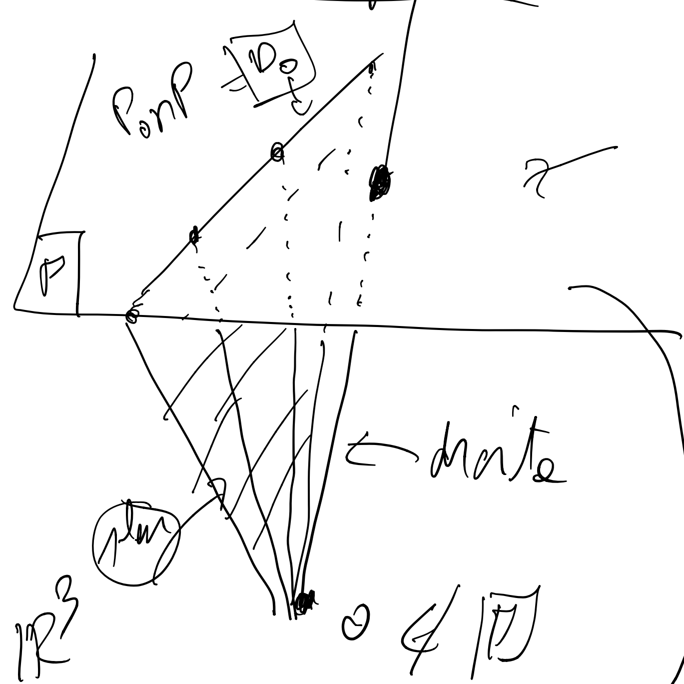
$\boxed{\text{Géométrie projective}}$

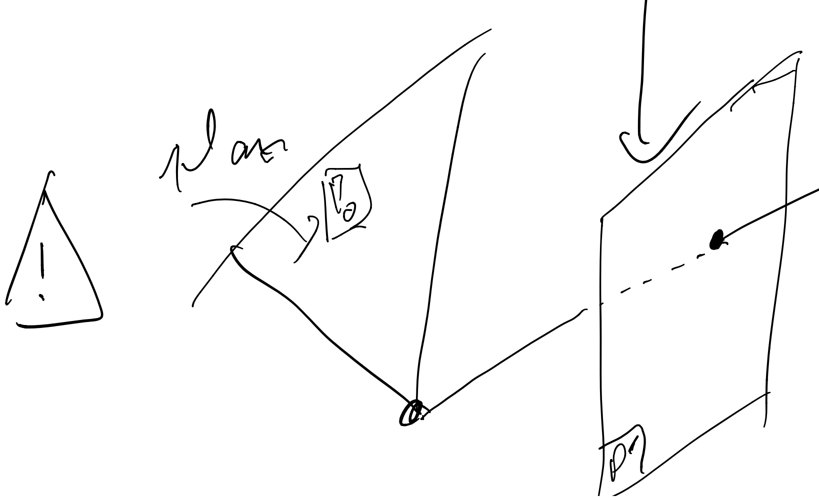
<u>présentation informelle</u> (en dim 2)



<u>question</u>

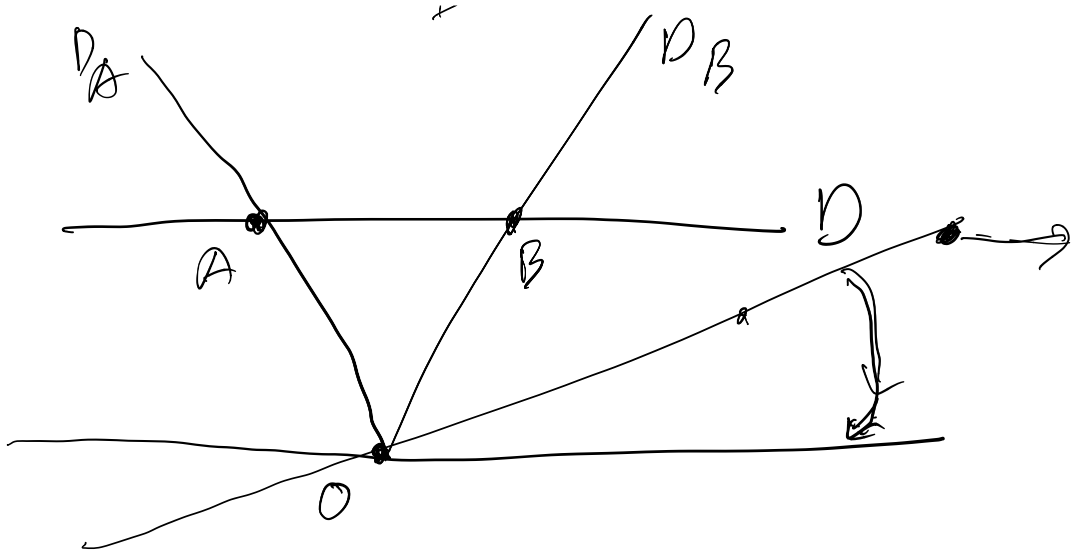
quel est le dessin si on coupe par un autre plan $P' \not\ni O$

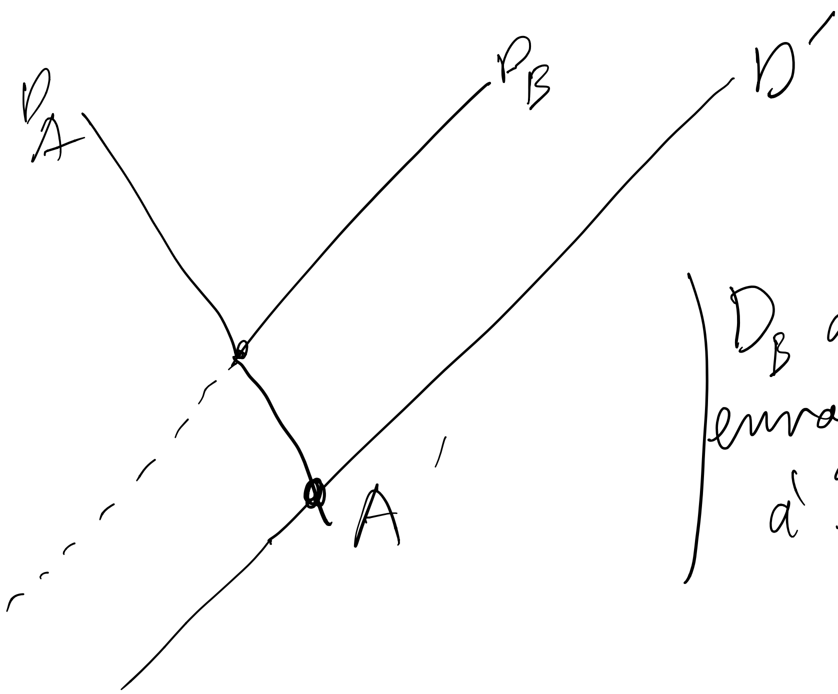
$\boxed{D_0 \text{ a été envoyé à l'infini}}$



$P' \,//\, D_0$

$\boxed{\text{dim } 1}$

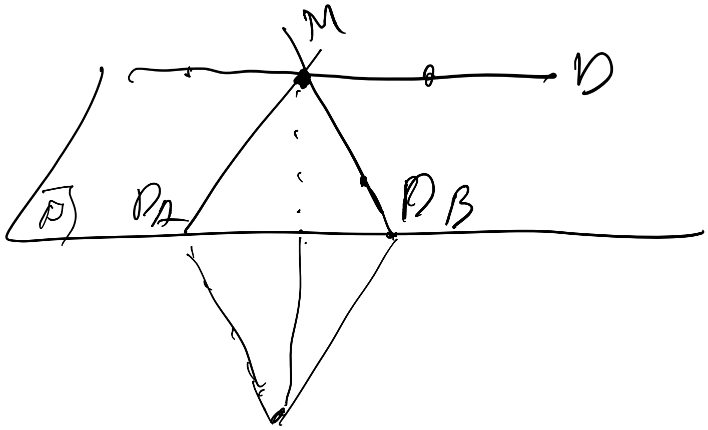




D_B a été envoyé à l'infini

Question : (dim 2)

ex :



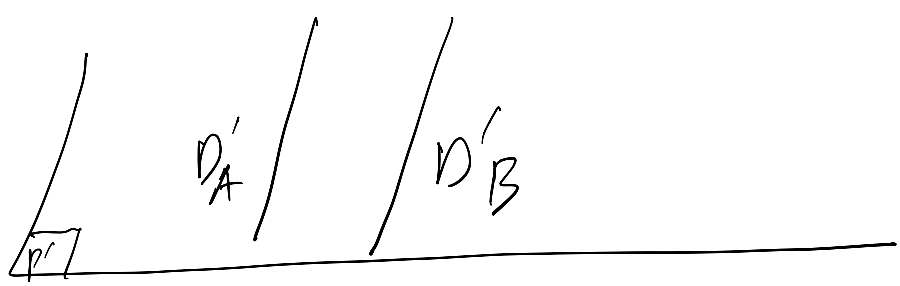
droite ⟷ plan

$D_A \longmapsto P_A \ni 0$

$D_B \longmapsto P_B \ni O$

[P'] tq D est envoyé à l'infini

P' est parallèle au plan "(O, D)"



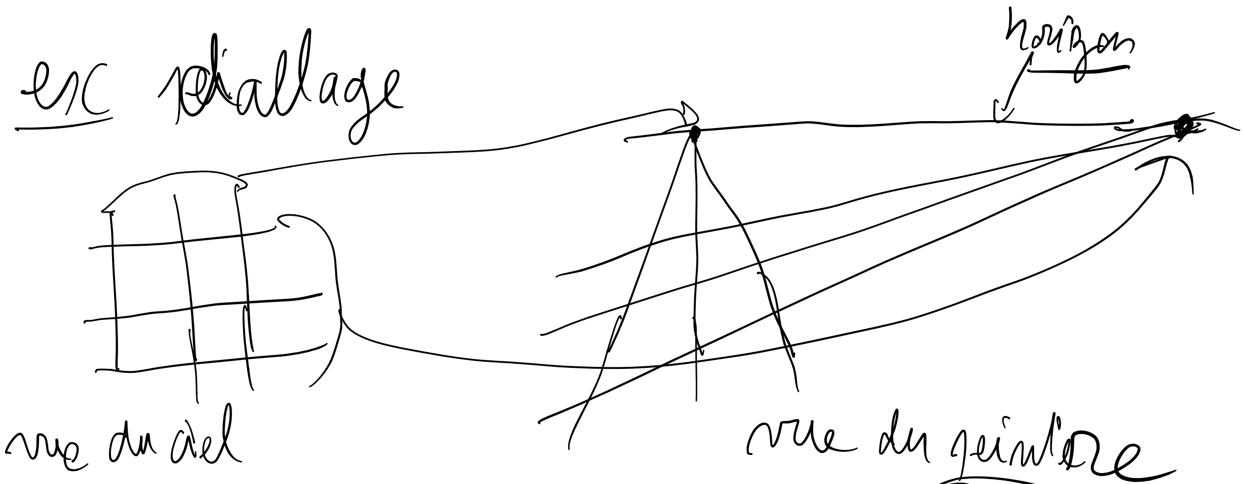
$M \in \begin{cases} P_A \cap P' = \text{droite } D'_A \\ P_A \cap P' = \text{droite } D'B \end{cases}$

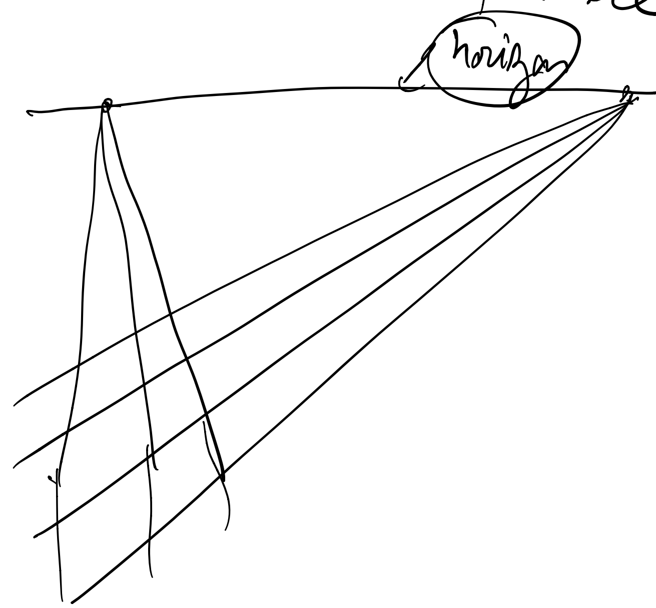
$M \in D$.

$D \cap P' = \emptyset$

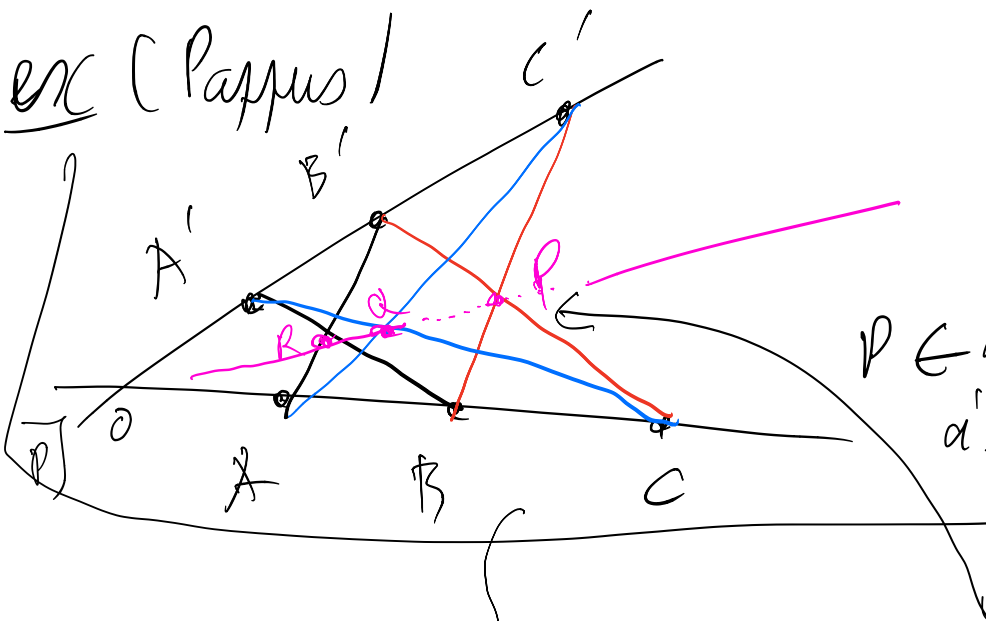
$\Rightarrow \boxed{D'_A \parallel D'_B}$

exc dallage



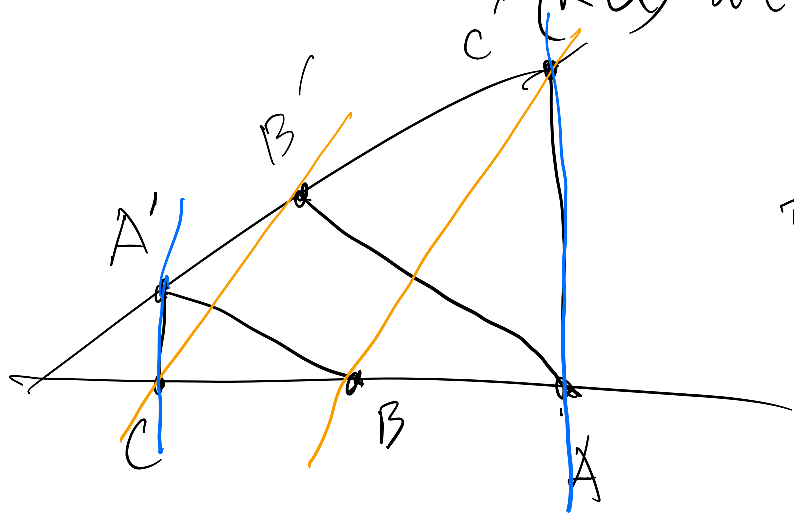


exc (Pappus)



P $\in$ droite envoyée à l'infini = CQFD

(RQ) à l'infini



Thalès

(Pappus affine)

Présentation utilisant l'algèbre linéaire

① L'espace projectif

E = K-espace vectoriel dim finie $n+1$ (K corps ex: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

Déf: $\mathbb{P}(E) = E\setminus\{0\} / \sim$

$\vec{x} \sim \vec{y}$ ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires

c'est l'espace projectif associé à E

$\boxed{\dim \mathbb{P}(E) = n}$

rem : $\mathbb{P}(E)$ bijection avec les droites de E

| sous espace projectif (sep) $p(F)$ où F est un sev de E

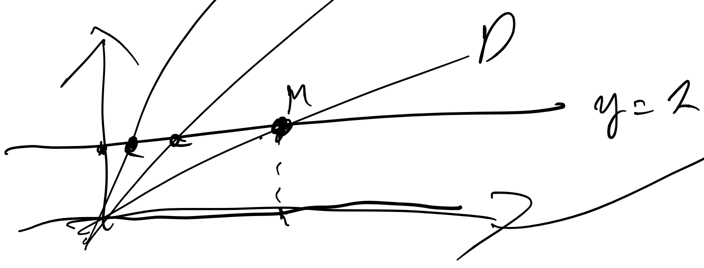
| où $p : E \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{ensemble}} \mathbb{P}(E)$ surjection ensembliste

ex : $E = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{P}(E)$ droite projective réelle

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$$

$E = \mathbb{C}^2 \rightsquigarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ = sphère de Riemann cf chapitre précédent

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

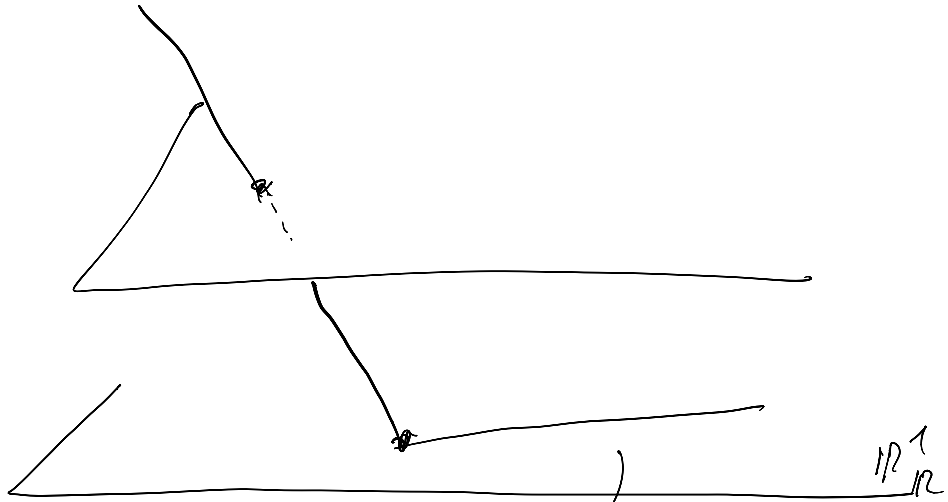


$D \longmapsto x_M$ $\{y=0\}$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \amalg \{\infty\}$

bijection ensembliste

$\boxed{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}$



$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \underset{\text{bij}}{=} \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \sqcup \underbrace{(\mathbb{R} \sqcup \{\infty\})}_{\text{droite d'l'infini projective}}$$

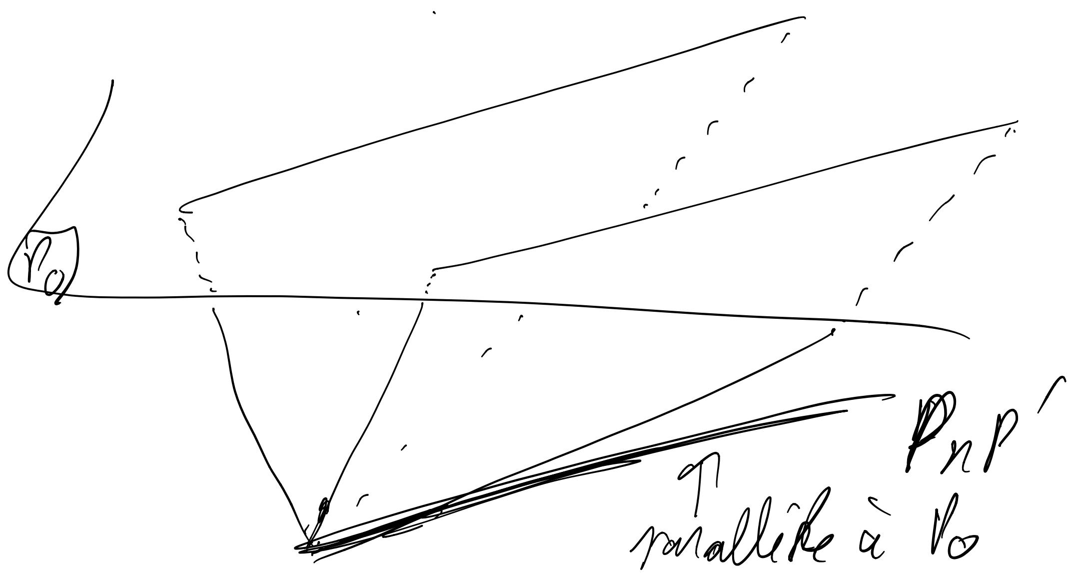
Rem : dès que vous avez un énoncé à démontrer dans $\mathbb{P}(E)$ $\rightsquigarrow$ traduction dans E

$\mathbb{P}(E) \hookrightarrow$ projection $\hookleftarrow$ alg linéaire classique

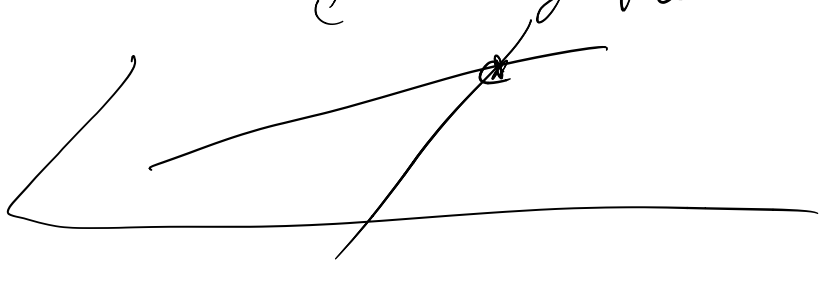
ex : 2 droites $\neq$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ s'intersectent toujours en 1 point dem : $D \not\parallel D'$ droites projection de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ $\rightsquigarrow$ P, P' plans dans $\mathbb{R}^3$

$\rightsquigarrow$ $P \cap P'$ = droite de $\mathbb{R}^3$

1 point de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ $\xleftarrow{\;p\;}$



on change P_0



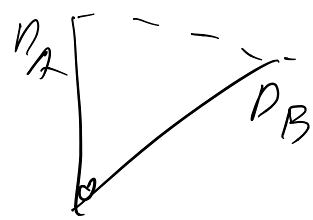
Faits : $\mathbb{P}(E)$ $\dim E \geq 3$

- 2 points $a \neq b$ $\rightsquigarrow$ $\exists !$ droite passant par a et b

[dém : D_a, D_b $\quad\rightarrow\quad P = \langle D_a, D_b \rangle$

$\Downarrow$

$O \in D_A \cap D_B$



- a, b, c 3 points non alignés de $\mathbb{P}(E)$
  $\rightsquigarrow$ $\exists !$ plan projectif ....

- $A \subset \mathbb{P}(E)$

$\{ \text{sep} \supset A \}$ possède 1 plus petit élément (au sens de l'inclusion)

on le note $\langle A \rangle$ = c'est le sep engendré par A

[dem : on passe dans E où on connaît la notion de sev engendré par une partie et on revient à $\mathbb{P}(E)$

Analogue de la formule de Grassmann

$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ des sep de $\mathbb{P}(E)$

$\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{L}' = \dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}') + \dim \langle \mathcal{L} \cup \mathcal{L}' \rangle$

rem : $\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{L}' \geq \dim \mathbb{P}(E)$

$\Rightarrow \mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \neq \emptyset$

ex : hyperplan vectoriel H de E

$\rightsquigarrow \mathbb{P}(H)$ de $\mathbb{P}(E)$

$H = \operatorname{Ker} f \quad f \in E^*$

$\forall \lambda \in K^* : \lambda f$ est une équation de $\mathbb{P}(H)$

Pour faire des calculs explicites

$\updownarrow$

notion de repère projectif

F ~~sev~~ de E

$F = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$

$\dim F = n - r$

$H_i = \operatorname{Ker} f_i$

E : base $(\vec{e_0}, \dots, \vec{e_n}) \longmapsto \begin{vmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_n \end{vmatrix} \in P(E)$

$x \in P(E)$ $\quad x \leftrightarrow$ droite à $\vec{x}$ vecteur directeur

$$\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} x_i \vec{e_i} \qquad x(x_0, \dots, x_n)$$

Pb : $e_0 \cancel{\to} \vec{e_0}$ $\quad e_0 \leadsto K\vec{e_0}$

$e_0, \dots, e_n$ et $x_0, \dots, x_n \leadsto \vec{x}$?
$= \sum x_i \vec{e_i}$?

Conclusion il manque des données

$e_{n+1} \longleftrightarrow$ droite $\sum_{i=0}^{n} \vec{e_i}$

Déf : Un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$
$\dim E = n+1$
est la donnée de $(n+2)$ points de $\mathbb{P}(E)$
$(e_0, \dots, e_n, e_{n+1})$
tq $\exists$ base $\vec{e_0}, \dots, \vec{e_n}$ de E
tq : $e_0 = p(\vec{e_0})$
$\vdots$
$e_n = p(\vec{e_n})$
$e_{n+1} = p(\vec{e_0} + \dots + \vec{e_n})$

Vérification :

$x \in \mathbb{P}(E) \longleftrightarrow K\vec{x}$ droite de E

$x_0, \dots, x_n$

but : retrouver la droite $K\vec{x}$ de E

$$l_0 \mapsto K\vec{e_0}$$
$$\vdots$$
$$l_n \mapsto K\vec{e_n}$$
$$l_{n+1} \mapsto K(\vec{e_0}+\cdots+\vec{e_n})$$

$$\alpha_0\vec{e_0} \mapsto l_0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n\vec{e_n} \mapsto l_n$$

$$l_0+\cdots+l_n \leftarrow \alpha_0\vec{e_0}+\cdots+\alpha_n\vec{e_n}$$
$$\Updownarrow$$
$$l_{n+1} \mapsto \alpha(\vec{e_0}+\cdots+\vec{e_n})$$

$$\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = \alpha$$

$$\Big\updownarrow$$

$$(\vec{e_0},\dots,\vec{e_n}) \sim (\alpha\vec{e_0},\dots,\alpha\vec{e_n})$$

à homothéties près

autrement dit : $(l_0,\dots,l_{n+1})$

$$\Big\updownarrow$$

$$(\vec{e_0},\dots,\vec{e_n}) \sim (\alpha\vec{e_0},\dots,\alpha\vec{e_n})$$

$x_0,\dots,x_n$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i\vec{e_i} \quad \text{et} \quad \alpha\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\vec{e_i}\right)$$

cela définit la même droite OK

rem : $(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$

définissent la m̂ droite !

Résumé : repère projectif

$e_0, \dots, e_{n+1}$ $n+2$ points de $P(E)$

+ Conditions

et coordonnées de $x \in P(E)$

$\boxed{(\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n)} \sim (\lambda\lambda_0 : \dots : \lambda\lambda_n)$

Conditions : $\cancel{*}$ $e_0 = p(\vec{e_0}) \dots\dots e_n = p(\vec{e_n})$

$e_{n+1} = p(\vec{e_0} + \dots + \vec{e_n})$

où $(\vec{e_0}, \dots, \vec{e_n})$ base de E

$\Updownarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} * \ (e_0, \dots, e_{n+1}) \text{ repère} \\ \text{ssi } (n+1) \text{ quelconques n'appartiennent} \\ \text{pas à 1 hyperplan projectif} \end{array}}$

Dém : $\Downarrow$ $\underbrace{\vec{e_0}, \dots, \vec{e_n}, (\vec{e_0} + \dots + \vec{e_n})}$

$n+1$ qcq forment une base

($\Leftarrow$ aff à 1 hyperplan)

$\Uparrow$ $e_0, \dots, e_n \rightsquigarrow \vec{e_0}, \dots, \vec{e_n}$ base de F

$e_{n+1} \longrightarrow \vec{e_{n+1}} = \sum_0^n \lambda_i \vec{e_i}$

$\vec{e_i}' = \lambda_i \vec{e_i} \rightsquigarrow \underline{\vec{e_{n+1}} = \sum \vec{e_i}'}$

Application $\rightsquigarrow$ calculs sur les coordonnées projectives (similaires à ceux faits en algèbre linéaire)

/!\ $(\lambda_0 : \dots : \lambda_n)$ ou $(\lambda \lambda_0 : \dots : \lambda \lambda_n)$

② Groupe projectif

rem : on veut utiliser les applications linéaires $E \xrightarrow{u} E$ et les passer au quotient

⚠ $E \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}(E)$

$\Rightarrow$ u doit être bijectives i.e. $\boxed{u \in GL(E)}$

Def : $u : E \to E$ bijective

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}(u) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$

$\mathbb{P}(u)(x) = ?$ $\quad x \rightsquigarrow K\vec{x}$ droite de E

$\downarrow$

$\mathbb{P}(E) \xleftarrow{p} K u(\vec{x})$ / droite de E

($u : E_1 \to E_2$ $\quad$ u injective

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}(u) : \mathbb{P}(E_1) \to \mathbb{P}(E_2)$)

$\mathbb{P}(u)$ est appelée une homographie

Fait : $\mathbb{P}(u \circ v) = \mathbb{P}(u) \circ \mathbb{P}(v)$

Notation : On note $PGL(E) = \{\mathbb{P}(u) : u \in GL(E)\}$ appelé le groupe projectif de E

Prop : $PGL(E) \simeq GL(E) / k^\times$

$k^\times = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in k^\times \right\}$

dem : $\mathbb{P} : GL(E) \longrightarrow PGL(E)$
$u \longmapsto \mathbb{P}(u)$
morphisme surjectif de groupes

noyau : $u \in GL(E)$ tq $\mathbb{P}(u) = Id$

$\mathbb{P}(u)(x) = x \qquad x \longmapsto \mathbb{K}\vec{x}$ droite de E

$\Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in E \quad u(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}} \vec{x}$

classique : $\lambda_{\vec{x}}$ est indépendant de $\vec{x}$

dem : $\cdot\, u(\mu\vec{x}) = \lambda_{\mu\vec{x}}(\mu\vec{x}) = \mu\, u(\vec{x})$
$= \mu \lambda_{\vec{x}} \vec{x}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_{\mu\vec{x}} = \lambda_{\vec{x}}}$

$\circ$ $\vec{x}, \vec{y}$ non colinéaires

$u(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{x}+\vec{y})$

$= u(\vec{x}) + u(\vec{y})$

$= \lambda_{\vec{x}} \vec{x} + \lambda_{\vec{y}} \vec{y}$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_{\vec{x}+\vec{y}} - \lambda_{\vec{x}})}_{=0} \vec{x} = \underbrace{(\lambda_{\vec{y}} - \lambda_{\vec{x}+\vec{y}})}_{=0} \vec{y}$

$\Rightarrow \lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$

$\Rightarrow \quad u(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \quad \forall \vec{x} \iff u = \lambda \, Id$

donc $\operatorname{Ker} P = \{\lambda I_{n+1}\}$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} GL(E) \arrow[r] \arrow[dr] & PGL(E) \\ & GL(E)/\{\lambda I_{n+1}\} \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

$\square$

rem: u = homographie

L = sep de $\mathbb{P}(E)$

$\Rightarrow u(L)$ = sep de $\mathbb{P}(E)$

en particulier u préserve les droites

(u est une collinéation)

Thm (Fondamental de la géo proj)

$f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ collinéation alors f est semi-homographie

i.e $f = \mathbb{P}(u)$ $\quad u : E \to E$

semi-linéaire

(ex : $K = \mathbb{C}$ $\quad f(\lambda x + y) = \bar{\lambda} f(x) + f(y)$)

Lien avec les repères projectifs

Prop : $(e_0, \dots, e_{n+1})$ et $(e_0', \dots, e_{n+1}')$

2 repères proj de $\mathbb{P}(E)$

Alors $\exists !$ homographie $u \in PGL(E)$

tq $u(e_i) = e_i'$ $\quad \forall i = 0, \dots, n+1$

dem : $e_0, \dots, e_{n+1} \rightsquigarrow \vec{e_0}, \dots, \vec{e_n}$

$\vec{e_{n+1}} = \vec{e_0} + \dots + \vec{e_n}$

$e_0', \dots, e_{n+1}' \rightsquigarrow \vec{e_0'}, \dots, \vec{e_n'}$

Analyse on doit avoir $\qquad \vec{e}_{n+1} = \vec{e}_0 + \dots + \vec{e}_n$

$$u(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$$u(\vec{e}_0 + \dots + \vec{e}_n) = \lambda_0 \vec{e}_0 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$$

$$= \lambda(\vec{e}_0 + \dots + \vec{e}_n)$$

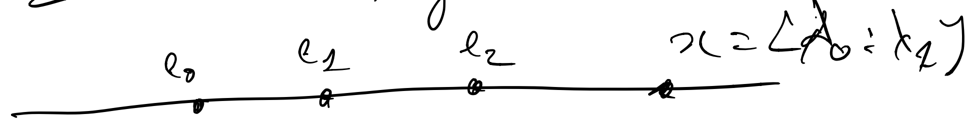
$$\Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$$

$$\Rightarrow P(u) \in GL(E) / \{\lambda I_{n+1}\} \text{ est unique}$$

Synthèse 1 tq u convient $\square$

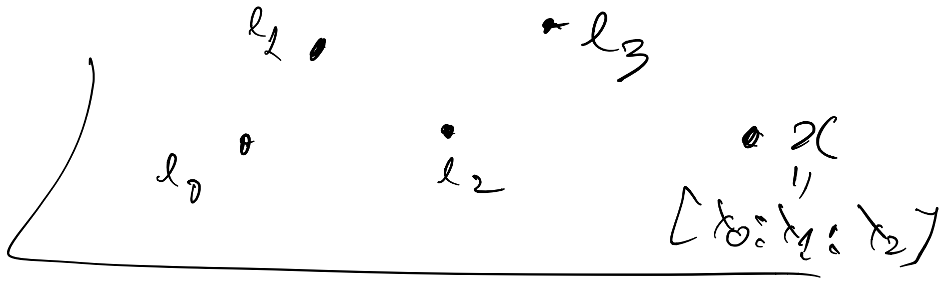
Ex de repères

$n = 1$ droite projective

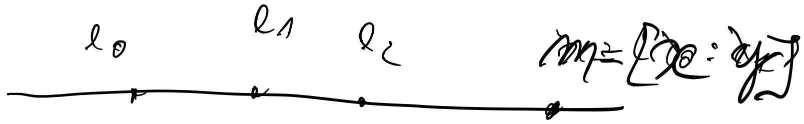


(e_0, e_1, e_2) repère

$n=2$



ℓ_x :



$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

$$\vec{m} = x\vec{e_0} + y\vec{e_1}$$

$$\Big\downarrow M$$

$$M(\vec{m}) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow$$

$\mathbb{P}(M)(m)$

$$\mathbb{P}(M)(m) = [ax+by : cx+dy]$$

$$\| $$

$$\left[\frac{ax+by}{cx+dy} : 1\right]$$

$$0 \neq cx+dy$$

$K = \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \ni [x : y] \quad y \neq 0$

$$\| $$

$$\left[\frac{x}{y} : 1\right]$$

$\{\infty\}$

$$\{ m \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : y \neq 0 \} \coprod \{ m \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\ y = 0 \}$$

$m = [x:y]$, $[\frac{x}{y} : 1] = [x:y]$, $[x:0] = [1:0]$

$\| \text{bij}$

$$\downarrow$$

$\frac{x}{y} \qquad \mathbb{C}$

$$m \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathbb{P}(u)} \mathbb{P}(u)(m) = \frac{at+b}{ct+d} \in \mathbb{C}$$

$t = \frac{x}{y}$

$ct + d \neq 0$

sinon $= \infty$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \coprod \{\infty\} \xrightarrow{\mathbb{P}(u)} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$t \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{cases} \frac{at+b}{ct+d} & \text{si } ct+d \neq 0 \\ \infty & t = -\frac{d}{c} \end{cases}$$

$$\infty \longmapsto \frac{a}{c}$$

cf : le chapitre sur géométrie inversive