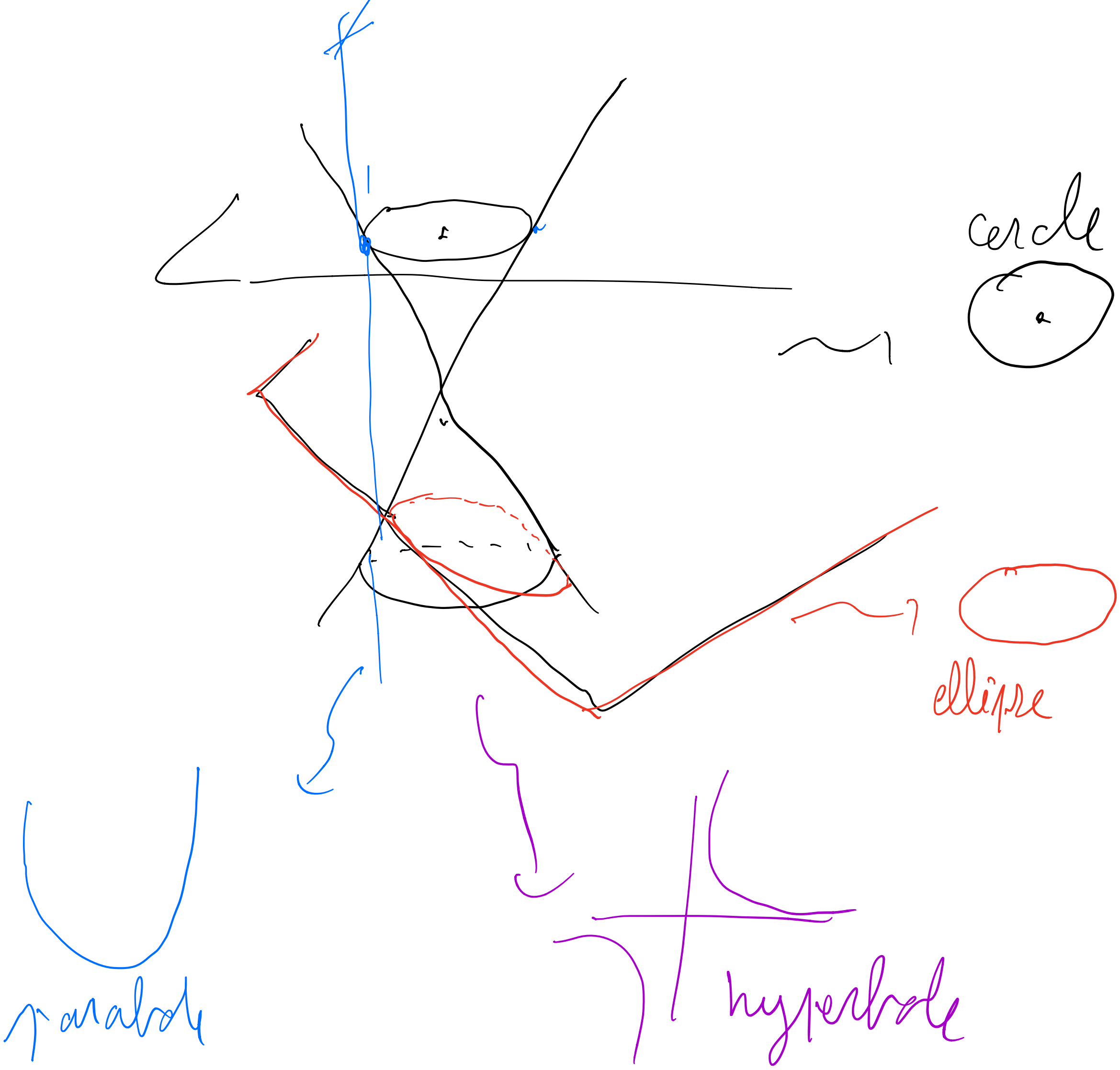
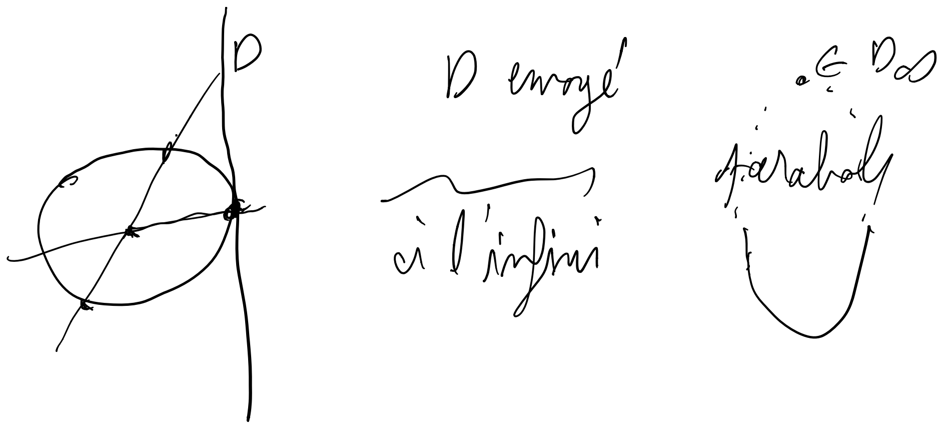
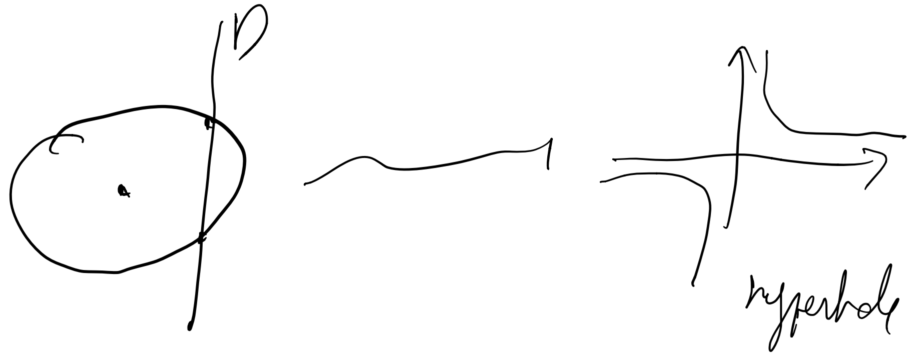
Cours géo proj n°2

Liaison affine - projectif

ex : Cone de révolution dans $\mathbb{R}^3$







Du point de la géométrie projective

cercle, ellipse, parabole, hyperbole

les m̂ " objet

i.e en géométrie $\exists$ une <u>unique</u> conique (non dégénérée)

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ repère projectif

$m = [x_0 : \cdots : x_n]$ $\qquad H = \{ m \,/\, x_n = 0 \}$

$$V = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus H \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{R}^n$$

$$m = [x_0 : \cdots : \underset{\substack{H\\ 0}}{x_n}] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

$$\| \qquad \left[\frac{x_0}{x_n} : \cdots : \frac{x_{n-1}}{x_n} : 1 \right]$$

$$[y_0 : \cdots : y_{n-1} : 1] \longleftarrow (y_0, \cdots, y_{n-1})$$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \amalg H \qquad \underline{H = \{x_n = 0\} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}$$

<u>ex</u> : $\underline{n = 1}$ $\qquad \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{y = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underset{\substack{\cup\\ m}}{} = [x : y] = \left[\frac{x}{y} : 1\right] \longmapsto t = \frac{x}{y}$$

$y \neq 0$

$u \in PGL_2(\mathbb{R})$ $\qquad \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{y = 0\} = \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{y = 0\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad m = [t : 1] \longmapsto \left| \frac{at + b}{ct + d \neq 0} \right. \in \mathbb{R}$$

$[0:1]$ si $t \neq 0$

<u>ex $n=2$</u> $\quad (x:y:t) \quad D_\infty = \{t=0\}$

$U = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus D_\infty = \mathbb{R}^2$

$m^u = [x:y:1] \longrightarrow (x,y)$

D = droite projective $\quad$ <u>équation</u> : $\boxed{ux+vy+wt=0}$

- <u>$u=v=0$</u> $\Rightarrow w=1 \quad t=0 \quad \underline{D=D_\infty}$
- <u>sinon</u> : la trace de D sur $U=\mathbb{R}^2$

$m^u = [x:y:1]$

$ux+vy+w=0 \quad$ <u>droite affine</u>

<u>$D \cap D_\infty$</u> : $\begin{cases} t=0 \\ ux+vy+wt=0 \end{cases} \leadsto ux+vy=0$

le point de $[-v:u] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \;\; D_\infty$

<u>$u \neq 0$</u> $\quad [\underbrace{-\tfrac{v}{u}}_{\text{pente}} : 1]$

D et D' droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ leur trace sur $V = \mathbb{R}^2$

2 droites affines — elles se coupent dans $V = \mathbb{R}^2$

— elles sont parallèles dans V

$\Downarrow$

m̂ pente

$\Downarrow$

D et D' passent par le m̂ point de D_∞

Prop$^{\text{n}}$ $\mathbb{P}(E)$ E = ev de dim $n+1$

$\mathbb{P}(H)$ H = hyperplan de E

$\mathcal{E} = \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}} \simeq H$

Γ dem: $H \circlearrowright \mathcal{E}$

$\vec{h} \in H$, $A \in \mathcal{E}$ $\rightsquigarrow \vec{h} \cdot A$?

* def: $A = \mathbb{P}(\vec{x})$ $\vec{x} \in E \setminus H$

$$\vec{h} \cdot A = \mathbb{P}(\vec{x} + \vec{h}) \in \mathcal{E}$$

$$\vec{x} + \vec{h} \notin H$$

* $(\vec{h_1} + \vec{h_2}) \cdot A = \vec{h_1} \cdot (\vec{h_2} \cdot A)$

$\vec{h_2} \cdot A = \mathbb{P}(\vec{x} + \vec{h_2})$

$(\vec{h_1} + \vec{h_2}) \cdot A = \mathbb{P}(\vec{x} + \vec{h_1} + \vec{h_2}) = \mathbb{P}(\vec{h_1} + (\vec{x} + \vec{h_2}))$

* transitivité: $A = \mathbb{P}(\vec{x})$ $\vec{x} \notin H$

$$E = H \oplus \mathbb{K}\langle \vec{x} \rangle$$

$B = \mathbb{P}(\vec{y})$ $\vec{y} \notin H$ $\cdot$ $\vec{y} = \lambda \vec{x} + \vec{h}$ $\lambda \neq 0$

$B = \mathbb{P}(\vec{y}')$ $\vec{y}' = \frac{1}{\lambda} \vec{y}$ $\vec{y}' = \vec{x} + \vec{h}'$

$B = \vec{h'} \cdot A$

* *simple* : $hA = h'A$

$$\vec{x} + \vec{h} = \lambda(\vec{x} + \vec{h'})$$

$\langle \vec{x} \rangle \ni (1-\lambda)\vec{x} = \vec{h'} - \vec{h} \in H$

$\langle \vec{x} \rangle \cap H = \{\vec{0}\} \Rightarrow \lambda = 0 \quad \vec{h} = \vec{h'}$

Def : $\mathcal{E}$ = espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$

$\overline{\mathcal{E}} = \mathbb{P}(\vec{\mathcal{E}} \times \mathbb{R})$ = la clôture projective de $\mathcal{E}$

ψ

$m = [x_0 : \dots : x_{n+1}]$ $\quad H = \{x_{n+1} = 0\} = \vec{\mathcal{E}} \cap \vec{\mathcal{E}} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(\vec{\mathcal{E}} \times \mathbb{R}) \setminus H$ = espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$

|| bij

$\mathcal{E}$

Ex 1 : si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ application affine

$$\overline{f} = \mathbb{P}(\vec{f} \times Id_{\mathbb{R}}) : \overline{E} \longrightarrow \overline{F}$$

Dualité

<u>rappels d'algèbre linéaire</u>

$E \rightsquigarrow E^* = \{$ formes linéaires sur $E\}$
$E \to \mathbb{R}$

Sev

$F \rightsquigarrow F^{\perp} = \{ f \in E^* \text{ tq } \forall x \in F \; f(x) = 0 \}$

F^* sev de $E^* \rightsquigarrow F^{*\perp} = \{ x \in E \text{ tq } \forall f \in F^* \; f(x) = 0 \}$

$$\boxed{\begin{array}{l} F \rightsquigarrow F^{\perp} \rightsquigarrow (F^{\perp})^{\perp} = F \\ \dim F^{\perp} = \dim E - \dim F \end{array}}$$

$u : E \to F$ ⇝ sa transposée

$^t u : F^* \to E^*$

$^t u(f) = f \circ u$

<u>rem</u> : $^t \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$

$^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

+ point de vue matricielle en utilisant bases duales

<u>Notation</u> : $G_{n-1}(\mathbb{P}(E)) = \{$ ssp de $\mathbb{P}(E)$ de dim $n-1 \}$

<u>Prop</u> : $\phi_E : \mathbb{P}(E^*) \xrightarrow[\text{bij}]{} G_{n-1}(\mathbb{P}(E))$

$f \in E^* \longmapsto \mathbb{P}(\mathrm{Ker} f)$

<u>dém</u> : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(\lambda f)$ ⇒ ϕ_E est bien défini

* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \iff \exists \lambda$ tq $g = \lambda f$

$\Rightarrow$ ~~in~~ ϕ_E est injective

* H hyperplan de $E \Rightarrow H = \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \phi_E$ est surjective

$\square$

Rem: $G_{n-1}(\mathbb{P}(E))$ est muni d'une structure d'espace projectif de dim n ($\dim E = n+1$)

$\boxed{\text{Ex: } \underline{n = 1}}$ $\underline{G_{n-1}(\mathbb{P}(E))} = \mathbb{P}(E)$

$\phi_E : \mathbb{P}(E^*) \longrightarrow \mathbb{P}(E)$

$\rightarrow$ 2 structures d'espaces projectifs sur $\mathbb{P}(E)$

- celle naturelle
- celle de $\mathbb{P}(E^*)$ via ϕ_E

Lemme : $\hat{m}$ structure $\Leftrightarrow$ $\phi_E : \mathbb{P}(E^*) \to \mathbb{P}(E)$ est une homographie

dem : (e_1, e_2) base de E

$\to (e_1^*, e_2^*)$ base duale de E^*

$0 \neq f = x_1 e_1^* + x_2 e_2^* \in E^*$

$\operatorname{Ker} f = \langle x_2 e_1 - x_1 e_2 \rangle$

$\phi_E : \mathbb{R}(x_1 e_1^* + x_2 e_2^*) \longmapsto \mathbb{R}(x_2 e_1 - x_1 e_2)$

$\phi_B : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{ex } n = 2}$ $m_\alpha \in \mathbb{P}(E^*) \rightsquigarrow f \in E^*$

$\phi_E(m_\alpha) = \mathbb{P}(\operatorname{Ker} f)$ droite de $\mathbb{P}(E)$

* D_* droite de $\mathbb{P}(E^*)$

$\downarrow$

$\underbrace{F^*}_{\dim 2}$ ss-plan de $\underbrace{E^*}_{\dim 3}$ $\xrightarrow{\varphi_E}$ $F^{*\perp}$ droite de E

$\downarrow$

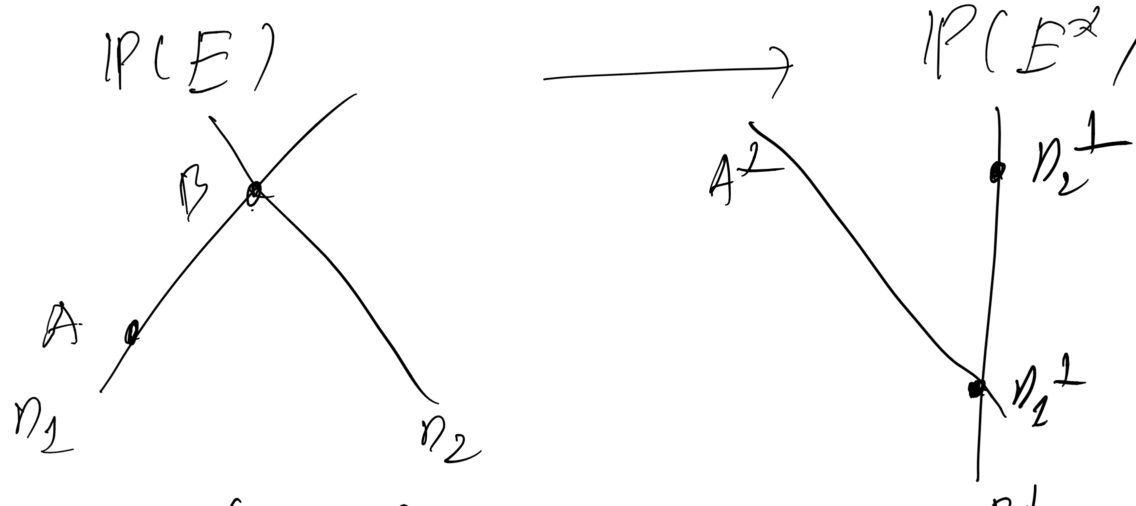
point de $\mathbb{P}(E)$

m_* pt de $\mathbb{P}(E^*) \longrightarrow$ droite de $\mathbb{P}(E) = m_*^\perp$

D_* droite de $\mathbb{P}(E^*) \longrightarrow$ point de $\mathbb{P}(E) = D_*^\perp$

$m_* \in D_* \rightsquigarrow D_*^\perp \in m_*^\perp$

<u>En utilisant $(E^*)^* = E$</u>



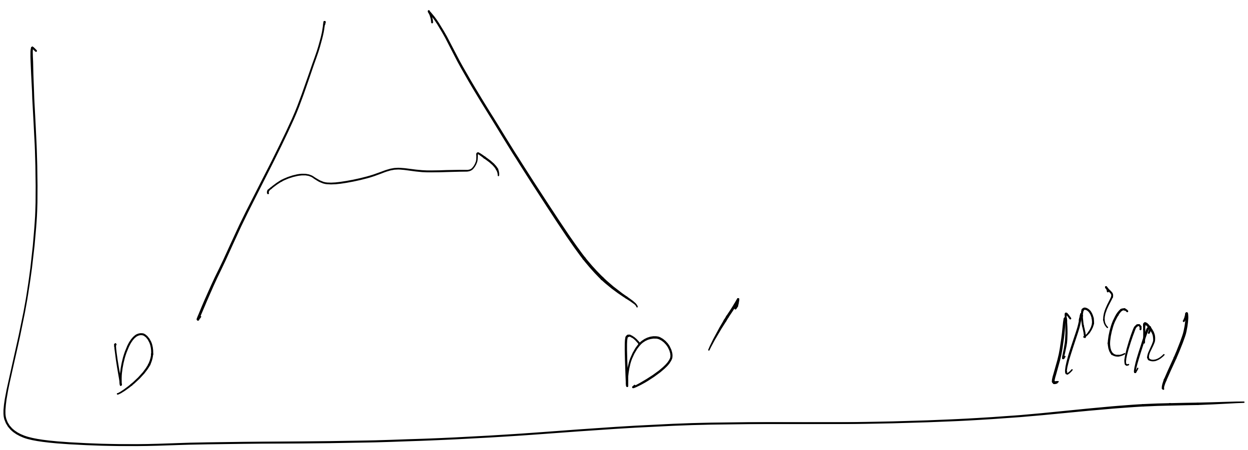
tout immergé dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

a pour idée sa forme duale

(On parle de <u>théorème corrélatif</u>)

<u>Ex d'homographies</u> $\boxed{n=2}$

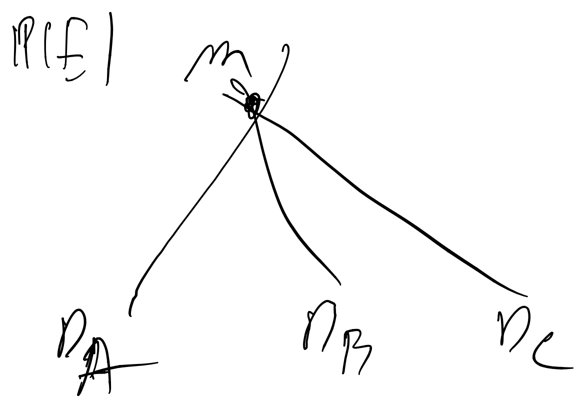
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \supset D$ et D'

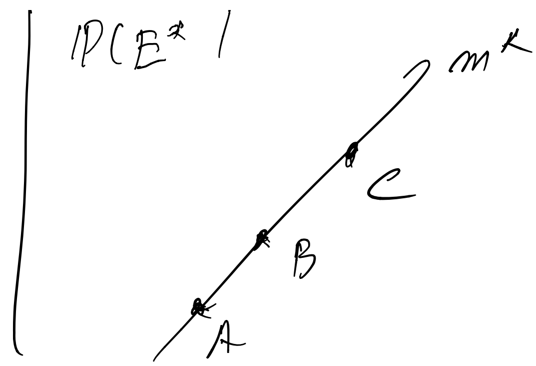


<u>Rappel</u> : $m \in \mathbb{P}(E) \rightsquigarrow m^\perp$ droite de $\mathbb{P}(E^*)$

ψ

$n^\perp$ droite passant par m $\longleftrightarrow$ n





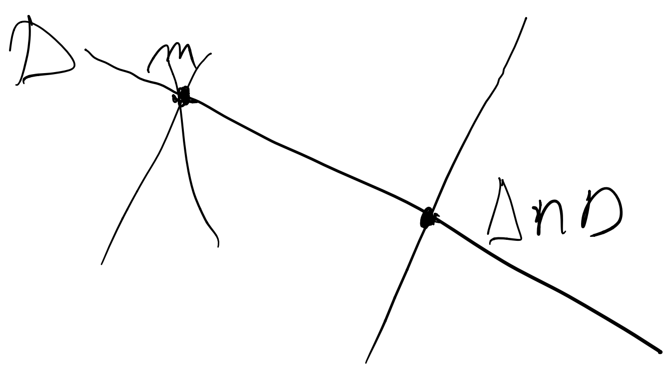
$m^* \underset{\text{bij}}{\longleftrightarrow} \{$ droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passant par m $\}$

appelé pinceau (ou faisceau) de droites

Déf : Incidence $\quad m \notin D$

$i : m^* \longleftrightarrow D$

(droite proj de $\mathbb{P}(E^*)$
$\updownarrow$
droite proj de $\mathbb{P}(E)$)



Prop : les incidences sont des homographies

dem : $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ base de E

$p(\vec{x}) = m$ $\quad$ $\boxed{p(\vec{y}) \text{ et } p(\vec{z}) \in D}$

$\rightsquigarrow (\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{z}^*)$ base duale $\quad$ $\boxed{\mathbb{P}(\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle)}$

$\boxed{m^* = \mathbb{P}(\langle \vec{y}^*, \vec{z}^* \rangle)}$

$\Delta \ni$ $\quad$ $f = \alpha \vec{y}^* + \beta \vec{z}^*$ $\quad \rightsquigarrow \mathbb{P}(\mathrm{Ker} f) = \Delta$

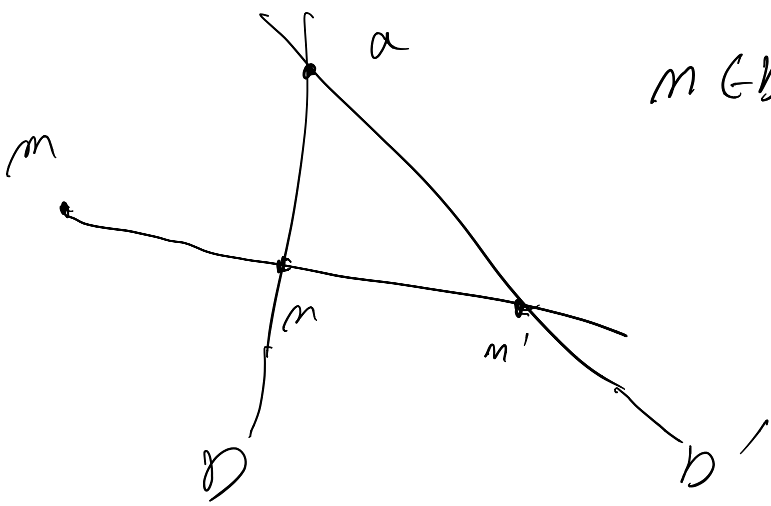
$\Delta \cap D$ $\quad$ $f(\lambda \vec{y} + \mu \vec{z}) = 0$

$\alpha \lambda + \beta \mu = 0$ $\quad$ $[\alpha : \beta] = [-\mu : \lambda]$

$\mathbb{P}(\alpha \vec{y}^* + \beta \vec{z}^*) \longmapsto \mathbb{P}(-\mu \vec{y} + \lambda \vec{z})$ $\quad$ (!)

c'est linéaire $\Rightarrow$ c'est une homographie

Déf : Perspective de centre m



$n \in D \mapsto n' \in D$

Lemme c'est une homographie $D \xrightarrow{p} D'$

dém : m^* :

- incidence : $D \to m^*$
  i_D : $n \mapsto (mn)$
- incidence : $m^* \to D'$
  $i_{D'}$: $\Delta \mapsto \Delta \cap D'$

$$p = \underbrace{i_{D'} \circ i_D}_{\text{homographies}}$$

$\Rightarrow p =$ homographie

$\square$

Prop : $D \cancel{et} D'$ 2 droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$h : D \to D'$ homographie

(i) $D \cap D' = \{a\}$ $h(a) = a$

alors h = perspective centrale

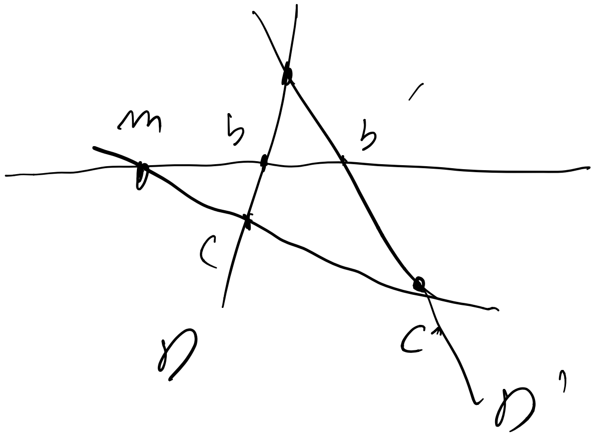
(ii) sinon ($h(a) \neq a$) alors h perspective axiale (= composée de 2 perspectives centrales)

dem :

(i) $a \in D$, b, c tq (a, b, c) repère de D

$$\downarrow h$$

a, b', c' $\Rightarrow$ $m = (bb') \cap (cc')$

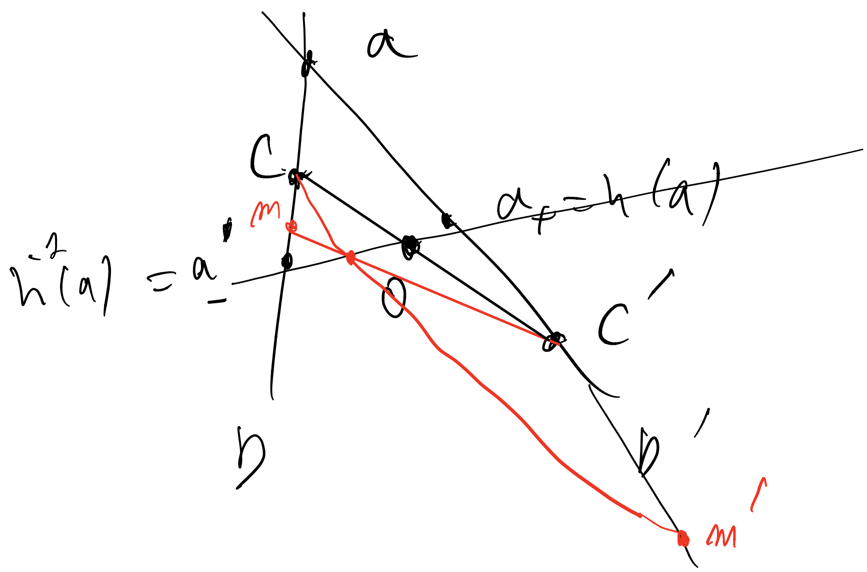


P_m = perspective de centre m

P_m : $a \longmapsto a'$
$b \longmapsto b'$
$c \longmapsto c'$

$\Rightarrow$ P_m et h coïncident sur un repère $\Rightarrow$ donc $\underline{P_m = h}$

1)



c t.q (a, a_-, c) repère de D

$c' = h(c)$

$P_{C'}$ = perspective de centre C' : $D \to (a_- a_+)$

P_{C} = ———— centre C : $(a_- a_+) \to D'$

$P_C \circ P_{C'}$:
$\|$
h

$a_- \xmapsto{P_{C'}} a_- \xmapsto{P_C} a$

$a \xmapsto{P_{C'}} a_+ \longmapsto a_+$

$C \xmapsto{P_{C'}} O \xmapsto{P_C} C'$

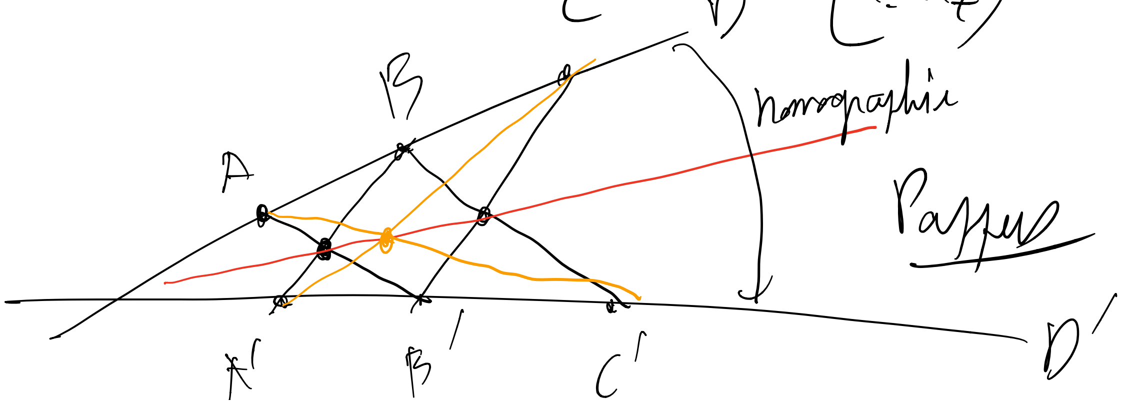
Rem : $\forall\, m, n \in D$

$\left[h \right]$ $\to$ $(mn')\cap(m'n)$

m', n'

$\cap$

$(a_- a_+)$



Pappus

Par dualité

incidence

Déf : répartition d'une D de m^2 sur n^*

$m \neq n$