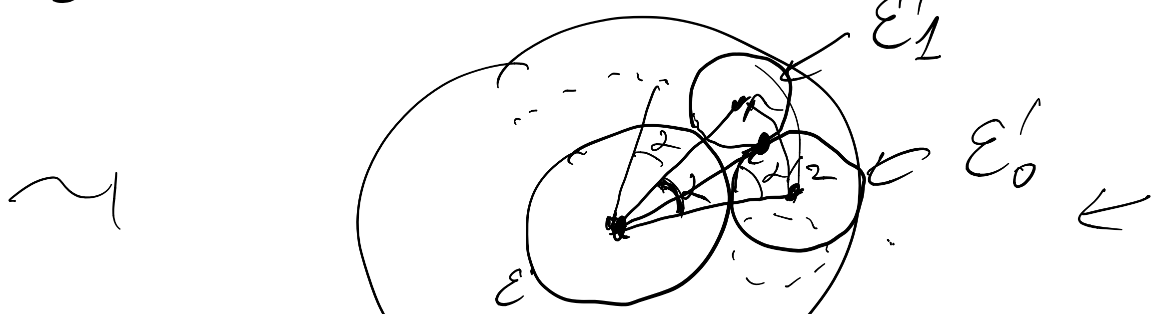
Q : la suite $(\mathcal{E}_n)$ est-elle périodique ?

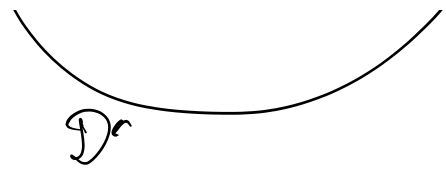
R : CNS qui ne dépend pas de $\mathcal{E}_0$

Dem : énoncé de géométrie inversive



On applique une inversion qui transforme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ en 2 cercles de m̂ centre



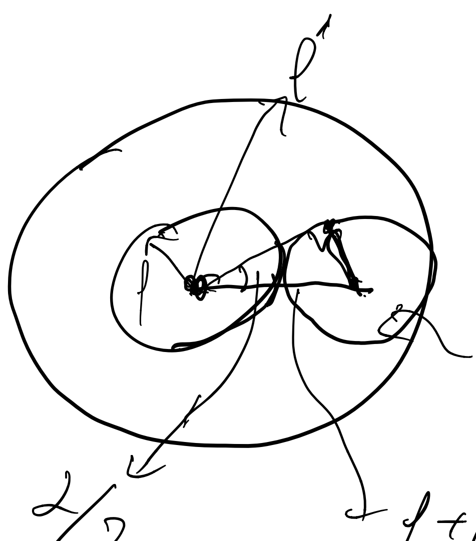


invariant par rotation $\Rightarrow$ le porisme clairement indépendant du cercle de départ

périodique : $\Leftrightarrow \exists\, n$ tq $\boxed{n\alpha = k\,2\pi}$ (+)

n : période

k : nombre tours



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{(\ell'-\ell)/2}{(\ell+\ell')/2}$$

$$x = \ell'/\ell$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\ell'-\ell}{\ell+\ell'} = \frac{\ell'/\ell - 1}{\ell'/\ell + 1} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\lambda\left(\sin\frac{\alpha}{2}-1\right) = -1-\sin\alpha/2$$

$$\frac{\ell'}{\ell} = \boxed{\lambda = \frac{1+\sin\alpha/2}{1-\sin\alpha/2}} \qquad \lambda = \ell'/\ell \geq 1$$

$$c(\mathcal{E}', \mathcal{D}') = \frac{\ell^2+\ell'^2-0}{2\ell\ell'} = \frac{(\ell'/\ell)^2+1}{2(\ell/\ell')}$$

$$c = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \rightsquigarrow \lambda^2-2c\lambda+1=0$$

$$\lambda_\pm = c \pm \sqrt{c^2-1}$$

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1 \qquad \lambda_+ > 1$$

$$\lambda_+ + \lambda_- > 0 \qquad \lambda_- < 1$$

$$\lambda = c + \sqrt{c^2-1} = \frac{1+\sin\alpha/2}{1-\sin\alpha/2}$$

$$n\frac{\alpha}{2} = k\pi \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{k\pi}{n}$$

nbre de tours

$$\boxed{\boxed{c+\sqrt{c^2-1}} = \frac{1+\sin k\pi/n}{1-\sin k\pi/n}}$$ période

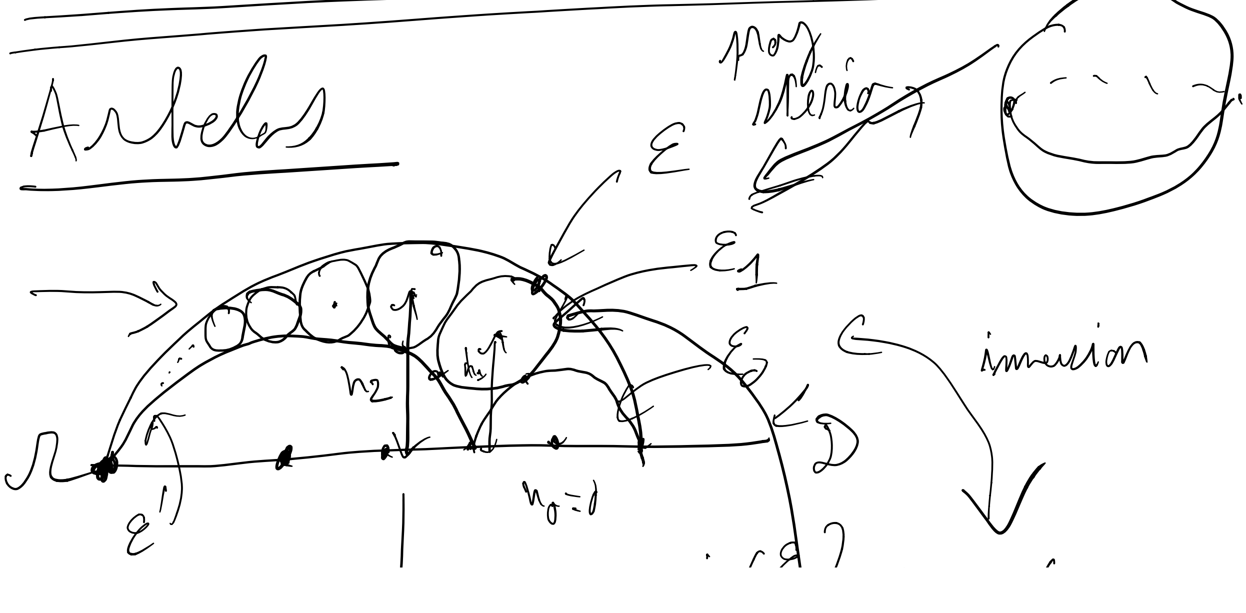
invariant par l'orbe (anti?) - homographie

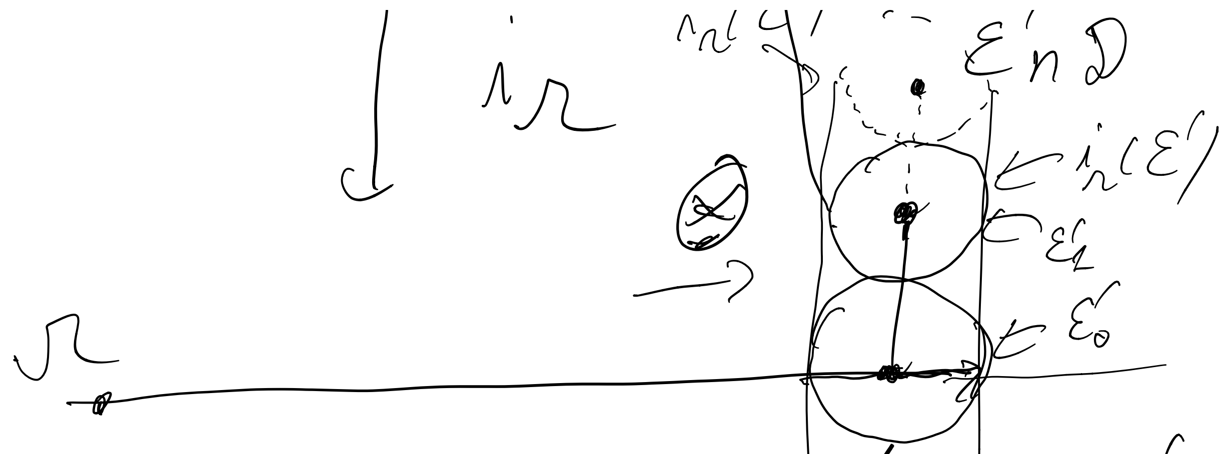
Conclusion: on calcule $c(\mathcal{E},\mathcal{D}) =: c$ et on regarde si $c+\sqrt{c^2-1}$ est de la forme $\frac{1+\sin k\pi/n}{1-\sin k\pi/n}$ $\forall k,n$?

NON : pas périodique

OUI n = période, k = nbre de tours

Arbelos





$d' =$ diamètre $\mathcal{E}'_n$

$\xleftarrow{\;i_r\;}$ $\quad h'_n = n\, d'_{(n)}$

ordonnée du centre de $\mathcal{E}'_n$

$$i_r : \mathcal{E}'_n \xrightarrow[\text{de rapport } \lambda_n]{\text{homothétie}} \mathcal{E}_n$$

- $d_n =$ diamètre de $\mathcal{E}_n$
- $h_n =$ ordonnée du centre de $\mathcal{E}_n$

une homothétie conserve $\dfrac{h_n}{d_n} = \dfrac{h'_n}{d'_n} = n$

homothétie

$$\| \quad \frac{\cancel{\lambda_n}\, h'_n}{\cancel{\lambda_n} \cdot d_n}$$