

# Algèbre et géométries

Boyer Pascal

12 septembre 2012

Algèbre et géométries

Boyer Pascal

12 septembre 2012 [8:55] Fichier:cours chapitre:0

# Table des matières

<b>I. Géométrie Affine</b>	
1. Généralités . . . . .	2
1.1. Définition d'un espace affine . . . . .	2
1.2. Applications affines . . . . .	5
1.3. Le groupe affine . . . . .	7
1.4. Rapport de proportionnalité et théorème de Thalès . . . . .	8
1.5. Théorème de Ménélaüs . . . . .	11
2. Coordonnées barycentriques . . . . .	13
2.1. Barycentre d'une famille de points pondérés . . . . .	13
2.2. relativement à un repère affine . . . . .	16
2.3. Cas de la dimension 1 et 2 . . . . .	18
2.4. Calculs matriciels dans un repère affine . . . . .	20
3. Barycentres dans le plan affine . . . . .	22
3.1. Équations barycentriques de droites . . . . .	22
3.2. Autour du triangle pédal . . . . .	24
3.3. Théorème de Routh . . . . .	29
3.4. Théorème de Pappus . . . . .	31
<b>II. Géométrie affine euclidienne</b>	
1. Le groupe des isométries affines . . . . .	37
1.1. Le groupe orthogonal . . . . .	37
1.2. Isométries affines . . . . .	38
1.3. Groupe des similitudes affines . . . . .	39
2. Généralités . . . . .	40
2.1. Sphères . . . . .	40
2.2. Orthogonalité . . . . .	41
2.3. Angles d'un plan vectoriel orienté . . . . .	44
3. En dimension 2 . . . . .	49
3.1. Théorème de l'angle au centre . . . . .	49
3.2. Théorème de Pascal et de Brianchon : version euclidienne . . . . .	51
3.3. Axe radical et autres lignes de niveau . . . . .	56

3.4. Relations trigonométriques dans le triangle . . . . .	61
3.5. Triangles semblables . . . . .	66
4. Quelques classiques de la géométrie euclidienne . . . . .	68
4.1. Points de concours et leurs coordonnées barycentriques . . . . .	68
4.2. Cercle d'Euler et droites de Steiner . . . . .	79
4.3. Constructions du pentagone régulier . . . . .	84
<b>III. Géométrie projective</b>	
1. Généralités . . . . .	91
1.1. Espaces et sous-espaces projectifs . . . . .	91
1.2. Repères projectifs . . . . .	92
1.3. Groupe projectif . . . . .	94
1.4. Liaison affine-projectif . . . . .	95
1.5. Dualité . . . . .	97
1.6. Incidences, perspectives et réfractions du plan projectif . . . . .	99
1.7. Desargues, Pappus : preuves projectives . . . . .	102
2. Exemples . . . . .	109
2.1. Espaces projectifs d'hyperplans . . . . .	109
2.2. L'espace projectif des cercles : faisceaux de cercles . . . . .	109
2.3. L'espace projectif des coniques . . . . .	114
3. Géométrie projective de dimension 1 . . . . .	116
3.1. Birapport . . . . .	116
3.2. Homographies involutives . . . . .	120
3.3. Division harmonique . . . . .	123
3.4. Preuves projectives de Ménélaüs et Céva . . . . .	126
<b>IV. Étude transverse des coniques</b>	
1. Point de vue affine . . . . .	129
1.1. Equations barycentriques d'une conique . . . . .	129
1.2. Tangentes en un point et directions asymptotiques . . . . .	131
1.3. Diamètres . . . . .	132
1.4. Centre . . . . .	132
1.5. Régionnement lié à la conique . . . . .	133
1.6. Théorème de Carnot . . . . .	134
1.7. Lois de groupe . . . . .	136
2. Point de vue euclidien . . . . .	139
2.1. comme lignes de niveau . . . . .	139
2.2. Propriétés angulaires . . . . .	144
2.3. Ellipses inscrites dans un triangle . . . . .	153
2.4. Théorème de Habets . . . . .	158
3. Point de vue projectif . . . . .	161
3.1. Généralités . . . . .	161
3.2. Comme ligne de niveau . . . . .	162

*Table des matières*

v

3.3. Intersection d'une conique et d'une droite . . . . .	163
3.4. Classification projective . . . . .	165
3.5. Pôles et polaires . . . . .	167
3.6. La conique vue comme une droite projective . . . . .	171
3.7. Groupe d'une conique . . . . .	177
3.8. Retour sur les homographies d'une droite sur une autre . .	178
3.9. Le théorème de Newton . . . . .	181
3.10. Sur les coniques passant par 5 points . . . . .	183
3.11. Perspective et photographie . . . . .	187
<b>Bibliographie</b>	<b>191</b>
<b>Notations</b>	<b>193</b>

Algèbre et géométries

Boyer Pascal

12 septembre 2012 [8:55] Fichier:cours chapitre:0

# Avant-propos

Le thème de ce cours est de faire de la géométrie du point de vue de l'algèbre. Expliquons cette problématique dans le cas de la géométrie plane. Il y a essentiellement deux façons de parler de géométrie.

- La première, la plus ancienne, est celle d'Euclide corrigée par Hilbert, définie axiomatiquement ; les axiomes partent de la définition du plan comme un ensemble de points muni de parties remarquables, les droites, avec des axiomes d'incidence et d'ordre. Il faut ensuite quelque chose qui assure l'homogénéité du plan (cas d'égalité, existence de symétries, transitivité sur les drapeaux...). Ces axiomatiques jusque là sont aussi valables pour les géométries non euclidiennes, ce n'est que lorsqu'on introduit l'axiome des parallèles (le fameux postulat d'Euclide) qu'elles se séparent.

- La seconde est celle qui passe par l'algèbre linéaire sur le corps des réels (ou un autre). Elle permet de définir à la fois les espaces affines, euclidiens ou non, les espaces projectifs, la géométrie euclidienne et les autres.

Evidemment c'est cette deuxième approche que nous allons suivre, notamment parce qu'elle place les nombres au cœur et plus pragmatiquement parce que pour un public au fait de l'algèbre linéaire, elle est beaucoup plus simple à manipuler.

En 1872, après l'explosion des géométries survenue dans la première moitié du dix-neuvième siècle avec la création de la géométrie projective développée par Poncelet, Plücker et d'autres, des géométries non euclidiennes avec Bolyai et Lobatchevski, Felix Klein soutient sa thèse à Erlangen dont le principe unificateur est qu'une géométrie consiste pour l'essentiel en la donnée d'un ensemble  $X$  et d'un groupe  $G$  de transformations de  $X$ , autrement dit d'un groupe opérant sur  $X$ . Les éléments de  $G$  sont les transformations permises dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie. Il s'agit par exemple des isométries affines pour la géométrie euclidienne plane, des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent  $X$  est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble  $\mathcal{D}$  de parties remarquables (les droites, les cercles ....) et les transformations

de  $G$  conservent globalement  $\mathcal{D}$ . Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives...) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe. Par exemple le théorème

- de Pappus qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement est un théorème projectif;
- de Thalès qui utilise des parallèles est un résultat affine;
- de Pythagore qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien.

On peut dire en quelque sorte que chaque théorème appartient à une géométrie particulière dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et où il se démontre avec le plus de facilité. L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, frère jumeau de Pappus, illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord avec un cercle et se démontre dans le cadre euclidien en utilisant le théorème de l'angle inscrit. Cependant il s'énonce en toute généralité pour une conique et devient alors un théorème projectif; dans ce cadre il se prouve très facilement via l'utilisation d'un invariant purement projectif appelé le birapport. Moralement c'est une fois placé dans sa plus grande généralité, rendu à sa géométrie intrinsèque, que les ingrédients essentiels de sa preuve se dégagent.

Concernant toujours le théorème de Pascal, on peut aussi raisonner dans le sens inverse; c'est à dire appliquer une homographie pour transformer la conique en un cercle et le prouver dans le cadre de la géométrie euclidienne via le théorème de l'angle inscrit. Cela fait apparaître une technique très féconde dite *de changement de géométrie* : l'énoncé est considéré

- dans une géométrie pauvre, au sens où son groupe des transformations est « gros », de façon à se ramener à une situation plus simple (par exemple transformer un triangle quelconque en un triangle équilatéral, une conique en un cercle...);
- on considère alors cette nouvelle configuration dans une géométrie plus riche, i.e. avec un groupe de transformations plus petit et donc possédant plus d'invariants (longueurs, angles...).

Donnons un autre exemple très élémentaire de cette technique, le théorème à quatre points.

**Théorème** Soient  $A, B, C, D$  quatre points du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. On construit les six droites qui les joignent puis les trois points d'intersection de ces droites distincts de  $A, B, C, D$  que l'on note  $A' = (AD) \cap (BC)$ ,  $B' = (BD) \cap (CA)$  et  $C' = (CD) \cap (AB)$ . On construit alors  $I, J, K$  qui sont les intersections des côtés du triangle  $A'B'C'$  et  $ABC$  :  $I = (BC) \cap (B'C')$ ,  $J = (AC) \cap (A'C')$  et  $K = (AB) \cap (A'B')$ . Alors  $I, J, K$  sont alignés.

*Démonstration.* Il s'agit clairement d'un énoncé de géométrie projective et on applique une homographie de sorte que  $D$  est le centre de gravité du



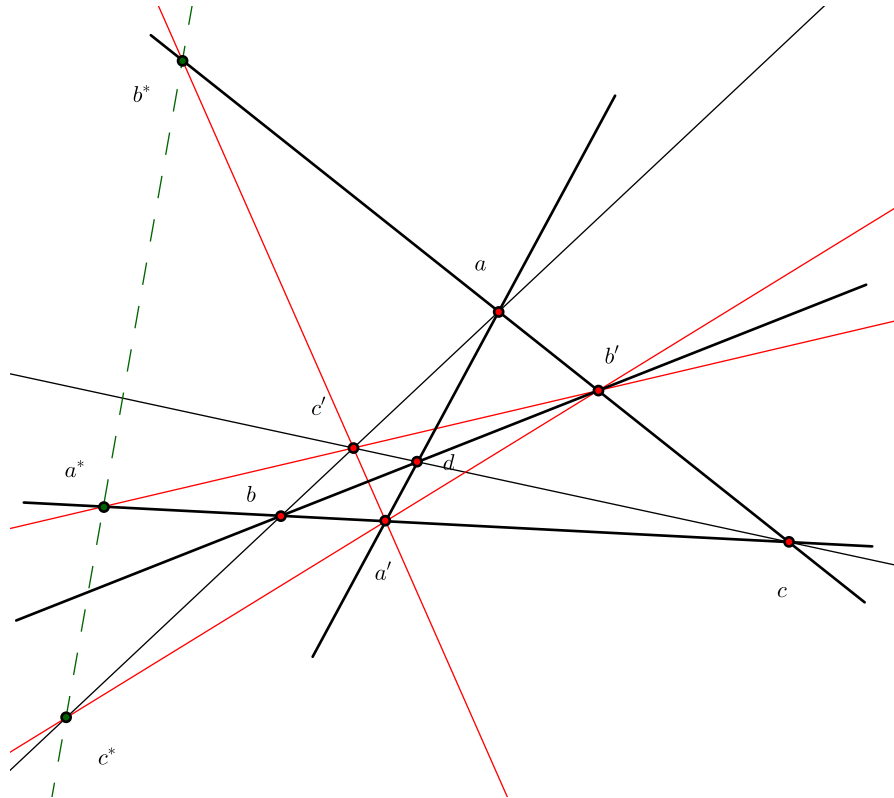


Figure 0.1

triangle  $ABC$ . Ainsi  $A', B', C'$  sont les milieux des côtés de sorte que d'après le théorème de Thalès,  $(A'B')$  et  $(AB)$  sont parallèles et se coupent en  $K$  sur la droite à l'infini qui contient de la même façon les points  $I$  et  $J$ , d'où le résultat.  $\square$

La mise en oeuvre de cette technique repose essentiellement sur une des idées développées par Klein : toutes les géométries peuvent être obtenues à partir de la géométrie projective et d'une donnée supplémentaire. Le cas le plus simple est celui de la géométrie affine que l'on récupère comme complémentaire d'une droite choisie arbitrairement et qualifiée de droite à l'infini. Quand on est dans le plan affine, la géométrie euclidienne s'obtient en se donnant une forme quadratique définie positive sur le plan vectoriel associé ou encore en se donnant deux points imaginaires à l'infini : les fameux points cycliques.

*Invariants d'une géométrie* : comme une géométrie au sens du programme

d'Erlangen est un groupe  $G$  opérant sur un ensemble, on s'intéresse à l'action de  $G$  sur certains ensembles construits à partir de  $X$  comme par exemple l'ensemble de ses points, de ses droites, de ses drapeaux ou de uplets de points, droites et drapeaux. Dans la problématique du changement de géométrie expliquée plus haut, le premier phénomène d'intérêt concerne la transitivité de telles actions : par exemple l'action du groupe affine en dimension 2 est transitive sur les triangles du plan affine. À l'opposé dans des géométries plus riches avec moins de transformations de sorte que les actions ne sont pas transitives, on essaie de paramétrer l'ensemble des orbites  $X/G$ . Rappelons brièvement de quoi il s'agit : deux points  $x, x' \in X$  sont dans la même orbite sous  $G$  et on écrit  $x \sim_G x'$ , s'il existe  $g \in G$  tel que  $x' = g.x$ . La stratégie habituelle pour décrire  $X/G$  est la suivante :

- repérer des *invariants* de  $X$  sous  $G$  (par exemple la distance entre deux points en géométrie euclidienne), autrement dit on construit une application  $\Phi : X \rightarrow Y$  avec pour  $Y$  un espace « numérique », par exemple du type  $\mathbb{R}^n$  de sorte que deux éléments de la même orbite ont la même image par  $\Phi$ .
- On veut que  $\Phi$  soit *un système complet d'invariants*, ce qui signifie qu'on a l'équivalence

$$x \sim_G x' \Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(x'),$$

autrement dit deux éléments sont dans la même orbite si et seulement si leurs invariants, repérés par  $\Phi$ , sont les mêmes.

- Il reste enfin à préciser l'image de  $\Phi$ , i.e. déterminer quels sont les invariants possibles.

Afin de déterminer à priori le nombre  $n$  d'invariants cherchés afin que  $\Phi$  soit surjectif, on regarde la dimension de  $X/G$  en tant que variété algébrique ; intuitivement la dimension d'un objet géométrique est le nombre de paramètres dont il dépend. En général la formule  $\dim X/G = \dim X - \dim G$  est correcte et permet de savoir par avance le nombre d'invariants recherchés. Ainsi dans le cas où  $X$  est l'ensemble des triangles du plan euclidien, qui est donc de dimension 6, et  $G$  le groupe des isométries, de dimension 3, on a  $\dim X/G = 3$  et on a donc besoin de trois paramètres pour décrire ce quotient qui vont par exemple être pris parmi les longueurs des côtés et les angles aux sommets selon les habituels cas d'isométries des triangles.

*Relations entre les invariants* : dans le cas où l'on construit un espace d'invariants  $Y$  de dimension  $> \dim X - \dim G$ , l'application de paramétrage  $\Phi$  ne peut être injective, autrement dit les invariants ne sont pas indépendants et il y a des relations entre eux. Ainsi en géométrie euclidienne les longueurs des côtés d'un triangle et ses angles définissent 6 paramètres liés entre eux par les relations :

- les trois formules d'Al-Kashi,

- les deux égalités de la loi des sinus
- et le fait que la somme des angles est égale à  $\pi$ .

Quand on a trop de relations, celles-ci sont aussi liées ; il y a donc des relations entre les relations. Le cœur de la *théorie des invariants* consiste à formuler tout théorème de géométrie en termes de relations entre des invariants et de donner une méthode systématique pour construire tous ses invariants et les relations entre eux. On pourrait ainsi dire que la théorie des invariants marque la mort de la géométrie « élémentaire », la réduisant à trouver parmi l'infinité des théorèmes qu'elle peut formuler à volonté, ceux dont l'énoncé géométrique serait suffisamment simple et élégant.

Dans ce cours nous n'aborderons pas la théorie des invariants proprement dite ; nous nous limiterons à certaines descriptions des quotients  $X/G$  dans le cadre de la géométrie affine jusqu'à la géométrie algébrique en passant par les géométries euclidienne, inversive, sphérique, elliptique et hyperbolique. Le lecteur trouvera certains énoncés classiques qui reviendront comme des fils rouges et dont on donnera des preuves distinctes selon qu'on les considère dans telle ou telle géométrie.

En ce qui concerne les notations,  $\mathbb{K}$  désignera un corps commutatif éventuellement fini mais que le lecteur pourra dans une première lecture supposer égal au corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels. En ce qui concerne les points, ils seront dans un premier temps notés en minuscules laissant les majuscules pour les droites ; ensuite quand nous aurons besoin de scalaires par exemple pour les distances ou les angles, nous utiliserons les majuscules pour les points et des lettres calligraphiés pour les droites ou cercles. Pour les prérequis, bien que nous nous appuyons sur l'algèbre linéaire, aucune expertise sur le sujet n'est nécessaire ; de même sur les groupes, pour l'essentiel il suffit de connaître le vocabulaire sur les actions de groupe ainsi que les premières notions sur le groupe linéaire et les groupes orthogonaux. Signalons enfin que la très grande majorité des quelques 300 figures de ce livre ont été réalisées à l'aide du logiciel *Geogebra* et dans une moindre mesure de *Geolabo*.

Algèbre et géométries

Boyer Pascal

12 septembre 2012 [8:55] Fichier:cours chapitre:0

# Chapitre I

## Géométrie Affine

La géométrie affine enseignée dès le collège nous servira de modèle pour la construction et l'étude d'une géométrie. Nous commencerons par définir l'espace puis son groupe des transformations et enfin les invariants de la géométrie. Le groupe affine étant « gros » sa géométrie ne produit que peu d'invariants : en dimension 1 nous retrouvons le coefficient de proportionnalité de 3 points que l'on note habituellement de manière abusive sous la forme  $\frac{AB}{AC}$  alors que ni  $\overline{AB}$  ni  $\overline{AC}$  n'ont de sens. En dimension supérieure, cet invariant se généralise via la notion de barycentre et de coordonnées barycentriques relativement à une base affine.

Nous développons ensuite le calcul barycentrique à travers tout d'abord les classiques théorèmes de Ceva, Ménélaüs, Pappus et Desargues.

Outre les triangles, nous étudierons tout au long de ce livre, les coniques et commencerons dans ce chapitre par en donner les propriétés affines comme les tangentes, directions asymptotiques, diamètres et centres et donnerons le premier résultat à la Ceva sur celles-ci : le théorème de Carnot.

Enfin nous conclurons ce chapitre sur la présentation axiomatique de la géométrie affine.

Dans ce chapitre comme dans tout ce livre,  $\mathbb{K}$  désignera un corps commutatif éventuellement fini mais que le lecteur pourra dans une première lecture supposer égal au corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels. On utilisera par ailleurs les conventions suivantes sur les notations :

- les lettres rondes comme  $\mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{D} \dots$  désignerons des espaces ou des sous-espaces affines ;
- les lettres capitales droites  $E, F, G, D \dots$  désignerons des espaces ou sous-espaces vectoriels ;

- les lettres minuscules  $a, b, c, d \dots$  désignerons des points de l'espace affine ;
- les lettres grecques  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  ainsi que  $x, y, z, t$  désignerons des scalaires de  $\mathbb{K}$  ;
- les vecteurs d'un espace vectoriel seront décorés d'une flèche,  $\vec{u}, \vec{v} \dots$ .

## 1. Généralités

### 1.1. Définition d'un espace affine

**1.1.1. Définition.** *Un espace affine  $\mathcal{E}$  est un ensemble muni d'une action libre et transitive d'un espace vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$ . La dimension de  $\mathcal{E}$  est celle de  $\vec{\mathcal{E}}$ .*

Traduisons concrètement les différents termes de cette définition synthétique :

- une action : cela signifie que l'on a un morphisme de groupe  $\phi$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  vers les permutations de  $\mathcal{E}$  qui à un vecteur  $\vec{u}$  associe la permutation  $\phi(\vec{u})$  de  $\mathcal{E}$ .

**1.1.2. Notation.** *Pour  $a \in \mathcal{E}$ , on note  $\phi(\vec{u})(a)$  sous la forme  $a + \vec{u}$ .*

Comme  $\phi$  est un morphisme de groupe on a

$$a + (\vec{u} + \vec{v}) = (a + \vec{u}) + \vec{v}$$

relation dite de Chasles ;

- libre :  $a + \vec{u} = a$  si et seulement si  $\vec{u}$  est le vecteur nul ;
- transitive : pour tout  $a, b \in \mathcal{E}$ , il existe  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$  tel que  $b = a + \vec{u}$ .

**1.1.3. Notation.** *Pour  $b = a + \vec{u}$ , on écrira aussi  $\vec{u} = b - a = \vec{ab}$ .*

*Remarque :* un espace affine n'a pas de point remarquable, en particulier pas d'origine. Un point  $a \in \mathcal{E}$  étant fixé, l'application

$$\Theta_a : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$$

qui à  $b$  associe le vecteur  $\vec{ab}$  est alors une bijection de sorte que l'on peut considérer l'espace affine  $\mathcal{E}$  pointé en  $a$  comme un espace vectoriel.

*Remarque :* réciproquement un espace vectoriel est un espace affine pointé ; ainsi pour  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^n$  est considéré comme un espace affine pointé de dimension  $n$ .

*Exemple* : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' = y + 1$  est un espace affine sous l'espace vectoriel de l'équation homogène  $y' = y$ .

**1.1.4. Notation.** On notera parfois  $(\mathcal{E}, E)$  pour désigner un espace affine  $\mathcal{E}$  de direction  $E$ .

**1.1.5. Théorème. (du parallélogramme)**

Soient  $a, b, c, d \in \mathcal{E}$  tels que  $\vec{ab} = \vec{cd}$  alors  $\vec{ac} = \vec{bd}$ .

*Démonstration.* Par hypothèse on a  $b - a = d - c$  et donc  $c - a = d - b$  d'où le résultat.  $\square$

**1.1.6. Définition.** Un sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  est un sous-espace affine s'il est vide ou s'il contient un point  $a$  tel que  $\vec{\mathcal{F}} := \Theta_a(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $\vec{\mathcal{E}}$  qui est appelé la direction de  $\mathcal{F}$ ; la dimension de  $\mathcal{F}$  est celle de  $\vec{\mathcal{F}}$ .

**1.1.7. Notation.** On notera parfois  $(\mathcal{F}, F)$  pour désigner un sous-espace affine  $\mathcal{F}$  de direction  $F$ .

*Remarque* : de l'égalité  $\mathcal{F} = a + \vec{\mathcal{F}}$ , on peut vérifier que  $\vec{\mathcal{F}}$  ne dépend pas du choix du point  $a$ . En effet pour un autre point  $b = a + \vec{u}$  avec  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$ , en posant  $\mathcal{F} = b + \vec{\mathcal{G}}$ , on a pour  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}$ ,  $b + \vec{v} = a + \vec{w}$  et donc  $\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$ . Comme c'est vrai quel que soit  $\vec{v}$ , on en déduit  $\vec{\mathcal{G}} \subset \vec{\mathcal{F}}$  et par symétrie  $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{F}}$ .

*Remarque* : étant donné un sous-espace vectoriel  $\vec{F}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  et un point  $a$  de  $\mathcal{E}$ , il existe un unique sous-espace affine dirigé par  $\vec{F}$  et contenant  $a$ , on le note  $a + \vec{F}$ .

*Remarque* : les sous-espaces affines de dimension 0 (resp. 1) sont les points (resp. les droites) de  $\mathcal{F}$ .

*Exemple* : Soient  $\vec{E}$  et  $\vec{F}$  deux espaces vectoriels et soit  $f : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  une application linéaire. Pour tout  $v \in \text{Im } f$ , l'image réciproque  $f^{-1}(v)$  est un sous-espace affine pour  $\text{Ker } f$ .

**1.1.8. Lemme.** Toute intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine éventuellement vide et sinon de direction l'intersection des directions des sous-espaces affines considérés.

*Démonstration.* Si l'intersection est vide, il n'y a rien à prouver. Sinon pour  $a, b \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ , le vecteur  $\vec{ab}$  appartient à tous les  $F_i$  et donc à leur

intersection. Réciproquement pour  $a \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  et  $\vec{u} \in \bigcap_{i \in I} F_i$ , le point  $a + \vec{u}$  appartient à tous les  $\mathcal{F}_i$  d'où le résultat.  $\square$

**1.1.9. Définition.** Soit  $S$  une partie de  $\mathcal{E}$ ; l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant  $S$  est le plus petit sous-espace affine contenant  $S$ , on le note  $\langle S \rangle$  et on l'appelle *le sous-espace affine engendré par  $S$* .

**1.1.10. Définition.** Un repère affine de  $\mathcal{E}$  est une suite  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de points de  $\mathcal{E}$  telle que  $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n})$  est une base de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

*Remarque :* un point  $a \in \mathcal{E}$  est uniquement déterminé par des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $a = a_0 + \alpha_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{a_0 a_n}$ ; on dit que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sont les coordonnées de  $a$  dans le repère  $(a_0, \dots, a_n)$ .

*Système d'équations cartésiennes d'un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^n$  :* soit  $\mathcal{E}$  un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^n$ , de sorte que  $\vec{\mathcal{E}}$  en tant que sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  de dimension  $k$  admet un système linéaire homogène de  $n - k$  équations cartésiennes :

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ p_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Ainsi pour  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un point de  $\mathcal{E}$ , un système d'équations cartésiennes de  $\mathcal{E}$  est

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) = p_1(a_1, \dots, a_n) \\ \dots \\ p_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = p_{n-k}(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

**1.1.11. Définition.** Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ ; on dit que

- $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  se coupent si  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est non vide;
- $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont supplémentaires si  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{G}}$ ;
- $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles et on note  $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ , si  $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{G}}$ ;
- $\mathcal{F}$  est faiblement parallèle à  $\mathcal{G}$  et on note  $\mathcal{F} \triangleleft \mathcal{G}$  si on a  $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{G}}$ .

**1.1.12. Proposition.** Soient  $(\mathcal{F}, F)$  et  $(\mathcal{G}, G)$  des sous-espaces affines de  $(\mathcal{E}, E)$ .

1.  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles si et seulement s'il existe  $\vec{u} \in E$  tel que  $\mathcal{G} = \mathcal{F} + \vec{u}$  et que  $H = \{\vec{u} \in E : \mathcal{G} = \mathcal{F} + \vec{u}\}$  est un sous-espace affine de direction  $F = G$ .
2.  $\mathcal{F}$  est faiblement parallèle à  $\mathcal{G}$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est parallèle à un sous-espace affine de  $\mathcal{G}$  et qu'alors  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  ou  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ .



*Démonstration.* 1) Soient  $p \in \mathcal{F}$  et  $q \in \mathcal{G}$  tels que  $\mathcal{F} = p + F$  et  $\mathcal{G} = q + G$ . Comme  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles, on a  $F = G$  et donc  $\mathcal{G} = p + \overrightarrow{pq} + F = \mathcal{F} + \overrightarrow{pq}$ . Par ailleurs pour  $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in H$ , on a  $p + F + \overrightarrow{u} = \mathcal{G} = p + F + \overrightarrow{v}$  et donc  $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \in F$ . Réciproquement pour  $\overrightarrow{u} \in H$  et  $\overrightarrow{f} \in F$ , on a  $p + F + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f} = p + F + \overrightarrow{u} = \mathcal{G}$  d'où le résultat.

2) Soit  $q \in \mathcal{G}$  alors comme  $\mathcal{F}$  est faiblement parallèle à  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{K} = q + F \subset \mathcal{G}$  est parallèle à  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**1.1.13. Corollaire.** Si  $\mathcal{F} \triangleleft \mathcal{G}$  alors soit ils sont disjoints, soit l'un est contenu dans l'autre.

*Démonstration.* S'ils ne sont pas disjoints avec  $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$  alors, pour  $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ , on a  $\mathcal{F} = a + \overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \mathcal{G} = a + \overrightarrow{\mathcal{G}}$ .  $\square$

*Remarque :* en particulier, on retrouve le **Postulat des parallèles** de la présentation axiomatique d'Euclide : par tout point  $a$  du plan affine, il existe une unique droite parallèle à une droite donnée et passant par  $a$ . Autrement dit notre présentation algébrique de la géométrie affine contient en son cœur le postulat des parallèles; pour un aperçu synthétique de la présentation axiomatique de la géométrie affine, on renvoie le lecteur au §??.

## 1.2. Applications affines

**1.2.1. Définition.** Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines; une application  $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est dite *affine* s'il existe une application linéaire  $\overrightarrow{\phi} : \overrightarrow{\mathcal{E}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}$  telle que pour tout  $m, n \in \mathcal{E}$ ,  $\phi(n) = \phi(m) + \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{mn})$ .

*Remarque :* pour  $o$  fixé et  $f$  une application linéaire, l'application qui à  $N \in \mathcal{E}$  associe  $\phi(n) = \phi(o) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{on})$  est affine. En effet pour  $m \in \mathcal{E}$  quelconque, on a  $\phi(n) = \phi(o) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{om} + \overrightarrow{mn}) = \phi(m) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{mn})$ . Ainsi pour définir une application affine, il suffit de connaître sa partie linéaire et l'image d'un point.

*Remarque :* l'image directe et réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine; en particulier toute application affine envoie trois points alignés sur trois points alignés.

Donnons quelques exemples d'applications affines :

- si  $\mathcal{E}$  est un produit  $\prod_{i \in I} \mathcal{E}_i$  d'espaces affines, les **projections**  $p_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i$  sont affines.
- **Les formes affines** : dans ce cas  $\mathcal{F}$  est de dimension 1 et on la note  $h$  de sorte que  $h^{-1}(\{x\})$ , pour  $x$  un scalaire, est une famille d'hyperplans affines parallèles.

- **Les translations** : pour  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$  et  $\vec{\phi} = \text{Id}$ , on a  $\overrightarrow{\phi(a)\phi(b)} = \overrightarrow{ab}$  de sorte que d'après la règle du parallélogramme,  $\overrightarrow{a\phi(a)} = \overrightarrow{b\phi(b)}$ , autrement dit il existe  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$  tel que pour tout  $m \in \mathcal{E}$ ,  $\phi(m) = m + \vec{u}$ . C'est une translation de vecteur  $\vec{u}$  que l'on note  $t_{\vec{u}}$ .
- **Les homothéties** : pour  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$  pointé en un point  $o$ , l'homothétie  $h(o, \lambda)$  de centre  $o$  et de rapport  $\lambda$  est l'application linéaire définie par  $\phi(m) = o + \lambda\overrightarrow{om}$ . On a en particulier  $\vec{\phi} = \lambda \text{Id}$
- **Les projections affines** : soit  $\mathcal{V}$  un sous-espace affine non vide de  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$  et  $W$  un supplémentaire de  $\vec{\mathcal{V}}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$ . Pour  $a \in \mathcal{V}$ , la projection affine sur  $\mathcal{V}$  parallèlement à  $W$  et fixant  $a$ , est l'application affine fixant  $a$  et de partie linéaire la projection sur  $\vec{\mathcal{V}}$  parallèlement à  $W$ .
- **Les symétries affines** : avec les notations ci-avant, la symétrie affine par rapport à  $\mathcal{V}$  parallèlement à  $W$  est définie comme l'application fixant  $\mathcal{V}$  et de partie linéaire la symétrie par rapport à  $\vec{\mathcal{V}}$  parallèlement à  $W$ .
- **Affinité** : soit  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine et  $\vec{\mathcal{D}}$  un supplémentaire de  $\vec{\mathcal{H}}$  dans  $E$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'affinité  $a_{\mathcal{H}, \vec{\mathcal{D}}, \lambda}$  est l'application fixant  $a \in \mathcal{H}$  et de partie linéaire  $\text{Id}_{\vec{\mathcal{H}}} \oplus \lambda \text{Id}_{\vec{\mathcal{D}}}$ .

*Remarque* : de même qu'une application linéaire est déterminée par l'image des vecteurs d'une base, une application affine est déterminée par l'image des points d'un repère affine.

**1.2.2. Proposition.** Soit  $(a_0, \dots, a_n)$  un repère affine de  $\mathcal{E}$  et soient  $b_0, \dots, b_n$  des points quelconques de  $\mathcal{F}$ . Il existe alors une unique application affine  $\phi$  telle que pour  $i = 0, \dots, n$ ,  $\phi(a_i) = b_i$ .

*Démonstration.* Comme  $(a_0, \dots, a_n)$  est un repère affine, les vecteurs  $\overrightarrow{a_0a_k}$  pour  $k = 1, \dots, n$ , forment une base de  $\vec{\mathcal{E}}$ . Soit alors  $f : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  défini par  $f(\overrightarrow{a_0a_k}) = \overrightarrow{b_0b_k}$  pour  $k = 1, \dots, n$ . On pose alors  $\phi(m) = b_0 + f(\overrightarrow{a_0m})$  de sorte que  $\phi$  est affine avec  $\vec{\phi} = f$  et  $\phi(a_k) = b_k$ .

En ce qui concerne l'unicité, si  $\phi$  et  $\psi$  étaient deux telles applications affines, alors  $\vec{\phi} = \vec{\psi}$  avec  $\phi(a_0) = \psi(a_0)$  et donc  $\phi = \psi$ .

□

*Remarque* : en particulier la seule transformation affine d'un espace de dimension  $n$  qui fixe  $n + 1$  points indépendants est l'identité.

**1.2.3. Corollaire.** En dimension 2, l'action du groupe affine sur les triangles non plats (resp. sur les parallélogrammes non plats) est transitive.

*Démonstration.* Un triangle non plat du plan affine en détermine une base et réciproquement ; le résultat découle alors de la proposition précédente.

En ce qui concerne les parallélogrammes, il suffit de remarquer qu'une application affine  $f$  conserve « les vecteurs », i.e. si  $\vec{ab} = \vec{cd}$  alors  $\vec{f(a)f(b)} = \vec{f(c)f(d)}$ .  $\square$

### 1.3. Le groupe affine

La composée de deux applications affines  $\phi$  et  $\psi$  est une application affine telle que  $\vec{\phi \circ \psi} = \vec{\phi} \circ \vec{\psi}$ . Dans le cas  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ ,  $\phi$  est bijective si et seulement si  $\vec{\phi}$  l'est auquel cas  $\phi^{-1}$  est affine avec  $\vec{\phi^{-1}} = \vec{\phi}^{-1}$ .

**1.3.1. Définition.** On note  $GA(\mathcal{E})$  l'ensemble des bijections affines de  $\mathcal{E}$ ; c'est un groupe dit *le groupe affine* de  $\mathcal{E}$ . Pour  $a \in \mathcal{E}$ ,  $GA_a(\mathcal{E}) \subset GA(\mathcal{E})$  désigne le sous-ensemble des bijections affines fixant le point  $a$ .

**1.3.2. Proposition.** *La suite exacte courte*

$$0 \rightarrow T(\mathcal{E}) \rightarrow GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(\vec{\mathcal{E}}) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

*Remarque :* en termes concrets cela signifie que l'application  $\phi \in GA(\mathcal{E}) \mapsto \vec{\phi} \in GL(\vec{\mathcal{E}})$  est surjective de noyau le sous-groupe des translations  $T(\mathcal{E})$  lequel est isomorphe à  $\vec{\mathcal{E}}$ .

*Démonstration.* La surjectivité est évidente puisque  $\phi$  défini par  $\phi(m) = \phi(o) + f(\vec{om})$  convient. En ce qui concerne le noyau on a déjà vu qu'il s'agissait des translations, d'où le résultat.  $\square$

*Remarque :* en tant que noyau  $T(\mathcal{E})$  est un sous-groupe distingué; un calcul direct donne  $\phi t_{\vec{a}} \phi^{-1} = t_{\vec{\phi}(\vec{a})}$ . Pour de plus amples précisions sur le groupe affine, on renvoie le lecteur à l'exercice ??.

**1.3.3. Proposition.** *L'ensemble  $HT(\mathcal{E})$  des homothéties de rapport non nul et des translations de  $\mathcal{E}$ , est un sous-groupe distingué de  $GA(\mathcal{E})$ . Il est formé des  $\phi \in GA(\mathcal{E})$  tels que  $\vec{\phi}$  est une homothétie vectorielle de rapport non nul, ou encore tels que pour toute droite  $D$ ,  $\phi(D)$  est une droite parallèle.*

*Démonstration.* L'ensemble  $HT(\mathcal{E})$  est l'image réciproque du sous-groupe distingué des homothéties vectorielles de rapport non nul, c'est donc un sous-groupe distingué. Par ailleurs on a vu que toute translation et homothétie transforme une droite en une droite parallèle. Réciproquement si  $\phi$

transforme toute droite en une droite parallèle, alors  $\vec{\phi}$  envoie tout vecteur sur un vecteur colinéaire; il est alors classique d'obtenir que  $\vec{\phi}$  est une homothétie.  $\square$

*Remarque* : pour  $a \in \mathcal{E}$ , le groupe  $GA_a(\mathcal{E})$  est isomorphe à  $GL(\vec{\mathcal{E}})$  et pour tout  $\phi \in GA(\mathcal{E})$ , on a  $\phi = t_{a\phi(a)} \circ \psi$  où  $\psi := t_{\phi(a)a} \circ \phi \in GA_a(\mathcal{E})$ . L'inconvénient de cette écriture est que  $t_{a\phi(a)}$  et  $\phi$  ne commutent pas sauf si  $\vec{a\phi(a)} \in \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id})$ ; ainsi il sera difficile de composer de telles écritures. Le théorème suivant fournit une solution partielle à ce problème.

#### 1.4. Rapport de proportionnalité et théorème de Thalès

Reprenons les notations de l'avant propos sur les systèmes complets d'invariants d'un groupe agissant sur un ensemble dans le cas où  $G$  est le groupe affine en dimension 1. Pour  $X$  l'ensemble des couples de points distincts, nous avons vu que l'action de  $G$  y était transitive. Nous allons à présent étudier le cas où  $X$  est l'ensemble des triplets de points distincts d'une droite affine.

**1.4.1. Notation.** *Le rapport de proportionnalité de 3 points  $a, b, c$  sur une droite  $\mathcal{D}$  est le scalaire  $\lambda$  tels que  $\vec{ac} = \lambda \vec{ab}$ . On l'exprime aussi sous forme d'un quotient de mesure algébrique  $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$ .*

*Remarque* : d'après ce que l'on vient de rappeler sur la transitivité de l'action de  $G$  sur les couples de points d'une droite affine, les mesures algébriques  $\overline{ab}$  et  $\overline{ac}$  ne sont pas des invariants affines.

**1.4.2. Proposition.** *Les orbites de l'action du groupe affine de dimension 1 sur l'ensemble des triplets de points distincts d'un espace affine de dimension 1, sont en bijection avec  $\mathbb{K} - \{0\}$  via l'application qui à un tel triplet  $(a, b, c)$  associe le coefficient de proportionnalité  $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$ .*

*Remarque* : autrement dit en termes d'action de groupe, le quotient  $X/G$  est paramétré par les scalaires distincts de 0 et 1; l'invariant affine associé est le rapport de proportionnalité.

*Démonstration.* Il s'agit donc de vérifier qu'étant donnés deux triplets  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  de points distincts, il existe une application affine, nécessairement unique, envoyant  $a, b, c$  respectivement sur  $a', b', c'$  si et seulement si  $\lambda = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$  est égal à  $\lambda' = \frac{\overline{a'c'}}{\overline{a'b'}}$ .

Vérifions tout d'abord que la condition est bien nécessaire : on a  $\vec{ac} = \lambda \vec{ab}$  de sorte que par application de  $\vec{\phi}$  on a  $\vec{a'c'} = \lambda \vec{a'b'}$  et donc  $\lambda = \lambda'$ .

Réciproquement si  $\lambda = \lambda'$ , on considère l'unique application affine  $\phi$  qui envoie  $a, b$  sur  $a', b'$ . On calcule  $\phi(c) = \phi(a) + \vec{\phi}(\vec{ac}) = a' + \lambda \vec{a'b'} = a' + \vec{a'b'} = b'$ .  $\square$

**1.4.3. Lemme.** Soient  $a, b, c$  trois points d'une droite  $\mathcal{D}$  et  $h$  une forme affine telle que  $h(a) = 0$ ; on a alors  $\frac{\overline{ac}}{ab} = \frac{h(c)}{h(b)}$ .

*Démonstration.* C'est immédiat en utilisant la linéarité de  $\vec{h}$ .  $\square$

**1.4.4. Théorème. (de Thalès)**

Soient  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$  trois hyperplans parallèles distincts et  $\mathcal{D}$  une droite non parallèle à ces hyperplans. Pour  $i = 1, 2, 3$ , on note  $a_i = \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_i$ . Le rapport de proportionnalité de  $a_1, a_2, a_3$  ne dépend pas de la droite  $\mathcal{D}$  considérée.

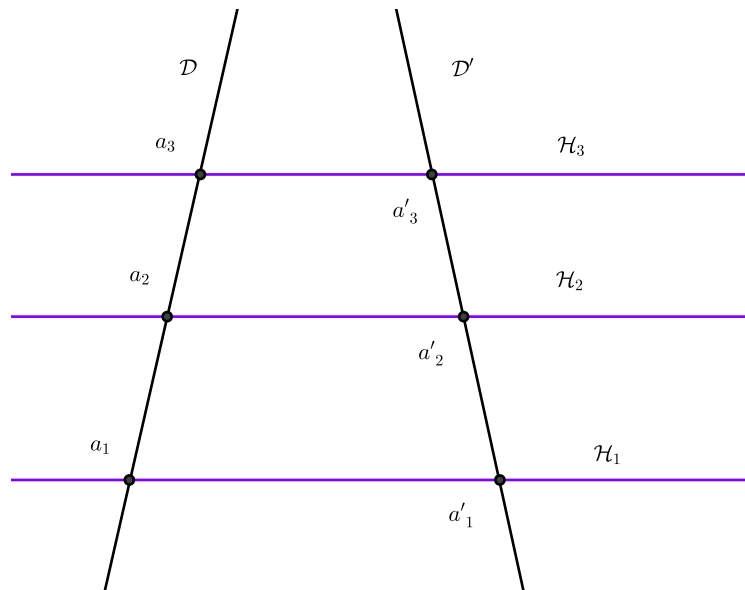


Figure 1.1  
Théorème de Thalès

*Démonstration.* 1 : soit  $d$  une équation affine de  $\mathcal{H}_1$  de sorte que  $\mathcal{H}_i = d^{-1}(x_i)$  pour  $x_i$  des scalaires. D'après le lemme précédent  $\frac{\overline{a_1 a_2}}{a_1 a_3} = \frac{d(a_2)}{d(a_3)}$ .

Si  $\mathcal{D}'$  est une autre droite alors en notant  $a'_i = \mathcal{D}' \cap \mathcal{H}_i$ , on a  $d(a_1) = d(a'_1) = 0$ ,  $d(a'_2) = d(a_2)$ ,  $d(a'_3) = d(a_3)$  et donc d'après le lemme précédent  $\frac{\overline{a'_1 a'_2}}{\overline{a'_1 a'_3}} = \frac{d(a_2)}{d(a_3)}$ , d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration. 2 :* considérons la projection affine  $p$  de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{D}'$  parallèlement à  $\mathcal{H}$  de sorte que  $p(a_i) = a'_i$  et donc  $\overrightarrow{a'_1 a'_3} = \overrightarrow{p}(a_1 a_3) = \overrightarrow{p}(\lambda \overrightarrow{a_1 a_2}) = \lambda \overrightarrow{a'_1 a'_2}$ , d'où le résultat.  $\square$

**1.4.5. Corollaire.** *Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites sécantes en  $a$ , et  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  deux droites parallèles coupant  $\mathcal{D}_i$  en  $a_i$  et  $a'_i$  distincts de  $a$ . On a alors*

$$\frac{\overline{aa_1}}{\overline{aa'_1}} = \frac{\overline{aa_2}}{\overline{aa'_2}} = \frac{\overline{a_1 a_2}}{\overline{a'_1 a'_2}}.$$

**1.4.6. Corollaire. (Théorème de Pappus affine)**

*Soient  $a, b, c$  trois points d'une droite  $\mathcal{D}$  et  $a', b', c'$  trois points d'une autre droite  $\mathcal{D}'$ . Si  $(ab')$  est parallèle à  $(ba')$  et si  $(bc')$  est parallèle à  $(cb')$  alors  $(ac')$  est parallèle à  $(ca')$ .*

*Démonstration.* Dans le cas où  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles, la translation de vecteur  $\overrightarrow{ab}$  (resp.  $\overrightarrow{bc}$ ) envoie  $b'$  sur  $a'$  (resp.  $c'$  sur  $b'$ ) de sorte que la composée envoie  $c'$  sur  $a'$  ainsi que  $a$  sur  $c$  d'où le résultat.

Si  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{o\}$ ; soit  $f$  (resp.  $g$ ), l'homothétie de centre  $o$  qui envoie  $a$  sur  $b$  (resp.  $b$  sur  $c$ ). On a  $f \circ g = g \circ f$  et comme  $f(b') = a'$  et  $g(c') = b'$ , on en déduit que  $f \circ g$  envoie  $c'$  sur  $a'$  et  $a$  sur  $c$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

**1.4.7. Corollaire. (Théorème de Desargues affine)**

*Soient  $abc$  et  $a'b'c'$  deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes ou parallèles.*

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de Pappus. Dans le cas où  $(aa')$  et  $(bb')$  sont parallèles, la translation de vecteur  $\overrightarrow{aa'}$  envoie  $b$  sur  $b'$  et la droite  $(ac)$  sur  $(a'c')$  et  $(bc)$  sur  $(b'c')$  et donc  $c$  sur  $c'$  de sorte que  $(cc')$  est parallèle à  $(aa')$ .

Dans le cas où  $(aa')$  et  $(bb')$  s'intersectent en  $o$ , l'homothétie de centre  $o$  qui envoie  $a$  sur  $a'$  envoie  $(ab)$  sur  $(a'b')$  et  $(ob)$  sur  $(ob')$  et donc  $b$  sur  $b'$ . De même elle envoie  $(ac)$  sur  $(a'c')$  et  $(bc)$  sur  $(b'c')$  et donc  $c$  sur  $c'$  de sorte que  $o$  appartient à  $(cc')$ .  $\square$

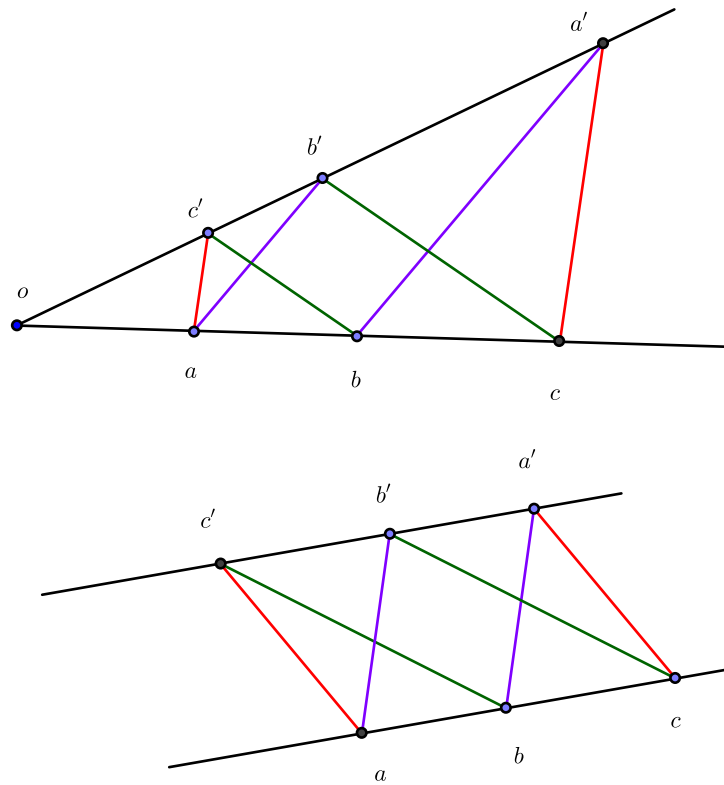


Figure 1.2  
Théorème de Pappus affine

### 1.5. Théorème de Ménélaüs

Nous donnerons deux preuves de ce résultat important.

#### 1.5.1. Théorème. (de Ménélaüs)

Soient  $a, b, c$  trois points non alignés et  $a', b', c'$  trois points, distincts de  $a, b, c$  situés respectivement sur les droites  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$ . Alors  $a', b', c'$  sont alignés si et seulement si on a :

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1.$$

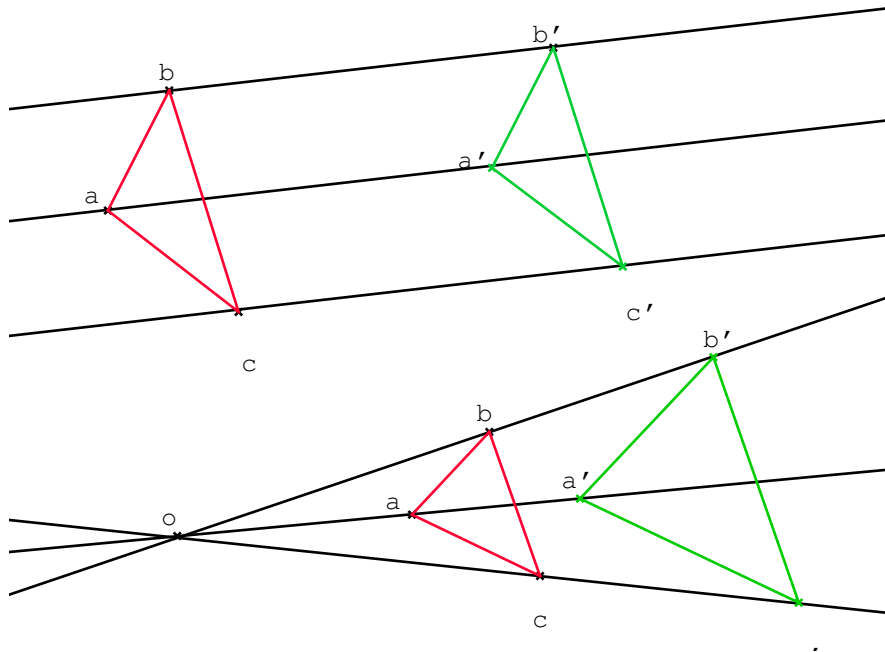


Figure 1.3  
*Théorème de Desargues affine*

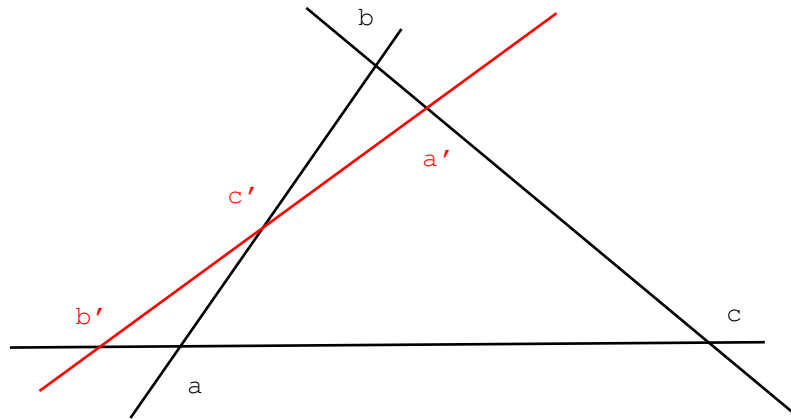


Figure 1.4  
*Ménélaüs*



*Démonstration. utilisant les formes affines*

Supposons que  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  sont alignés et soit  $d$  la forme affine à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $d^{-1}(\{0\}) = (a'b')$ . D'après le lemme I-1.4.3, on a

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = \frac{d(b)}{d(c)} \frac{d(c)}{d(a)} \frac{d(a)}{d(b)} = 1.$$

Réciproquement, soit  $\tilde{c}$  l'intersection de  $(a'b')$  avec  $(ab)$ ; d'après ce qui précède on a donc  $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \frac{\overline{\tilde{c}a}}{\overline{\tilde{c}b}} = 1$ ; de sorte que  $\frac{\overline{\tilde{c}a}}{\overline{\tilde{c}b}} = \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$  et donc  $\tilde{c} = c'$ , d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration. utilisant les homothéties*

Considérons les homothéties  $h(a', \frac{a'b}{a'c})$ ,  $h(b', \frac{b'c}{b'a})$  et  $h(c', \frac{c'a}{c'b})$  qui envoient respectivement  $b$  sur  $c$ ,  $c$  sur  $a$  et  $a$  sur  $c$  de sorte que leur composé est une homothétie de rapport 1 qui laisse stable le point  $c$ , c'est donc l'identité. On en déduit alors que les centres sont alignés d'où le résultat.  $\square$

## 2. Coordonnées barycentriques

### 2.1. Barycentre d'une famille de points pondérés

**2.1.1. Définition.** On appelle *point pondéré* un couple  $(a, \alpha)$  où  $a \in \mathcal{E}$  est un point et  $\alpha \in \mathbb{K}$  un scalaire appelé la masse de  $a$ .

**2.1.2. Proposition.** Si  $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$  est un système de points pondérés tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ , alors il existe un unique point  $g$  vérifiant l'égalité  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \vec{0}$ . Pour tout point  $o$ , on a alors  $(\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{og} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{oa_i}$ .

*Démonstration.* On définit  $g$  via la formule  $(\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{og} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{oa_i}$ . La relation de Chasles donne alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{go} + \overrightarrow{oa_i}) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{go} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{oa_i} = \vec{0}.$$

$\square$

*Remarque :* la fonction qui à  $m$  associe  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{ma_i} = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{m\hat{g}}$  est surjective si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ . Dans le cas contraire, elle est constante.

**2.1.3. Définition.** Le point  $g$  de la proposition précédente est appelé *le barycentre* du système; dans le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux, on parle alors d'*isobarycentre*.

*Remarque* : le barycentre n'est pas modifié si on multiplie tous les coefficients  $\alpha_i$  par un même scalaire. Habituellement il est agréable de fixer la somme  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ .

*Remarque* : dans le cas d'une famille infinie de points pondérés, indexée par un ensemble  $I$ , on considère des barycentres ne faisant intervenir qu'un nombre fini de points ; on dit que la pondération est à support fini.

**2.1.4. Proposition.** Soient  $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$  et  $(b_1, \beta_1), \dots, (b_m, \beta_m)$  deux systèmes de points pondérés avec  $\sum_i \alpha_i$  et  $\sum_j \beta_j$  non nul. Alors le barycentre  $g$  du système

$$(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n), (b_1, \beta_1), \dots, (b_m, \beta_m)$$

est le barycentre du système  $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n), (b, \sum_{j=1}^m \beta_j)$  où  $b$  est le barycentre du système  $(b_1, \beta_1), \dots, (b_m, \beta_m)$ .

*Remarque* : c'est ce que l'on appelle l'associativité du barycentre.

*Démonstration.* Il suffit de revenir à la définition

$$\left(\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j\right) \vec{og} = \sum_i \alpha_i \vec{oa_i} + \sum_j \beta_j \vec{ob_j} = \sum_i \alpha_i \vec{oa_i} + \left(\sum_j \beta_j\right) \vec{ob}.$$

□

**2.1.5. Notation.** Soient  $a_0, \dots, a_k$  des points ; pour  $\alpha_0, \dots, \alpha_k$  des scalaires de somme non nulle, on écrira

$$\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i\right)g = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$$

où  $g$  désigne le barycentre du système  $(a_0, \alpha_0), \dots, (a_k, \alpha_k)$ , que l'on écrira aussi parfois sous la forme

$$\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i\right)g - \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i = 0.$$

*Remarque* : on notera bien que l'écriture  $a + b = 0$  n'a pas de sens alors que  $2g - a - b = 0$  signifie que  $g$  est l'isobarycentre de  $a$  et  $b$ .

**2.1.6. Théorème. (de Desargues)**

Soient  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  trois droites distinctes concourantes en un point  $o$ . On suppose que  $(ab)$  et  $(a'b')$  (resp.  $(ac)$  et  $(a'c')$ , resp.  $(bc)$  et  $(b'c')$ ) se rencontrent en un point  $r$  (resp.  $q$ , resp.  $p$ ). Alors les points  $p, q, r$  sont alignés.

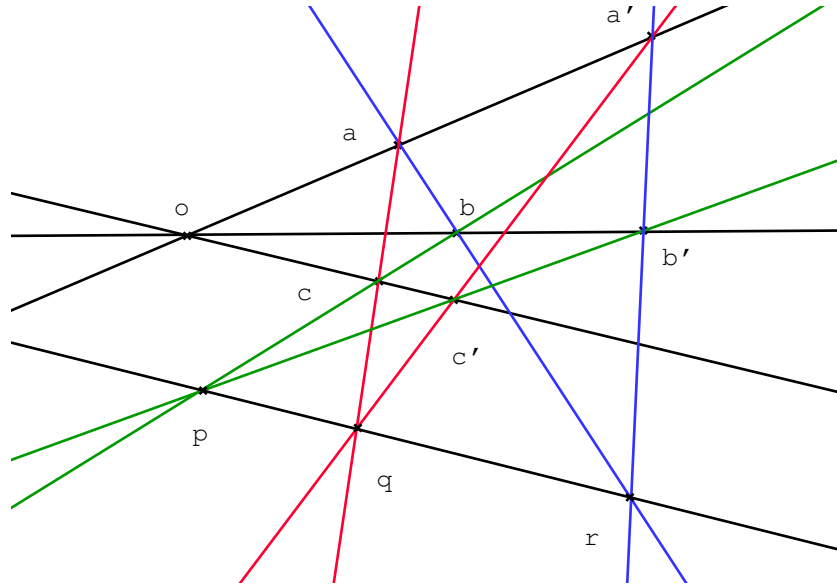


Figure 2.1  
Théorème de Desargues

*Démonstration.* Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$  tels que

$$o = \alpha a + (1 - \alpha)a' = \beta b + (1 - \beta)b' = \gamma c + (1 - \gamma)c'.$$

Le point  $r'$  tel que  $(\alpha - \beta)r' = \alpha a - \beta b = (\alpha - 1)a' + (1 - \beta)b'$  appartient aux droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  de sorte que  $r' = r$ . De même on a

$$(\alpha - \gamma)q = \alpha a - \gamma c \text{ et } (\beta - \gamma)p = \beta b - \gamma c.$$

On a alors  $(\alpha - \beta)r + (\gamma - \alpha)q + (\beta - \gamma)p = 0$  et donc les points  $p, q, r$  sont alignés.  $\square$

**2.1.7. Proposition.** *L'espace affine engendré par un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des barycentres des points de  $S$  avec toute les pondérations possibles à support fini et de somme égale à 1.*

*Démonstration.* Si  $g$  le barycentre des points pondérés  $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$  pour  $a_1, \dots, a_n \in S$  alors  $g = a_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{a_1 a_i}$  appartient bien à  $\langle S \rangle$ . Réciproquement si  $g \in \langle S \rangle$  alors on écrit  $g = a_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{a_0 a_i}$  et alors  $g$  est le barycentre de  $(a_0, 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i), (a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$ .  $\square$

**2.1.8. Définition.** Pour  $a \neq b$  deux points d'un espace affine  $\mathcal{E}$ , l'espace affine engendré par  $\{a, b\}$  est la droite  $(ab)$ .

Citons enfin le résultat suivant sur les applications affines.

**2.1.9. Proposition.** *Pour  $f$  est une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $f$  est affine ;
- $f$  conserve le barycentre, i.e. si  $g$  est le barycentre de  $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$ , alors  $f(g)$  est le barycentre de  $(f(a_1), \alpha_1), \dots, (f(a_n), \alpha_n)$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est affine alors

$$\sum_i \alpha_i \overrightarrow{f(g)f(a_i)} = \sum_i \alpha_i \overrightarrow{f(ga_i)} = \overrightarrow{f}(\sum_i \alpha_i g a_i) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}.$$

Réciproquement, fixons  $a \in \mathcal{E}$  et posons  $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(a + \overrightarrow{u}) - f(a)$ , de sorte que  $\overrightarrow{f}$  est uniquement déterminée sur  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ . Pour  $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , le point  $a + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$  est le barycentre de  $(a, 1 - \lambda - \mu)$ ,  $(a + \overrightarrow{u}, \lambda)$ ,  $(a + \overrightarrow{v}, \mu)$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) &= f(a + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) - f(a) \\ &= (1 - \lambda - \mu) \overrightarrow{f(a)f(a)} + \lambda \overrightarrow{f(a)f(a + \overrightarrow{u})} + \mu \overrightarrow{f(a)f(a + \overrightarrow{v})} \\ &= \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \mu \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

□

## 2.2. relativement à un repère affine

**2.2.1. Définition.** Des points  $a_0, \dots, a_k$  sont dits *affinement indépendants* si la dimension de l'espace qu'ils engendrent est égale à  $k$ .

**2.2.2. Proposition.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) les points  $a_0, \dots, a_k$  sont affinement indépendants ;
- (ii) pour tout  $i = 0, \dots, k$ , le point  $a_i$  n'appartient pas à  $\langle \{a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_k\} \rangle$  (où la notation  $\widehat{a_i}$  signifie qu'on omet le point  $a_i$ ) ;
- (iii) les points  $a_0, \dots, a_{k-1}$  sont affinement indépendants et  $a_k$  n'est pas le barycentre des points  $\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$  ;
- (iv) pour tout  $i = 0, \dots, k$ , les vecteurs  $\overrightarrow{a_0 a_i}, \dots, \overrightarrow{a_{i-1} a_i}, \overrightarrow{a_{i+1} a_i}, \dots, \overrightarrow{a_k a_i}$  sont linéairement indépendants ;
- (v) il existe  $i \in \{0, \dots, k\}$  tel que les vecteurs  $\overrightarrow{a_0 a_i}, \dots, \overrightarrow{a_{i-1} a_i}, \overrightarrow{a_{i+1} a_i}, \dots, \overrightarrow{a_k a_i}$  sont linéairement indépendants.

*Démonstration.* Montrons (i)  $\Rightarrow$  (ii). On raisonne par l'absurde ; si  $a_i$  est barycentre des autres alors l'espace affine engendré par  $\{a_0, \dots, a_k\}$  est

égale à celui engendré par  $\{a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k\}$  et il est donc de dimension inférieure ou égale à  $k - 1$  ce qui contredit (i).

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : par hypothèse  $\langle \{a_0, \dots, a_{k-1}\} \rangle$  est de dimension  $k - 1$  et d'après (iii),  $\langle \{a_0, \dots, a_k\} \rangle$  le contient strictement de sorte qu'il est de dimension  $k$  d'où (i).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : on raisonne par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$  c'est évident, passons alors de  $k - 1$  à  $k$ . Pour  $i > 0$ , le point  $a_i$  n'appartient pas à  $\langle \{a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k\} \rangle$ ; par hypothèse de récurrence les points  $a_1, \dots, a_k$  sont donc affinement indépendants et l'implication précédente permet de conclure.

(i)  $\Rightarrow$  (iv) : il suffit d'utiliser  $\langle \{a_0, \dots, a_k\} \rangle = a_i + \text{Vect}\{\overrightarrow{a_i a_j}\}$ . L'implication (v)  $\Rightarrow$  (i) découle directement de cette même formule.

Les propriétés (iv) ou (v) montrent que si les points  $a_0, \dots, a_k$  sont affinement indépendants, il en est de même de toute sous-familles de points; combiné avec (i)  $\Rightarrow$  (ii) cela achève de montrer (i)  $\Rightarrow$  (iii).

□

**2.2.3. Définition.** Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de dimension  $k$ . Un repère affine de  $\mathcal{F}$  consiste en la donnée d'une suite de  $k + 1$  points  $a_0, \dots, a_k$  affinement indépendants de  $\mathcal{F}$ .

**2.2.4. Définition.** Soient  $a_0, \dots, a_n$  un repère affine de  $\mathcal{E}$ . Alors tout point  $m$  de  $\mathcal{E}$  s'écrit comme barycentre des points  $a_i$  affectés de masses  $\lambda_i$ ; en outre si  $\mu_0, \dots, \mu_n$  sont des réels de somme non nulle tels que  $m$  est le barycentre des points  $a_i$  affectés de masses  $\mu_i$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $(\mu_0, \dots, \mu_n) = \lambda(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ . **Les coordonnées barycentriques homogènes** de  $M$  sur le repère  $(a_0, \dots, a_n)$  est alors la classe d'un tel  $n + 1$ -uplet

$$(\mu_0 : \dots : \mu_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

où  $\sim$  désigne la relation d'équivalence de proportionnalité.

*Remarque :* si on fixe  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$  alors le  $n + 1$ -uplet  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  est défini de manière unique; on parle alors de **coordonnées barycentriques absolues**.

*Remarque :* on renvoie à la définition III-1.1.1 pour de plus amples détails sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

**2.2.5. Proposition.** Soit  $(a_0, \dots, a_n)$  un repère affine de  $\mathcal{E}$  et soit  $m$  un point de  $\mathcal{E}$  dont on note  $x_0, \dots, x_n$  ses coordonnées barycentrique absolues dans ce repère. On a alors

$$x_0 = \frac{\det(\overrightarrow{ma_1}, \dots, \overrightarrow{ma_n})}{\det(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})}$$

et pour  $i = 1, \dots, n$

$$x_i = \frac{\det(\overrightarrow{ma_1}, \dots, \overrightarrow{ma_{i-1}}, \overrightarrow{a_0m}, \overrightarrow{ma_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{ma_n})}{\det(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})}.$$

*Remarque :* on peut interpréter ces coefficients comme des rapports d'hy-pervolumes ou encore d'aires en dimension 2 ; cf. le lemme du chevron donné au corollaire I-2.3.5.

*Démonstration.* En développant  $\det(\overrightarrow{ma_0} + \overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{ma_0} + \overrightarrow{a_0a_n})$ , on obtient  $\sum_{i=0}^n x_i = 1$ . Ainsi en posant  $\vec{u} = \sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{ma_i}$ , il suffit de montrer que  $\vec{u}$  est le vecteur nul. On calcule  $\alpha_n = \det(\vec{u}, \overrightarrow{ma_1}, \dots, \overrightarrow{ma_{n-1}})$ . Par multi-linéarité, on obtient

$$\det(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})\alpha_n = x_0 \det(\overrightarrow{ma_0}, \dots, \overrightarrow{ma_{n-1}}) + x_n \det(\overrightarrow{ma_n}, \overrightarrow{ma_0}, \dots, \overrightarrow{ma_{n-1}}) = 0.$$

Posons  $b = m + \vec{u} = \sum_{i=0}^n y_i a_i$  de sorte que  $b$  appartient au sous-affine engendré par  $\{m, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ . Par symétrie du problème  $b$  appartient à tout sous-espace affine  $\langle m, a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n \rangle$ , où  $0 \leq i < j \leq n$ . Montrons alors par récurrence descendante sur  $k$  que  $b$  appartient au sous-espace affine  $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$ . On vient de prouver le résultat pour  $k = n - 1$  montrons alors le passage de  $k + 1$  à  $k$ . Comme  $\langle m, a_0, \dots, a_k \rangle$  est de dimension inférieure ou égale à  $k + 1$  et que  $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$  est de dimension  $n$ , il existe  $k < r \leq n$  tel que  $a_r \notin \langle m, a_0, \dots, a_k \rangle$ . Par symétrie du problème l'hypothèse de récurrence au rang  $k + 1$ , montre que  $b \in \langle m, a_0, \dots, a_{k-1}, a_r \rangle$  et donc  $b$  appartient à l'intersection  $X$  de  $\langle m, a_0, \dots, a_k \rangle$  et  $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1}, a_r \rangle$  laquelle intersection est strictement contenu dans  $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1}, a_r \rangle$  et contient  $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$  de sorte que  $X = \langle m, a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$ .

Au final, on obtient  $b \in \langle m \rangle$  et donc  $\vec{u} = \vec{0}$  d'où le résultat. □

### 2.3. Cas de la dimension 1 et 2

En dimension 1 la proposition I-2.2.5 devient.

**2.3.1. Corollaire.** Soient  $a, b, m$  trois points alignés ;  $m$  est alors le barycentre des points pondérés  $(a, \frac{mb}{ab})$  et  $(b, \frac{ma}{ba})$ .

*Remarque :* en géométrie euclidienne on formulera ce barycentre sous la forme  $(a, \overline{mb})$  et  $(b, \overline{am})$ .

**2.3.2. Définition.** L'isobarycentre de deux points  $a$  et  $b$  s'appelle le milieu de  $a, b$ .

**2.3.3. Proposition.** Dans un parallélogramme  $abcd$  les diagonales se coupent en leur milieu qui est l'isobarycentre de  $a, b, c, d$ .

*Démonstration.* Notons  $o$  le milieu de  $a, c$  ; l'égalité  $\overrightarrow{oa} = -\overrightarrow{oc}$  s'écrit

$$\overrightarrow{ob} + \overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{od} - \overrightarrow{dc}$$

soit comme  $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{dc}$ ,  $\overrightarrow{ob} + \overrightarrow{od} = \overrightarrow{0}$ , i.e.  $o$  est le milieu de  $c, d$ . Par associativité du barycentre, l'isobarycentre de  $a, b, c, d$  est l'isobarycentre des milieux de  $a, c$  et de  $b, d$  soit  $o$ .  $\square$

*Remarque :* on peut aussi utiliser les écritures barycentriques :  $b - a = c - d$  que l'on écrit sous la forme  $\frac{a + c}{2} = \frac{b + d}{2}$ .

**2.3.4. Proposition.** Dans un triangle  $abc$ , on note  $a', b', c'$  les milieux respectifs de  $[bc]$ ,  $[ac]$  et  $[ab]$ . Les médianes  $[aa']$ ,  $[bb']$  et  $[cc']$  s'intersectent en leur tiers en l'isobarycentre  $g$  de  $a, b, c$ .

*Démonstration.* Par associativité du barycentre  $a$  est le barycentre de  $(a, 1)$  et  $(a', 2)$  et donc  $g$  est un point de la médiane tel que  $\overrightarrow{ga} + 2\overrightarrow{ga'} = \overrightarrow{0}$ . On procède de même pour les autres médianes.  $\square$

En dimension 2, la proposition I-2.2.5 s'appelle le lemme du chevron.

**2.3.5. Corollaire. (Lemme du chevron)**

Soit  $abc$  un triangle et  $m$  un point du plan distinct de  $a$  ; on suppose que la droite  $(am)$  coupe  $(bc)$  en  $a'$ . On a alors

$$\frac{\mathcal{A}(amb)}{\mathcal{A}(cma)} = -\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}}$$

où  $\mathcal{A}(amb) = \det(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb})$  et  $\mathcal{A}(cma) = \det(\overrightarrow{mc}, \overrightarrow{ma})$  s'interprètent en géométrie euclidienne respectivement comme les aires algébriques des triangles  $amb$  et  $cma$ .

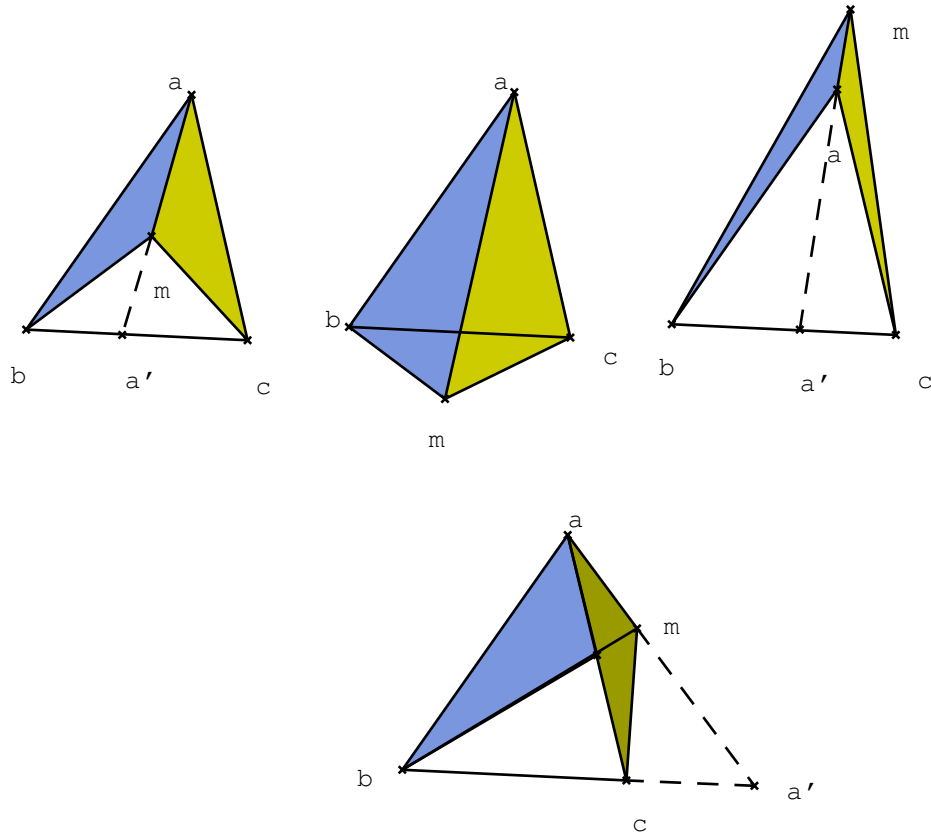


Figure 2.2  
*Lemme du chevron*

*Démonstration.* Rappelons que si  $(x : y : z)$  sont les coordonnées barycentriques homogènes de  $m$  dans le repère  $(a, b, c)$  alors  $(y : z)$  sont celles de  $a'$  dans le repère  $(b, c)$  de la droite  $(bc)$  et donc  $\frac{y}{z} = -\frac{a'b}{a'c}$ . Le résultat découle alors de la proposition précédente.  $\square$

#### 2.4. Calculs matriciels dans un repère affine

Comme une application linéaire est donnée dans une base par une matrice, nous allons en donner la version affine. Soit donc un repère affine  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  d'un espace affine; on y repère un point  $m$  par ses coordonnées barycentriques absolues  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  avec donc  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ .



**2.4.1. Lemme.** *Le point  $m$  de coordonnées barycentriques absolues  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est repéré dans le repère  $(a_0, \overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})$  par ses coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que  $\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{a_0a_i}$  selon la relation*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Le résultat découle directement de égalités  $\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{a_0a_i}$  et  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ .  $\square$

**2.4.2. Proposition.** *Soit  $f$  une application affine d'un espace affine dans lui-même, de partie linéaire  $\vec{f}$ . Supposons donné un repère affine  $(a_0, \dots, a_n)$  et soit  $A$  la matrice de  $\vec{f}$  dans la base  $(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})$ . Les coordonnées barycentriques absolues  $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$  de l'image  $m' = f(m)$  d'un point  $m$  dont les coordonnées barycentriques absolues sont  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  sont données par la relation matricielle*

$$\begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = S^{-1}MS \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ y'_1 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y'_n & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

où  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{a_0f(a_0)} = \sum_{i=1}^n y'_i \overrightarrow{a_0a_i}$ .

*Démonstration.* D'après le lemme précédent on a  $\begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 + y'_1 \\ \vdots \\ x'_n + y'_n \end{pmatrix}$ .

Or on a  $\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 + y'_1 \\ \vdots \\ x'_n + y'_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  d'où le résultat.  $\square$

*Remarque :* on notera que le polynôme caractéristique de la matrice associée à  $f$  est égal à celui de sa partie linéaire multiplié par  $(X - 1)$ ; en particulier

pour les traces, celle associée à  $f$  est égale à celle de sa partie linéaire plus 1.

*Exemple* : soit  $(a, b, c)$  un repère du plan affine. Pour  $p$  un point de coordonnées barycentriques absolues  $(a, b, c)$ , on considère la symétrie affine  $s_a$  d'axe  $(bc)$  et de direction  $(ap)$ . Sa matrice dans le repère  $(a, b, c)$  est de

la forme  $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 \\ w & 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\frac{u+1}{2} = 0$  puisque le milieu de  $a$  et  $s_a(a)$

appartient à  $(bc)$ . Par ailleurs comme les points  $a, p, s_a(a)$  sont alignés, on a

$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & b & v \\ 0 & c & w \end{pmatrix}$  et donc  $(v, w) = \lambda(b, c)$  de sorte que comme  $-1+v+w = 1$ ,

on obtient

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2b}{b+c} & 1 & 0 \\ \frac{2c}{b+c} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Barycentres dans le plan affine

Un triangle  $abc$  du plan affine est dit *non dégénéré* s'il définit un repère affine.

#### 3.1. Équations barycentriques de droites

**3.1.1. Lemme.** *Soient trois points  $p_1, p_2, p_3$  de coordonnées barycentriques homogènes respectives  $(x_i : y_i : z_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Alors  $p_1, p_2, p_3$  sont alignés si et seulement si le déterminant*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

*est nul.*

*Démonstration.* Le déterminant est nul si et seulement si ses colonnes  $C_1, C_2, C_3$  sont liées ce qui est équivalent à  $\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \lambda_3 C_3$  liées pour tout  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non nuls. Ainsi on peut supposer que les coordonnées barycentriques considérées sont absolues. Étant donnée une relation de dépendance linéaire  $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0$  en faisant la somme des coordonnées on obtient  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  et pour  $\alpha_1 \neq 0$ , on vérifie que  $p_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} p_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_1} p_3$ ,

i.e.  $p_1$  est un barycentre de  $p_2$  et  $p_3$ . En effet on calcule

$$\begin{aligned} \alpha_2 \overrightarrow{p_1 p_2} + \alpha_3 \overrightarrow{p_1 p_3} &= \alpha_2 (x_2 \overrightarrow{p_1 a} + y_2 \overrightarrow{p_1 b} + z_2 \overrightarrow{p_1 c}) + \alpha_3 (x_3 \overrightarrow{p_1 a} + y_3 \overrightarrow{p_1 b} + z_3 \overrightarrow{p_1 c}) \\ &= (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \overrightarrow{p_1 a} + (\alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) \overrightarrow{p_1 b} + (\alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3) \overrightarrow{p_1 c} \\ &= -\alpha_1 x_1 \overrightarrow{p_1 a} - \alpha_1 y_1 \overrightarrow{p_1 b} - \alpha_1 z_1 \overrightarrow{p_1 c} = \vec{0}. \end{aligned}$$

□

*Remarque :* une égalité  $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3$  avec  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  sur les coordonnées barycentriques homogènes de trois points  $p_1, p_2, p_3$  se traduit par l'égalité  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$  au sens de la notation I-2.1.5.

*Remarque :* soient  $m_1$  et  $m_2$  deux points distincts de coordonnées barycentriques homogènes respectives  $(\alpha_i : \beta_i : \gamma_i)$  pour  $i = 1, 2$ . Un point  $m$  de coordonnées barycentriques homogènes  $(\alpha : \beta : \gamma)$  appartient alors à la droite  $(m_1 m_2)$  si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

ce que l'on peut considérer, en développant selon la dernière colonne, comme une forme affine  $d(\alpha, \beta, \gamma) = 0$  où

$$d(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \beta + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma = 0.$$

**3.1.2. Proposition.** Soit  $D$  une droite d'équation barycentrique  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ ; toute droite parallèle à  $D$  est d'équation

$$(a + \lambda)\alpha + (b + \lambda)\beta + (c + \lambda)\gamma = 0$$

pour un unique  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

*Démonstration.* Notons tout d'abord que si  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$  est tel que

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ (a + \lambda)\alpha + (b + \lambda)\beta + (c + \lambda)\gamma = 0 \end{cases}$$

pour  $\lambda \neq 0$  alors  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  de sorte que les deux droites données par ces équations barycentriques sont parallèles.

Réciproquement si  $D'$  est une droite parallèle à  $D$  passant par un point  $M$  de coordonnées barycentriques  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  alors pour  $\lambda = \frac{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}$  la droite d'équation  $(a + \lambda)\alpha + (b + \lambda)\beta + (c + \lambda)\gamma = 0$  passe par ce point et, d'après ce qui précède, est parallèle à  $D$ . □

**3.1.3. Corollaire.** Deux droites d'équations  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$  et  $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$  sont parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**3.1.4. Corollaire.** La droite parallèle à  $(bc)$  et passant par  $a$ , dans le repère  $abc$ , a pour équation barycentrique  $\beta + \gamma = 0$ .

*Démonstration.* On écrit que la droite cherchée passe par les points  $a$  et  $a + \overrightarrow{bc} = a + c - b$ , soit

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

soit  $\beta + \gamma = 0$ . □

**3.1.5. Proposition.** Soient trois droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  deux à deux distinctes et d'équations respectives  $a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma = 0$ . Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) la matrice  $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$  est de déterminant nul;

(ii) les droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  sont concourantes ou parallèles.

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : soit  $(x, y, z)$  est un vecteur non nul du noyau de  $M$  de sorte qu'en considérant les formes affines, on a  $xd_1 + yd_2 + zd_3 = 0$ . Si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  se rencontrent en un point  $a$ , en injectant  $a$  dans la relation précédente, on obtient  $d_3(a) = 0$  et donc  $\mathcal{D}_3$  passe par  $a$ . Si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne se rencontrent pas, d'après le cas précédent  $\mathcal{D}_3$  ne rencontre pas  $\mathcal{D}_1$  et les trois droites sont donc parallèles.

Réciproquement si les trois droites sont concourantes en  $a = (x, y, z)$  alors  $(x, y, z)M$  est le vecteur nul et la matrice  $M$  n'est pas inversible. Si les trois droites sont parallèles alors les trois formes affines sont de la forme  $d_1$ ,  $d_2 = d_1 + a(\alpha + \beta + \gamma)$  et  $d_3 = d_1 + b(\alpha + \beta + \gamma)$  et sont donc liées  $(a - b)d_1 + bd_2 - ad_3 = 0$  et la matrice  $M$  n'est pas inversible. □

## 3.2. Autour du triangle pédal

**3.2.1. Lemme.** Soit  $abc$  un triangle non dégénéré et  $b'$ ,  $c'$  respectivement sur les droites  $(ac)$  et  $(ab)$  de coordonnées barycentriques homogènes  $(x' : 0 : z')$  et  $(x : y : 0)$ . La droite  $(b'c')$  est parallèle à  $(bc)$  si et seulement si  $x'y =$

$xz'$  et sinon leur point d'intersection  $i$  a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : x'y : -xz')$ .

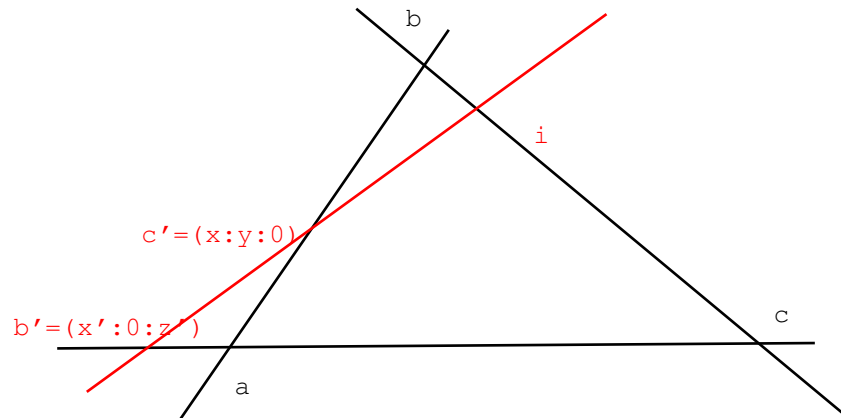


Figure 3.1  
Thalès barycentrique

*Démonstration.* De l'égalité  $x\vec{c'a} + y\vec{c'b} = \vec{0}$ , on en déduit que  $\frac{\overline{c'a}}{c'b} = -y/x$ .

De même  $\frac{\overline{b'a}}{b'c} = -z'/x'$  de sorte que d'après le théorème de Thalès,  $(b'c')$  est parallèle à  $(bc)$  si et seulement si  $x'y = xz'$ .

Dans le cas contraire, le point d'intersection  $i$  de  $(bc)$  et  $(b'c')$  a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : \alpha : \beta)$  tel que d'après le lemme I-3.1.1 en utilisant que  $i, b', c'$  sont alignés

$$\begin{vmatrix} 0 & x' & x \\ \alpha & 0 & y \\ \beta & z' & 0 \end{vmatrix} = \alpha xz' + \beta x'y = 0,$$

ce qui donne le résultat. □

*Remarque :* si on prend  $x = x'$  alors la condition de parallélisme devient  $y = z'$  et dans le cas contraire,  $i$  a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : y : -z)$ .

**3.2.2. Définition.** Une droite issue de  $a$  (resp.  $b, c$ ) est appelée *une cévienne* issue de  $a$  (resp.  $b, c$ ). Pour un point  $p$  n'appartenant pas aux côtés

du triangle  $abc$ , les droites issues de  $p$  et passant les sommets du triangle  $abc$  sont appelées *les céviennes de  $p$* .

**3.2.3. Notation.** Soit  $p$  un point n'appartenant pas aux côtés du triangle  $abc$ ; on note  $a_p, b_p, c_p$  les intersections des céviennes de  $p$  avec respectivement  $(bc)$ ,  $(ac)$  et  $(ab)$ .

**3.2.4. Lemme.** Soit  $(x : y : z)$  des coordonnées barycentriques homogènes de  $p$  dans le repère affine  $a, b, c$ . Alors  $(0 : y : z)$ ,  $(x : 0 : z)$  et  $(x : y : 0)$  sont respectivement des coordonnées barycentriques homogènes de  $a_p, b_p$  et  $c_p$ .

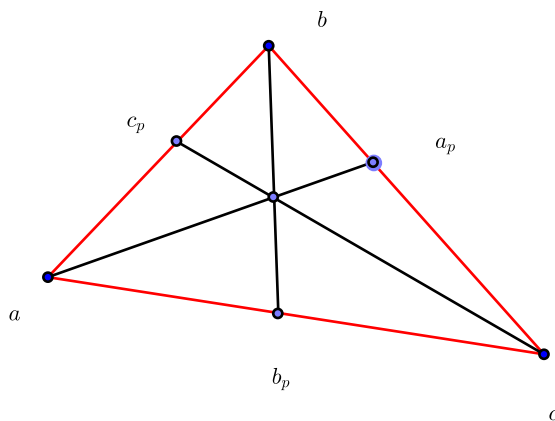


Figure 3.2  
Céviennes

*Démonstration.* Notons  $a'$  de coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : y : z)$ ;  $a'$  appartient à  $(bc)$ ; par ailleurs comme

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ y & y & 0 \\ z & z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y \\ z & z \end{vmatrix} = 0$$

d'après le lemme I-3.1.1, on en déduit que  $a, a'$  et  $p$  sont alignés et donc que  $a' = a_p$ . Les cas de  $b_p$  et  $c_p$  sont symétriques.  $\square$

**3.2.5. Définition.** Les points  $a_p, b_p, c_p$  sont appelés *les traces de  $p$  sur le triangle  $abc$* . Le triangle  $a_p b_p c_p$  est appelé *le triangle pédal associé à  $p$* .

Le théorème de Desargues appliqué au triangle  $abc$  et au triangle pédal  $a_p b_p c_p$  fournit la proposition suivante.

**3.2.6. Proposition.** *Soient  $abc$  un triangle et  $(a_p b_p c_p)$  le triangle pédal associé à un point  $p$ . On suppose que les intersections  $(ab) \cap (a_p b_p)$ ,  $(ac) \cap (a_p c_p)$  et  $(bc) \cap (b_p c_p)$  existent. Alors ces trois points d'intersection sont alignés.*

**3.2.7. Définition.** La droite de la proposition précédente associée à  $p$  s'appelle la *droite pédale* de  $p$  dans le triangle  $abc$ .

Nous allons à présent donner une preuve barycentrique du théorème des quatre points énoncé en introduction.

**3.2.8. Proposition. (Théorème des quatre points)**

*Soient  $a, b, c, d$  quatre points du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. On construit les six droites qui les joignent puis les trois points d'intersection de ces droites distincts de  $a, b, c, d$  que l'on note  $a' = (ad) \cap (bc)$ ,  $b' = (bd) \cap (ca)$  et  $c' = (cd) \cap (ab)$ . On construit alors  $a^*, b^*, c^*$  qui sont les intersection des côtés du triangle  $a'b'c'$  et  $abc$  :  $a^* = (bc) \cap (b'c')$ ,  $b^* = (ac) \cap (a'c')$  et  $c^* = (ab) \cap (a'b')$ . Alors  $a^*, b^*, c^*$  sont alignés.*

*Démonstration.* On note  $(x : y : z)$  des coordonnées barycentriques homogènes de  $d$  dans le repère affine  $a, b, c$ . D'après le lemme précédent les coordonnées barycentriques homogènes de  $a', b', c'$  sont respectivement  $(0 : y : z)$ ,  $(x : 0 : z)$  et  $(x : y : 0)$ .

Le point  $c^*$  qui appartient à la droite  $(bc)$  a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : \alpha : \beta)$  tel que d'après le lemme I-3.1.1,

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x \\ \alpha & 0 & y \\ \beta & z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne  $(0 : \alpha : \beta) = (0 : y : -z)$ . Par symétrique, on obtient pour  $a^*$  et  $b^*$  des coordonnées barycentriques homogènes  $(x : -y : 0)$  et  $(-x : 0 : z)$ . On vérifie alors aisément que

$$\begin{vmatrix} 0 & -x & x \\ y & 0 & -y \\ -z & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

de sorte que d'après le lemme I-3.1.1, les points  $a^*, b^*, c^*$  sont alignés.  $\square$

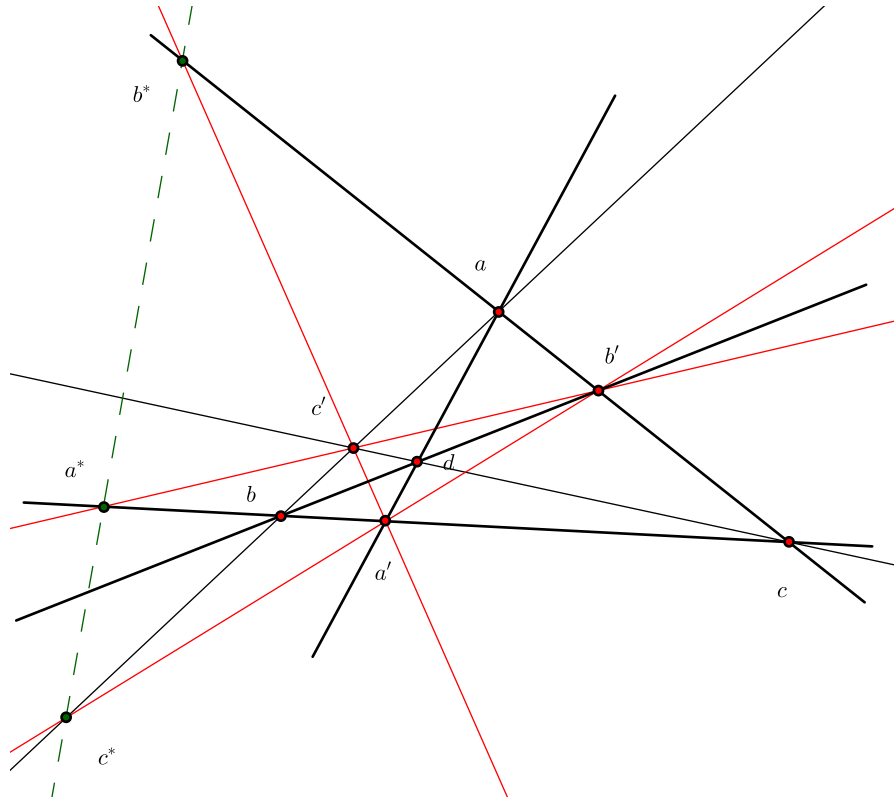


Figure 3.3  
 Théorème des quatre points

*Remarque :* le lecteur notera que le théorème dit des quatre droites de la proposition I-3.2.8 est une formulation du théorème de Desargues.

**3.2.9. Théorème. (de Ceva)**

Soit  $a', b', c'$  des points sur les côtés d'un triangle  $abc$  de coordonnées barycentriques dans le repère affine  $(a, b, c)$ ,  $a'(0, \alpha, 1)$ ,  $b'(1, 0, \beta)$  et  $c'(\gamma, 1, 0)$ . Les droites  $aa'$ ,  $bb'$  et  $cc'$  sont concourantes ou parallèles si et seulement si  $\alpha\beta\gamma = 1$ .

*Démonstration.* On a  $\alpha = -\frac{\overline{a'c}}{\overline{a'b}}$ ,  $\beta = -\frac{\overline{b'a}}{\overline{b'c}}$ , et  $\gamma = -\frac{\overline{c'b}}{\overline{c'a}}$ . Dans le repère affine  $(a, b, c)$  on note  $(x_a, x_b, x_c)$  les coordonnées d'un point ; une équation de la droite  $(aa')$  (resp.  $(bb')$ , resp.  $(cc')$ ) est  $x_b - \alpha x_c = 0$  (resp.  $x_c - \beta x_a$ , resp.  $x_a - \gamma x_b$ ) de sorte que les droites sont concourantes ou parallèles si



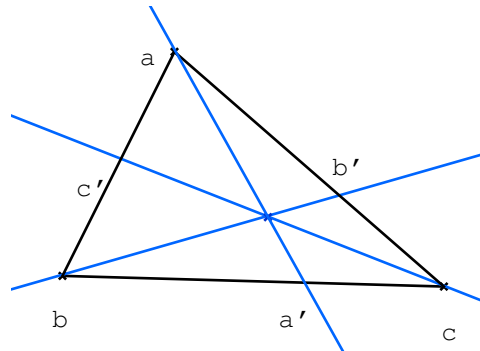


Figure 3.4  
Théorème de Ceva

et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\beta & 1 \\ 1 & 0 & -\gamma \\ -\alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - \alpha\beta\gamma = 0.$$

□

*Exemple :* les médianes sont concourantes ; en effet on a alors  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .

*Remarque :* une formulation équivalente consiste à dire que  $a', b', c'$  ont respectivement des coordonnées barycentriques homogènes de la forme  $(0 : y : z)$ ,  $(x : 0 : z)$  et  $(x : y : 0)$ .

On renvoie au paragraphe II-4.1 pour des coordonnées barycentriques des points remarquables d'un triangle euclidien.

### 3.3. Théorème de Routh

Commençons par la généralisation suivante du lemme I-3.1.1.

**3.3.1. Lemme.** Soit  $m_1, m_2, m_3$  trois plans du plan affine de coordonnées barycentriques absolues respectives dans le repère  $a, b, c$ ,  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  avec  $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

est égal au quotient des aires des triangles  $m_1 m_2 m_3$  par celle de  $abc$ .

*Démonstration.* Le double de l'aire du triangle  $m_1m_2m_3$  est égal à

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

où  $m_i$  est de coordonnées  $(x_i, y_i)$  dans un repère orthonormé quelconque. De l'égalité  $\alpha_i \overrightarrow{m_i a} + \beta_i \overrightarrow{m_i b} + \gamma_i \overrightarrow{m_i c} = \vec{0}$ , on obtient  $x_i = \alpha_i x_a + \beta_i x_b + \gamma_i x_c$  et  $y_i = \alpha_i y_a + \beta_i y_b + \gamma_i y_c$  de sorte que

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le résultat.  $\square$

### 3.3.2. Théorème. (de Routh)

Soient  $a', b', c'$  des points des côtés  $bc, ac$  et  $ab$  de coordonnées barycentriques homogènes respectives  $(0 : 1 : \lambda)$ ,  $(\mu : 0 : 1)$  et  $(1 : \nu : 0)$ . Les droites  $aa', bb'$  et  $cc'$  déterminent un triangle dont l'aire est égale à

$$\frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\mu + \mu\nu + 1)(\nu + \lambda\nu + 1)(\lambda + \lambda\mu + 1)}.$$

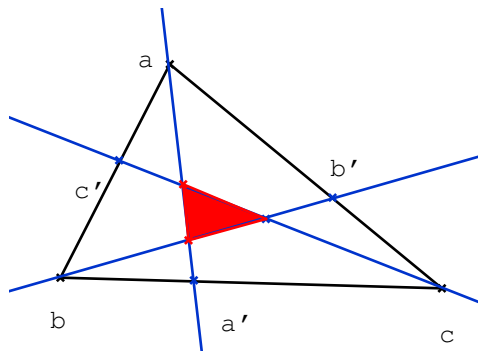


Figure 3.5  
Théorème de Routh

*Démonstration.* Un point  $m$  de coordonnées barycentriques homogènes  $(u, v, w)$  dans le repère  $(a, b, c)$  appartient à la droite  $(aa')$  (resp.  $(bb')$ , resp.  $(cc')$ ) si et seulement si  $\lambda v = w$  (resp.  $\mu w = u$ , resp.  $\nu u = v$ ). Ainsi le point d'intersection  $(aa') \cap (bb')$  (resp.  $(bb') \cap (cc')$ , resp.  $(cc') \cap (aa')$ ) a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(\lambda\mu, 1, \lambda)$  (resp.  $(\mu, \mu\nu, 1)$ , resp.  $(1, \nu, \lambda\nu)$ ). Ainsi

l'aire en question est

$$\frac{1}{(\mu + \mu\nu + 1)(\nu + \lambda\nu + 1)(\lambda + \lambda\mu + 1)} \begin{vmatrix} \lambda\mu & \mu & 1 \\ 1 & \mu\nu & \nu \\ \lambda & 1 & \lambda\nu \end{vmatrix}$$

ce qui donne le résultat.  $\square$

*Remarque :* on obtient en particulier une autre preuve du théorème de Ceva, l'aire du triangle est nulle, i.e. les trois points sont confondus, si et seulement si  $\lambda\mu\nu = 1$ .

*Application :* si  $A', B', C'$  sont au tiers, i.e.  $\lambda = \mu = \nu = 2$ , alors l'aire du triangle découpé est le septième de celui de  $ABC$ , cf. la figure I-3.6. Le lecteur pourra consulter l'exercice ?? pour une preuve par changement de géométrie de ce cas particulier.

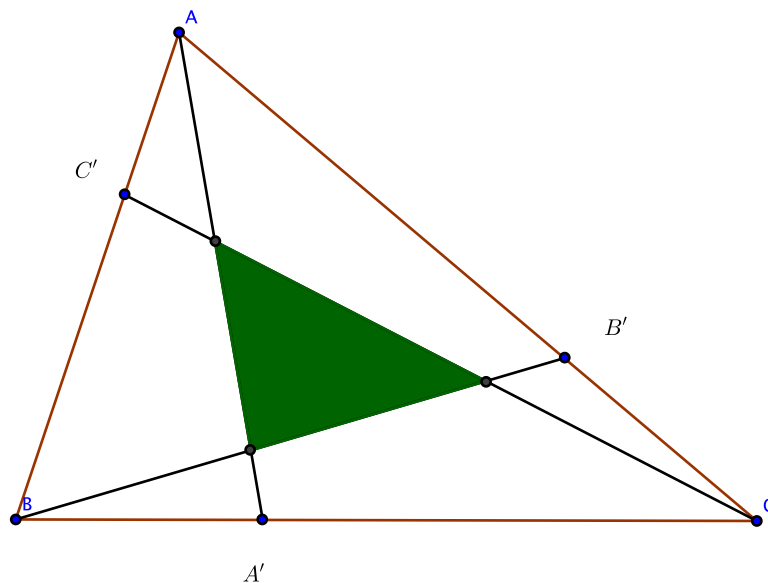


Figure 3.6

*Théorème de Routh pour les tiers*

### 3.4. Théorème de Pappus

#### 3.4.1. Théorème. (de Pappus)

*Soient deux droites distinctes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  du plan affine s'intersectant en un*

point  $o$ . Soient des points  $a, b, c \in \mathcal{D}$  et  $a', b', c' \in \mathcal{D}'$  tous distincts. Alors les points  $r = (ab') \cap (ba')$ ,  $q = (ac') \cap (ca')$  et  $p = (bc') \cap (cb')$  sont alignés.

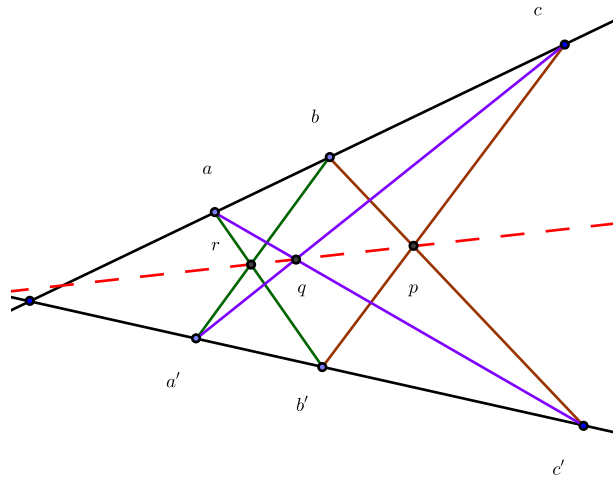


Figure 3.7  
Théorème de Pappus

*Démonstration.* On choisit  $(o, a, a')$  comme repère affine et on note  $(1 : \beta : 0)$  et  $(1 : \gamma : 0)$  (resp.  $(1 : 0 : \beta')$  et  $(1 : 0 : \gamma')$ ) les coordonnées barycentriques homogènes de  $b$  et  $c$  (resp.  $b'$  et  $c'$ ). L'équation de la droite  $(ab')$  est donnée par

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & \beta' & z \end{vmatrix} = 0$$

soit  $z - x\beta' = 0$ . Par symétrie celle de  $(a'b)$  est  $y - x\beta = 0$  de sorte que les coordonnées barycentriques homogènes de  $r$  sont  $(1 : \beta : \beta')$ . Par symétrie des données, celles de  $q$  sont  $(1 : \gamma : \gamma')$ .

En ce qui concerne le point  $p$ , une équation de  $(bc')$  est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ \beta & 0 & y \\ 0 & \gamma' & z \end{vmatrix} = 0$$

soit  $x\beta\gamma' - y\gamma' - z\beta = 0$ . Par symétrie celle de  $(cb')$  est  $x\beta'\gamma - y\beta' - z\gamma = 0$ . On trouve alors les coordonnées barycentriques homogènes de  $p$  :

$$(\beta\beta' - \gamma\gamma' : \beta\gamma(\beta' - \gamma') : \gamma'\beta'(\beta - \gamma)).$$

## §3. Barycentres dans le plan affine

33

On introduit alors la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \beta\beta' - \gamma\gamma' \\ \beta & \gamma & \beta\gamma(\beta' - \gamma') \\ \beta' & \gamma' & \gamma'\beta'(\beta - \gamma) \end{vmatrix}$$

dont on note  $C_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  les vecteurs colonnes. On observe alors que  $C_3 = \beta\beta'C_2 - \gamma\gamma'C_1$  et donc le déterminant est nul et les points  $p, q, r$  sont alignés.  $\square$

Algèbre et géométries

Boyer Pascal

12 septembre 2012 [8:55] Fichier:chap03 chapitre:I

*Géométrie politique : le carré de l'hypoténuse parlementaire est égal à la somme de l'imbécilité construite sur ses deux côtés extrêmes.*

PIERRE DAC

## Chapitre II

# Géométrie affine euclidienne

On considère toujours un espace affine  $\mathcal{E}$  mais on suppose désormais que  $E = \vec{\mathcal{E}}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire ; on demande alors à nos transformations affines d'avoir une partie linéaire qui conserve le produit scalaire et on parle du groupe affine orthogonal. Ainsi bien que l'espace soit le même qu'en géométrie affine, le groupe des transformations considéré est plus petit de sorte que l'on s'attend à avoir plus d'invariants.

Considérons par exemple l'ensemble des couples de points distincts de l'espace affine ; nous avons vu que l'action du groupe affine produisait une unique orbite. En revanche si on restreint l'action au sous-groupe euclidien, les orbites sont paramétrées par  $\mathbb{R}^{\times}/\{\pm 1\}$  et on retrouve la notion de *longueur*.

Si on considère des couples de droites du plan affine euclidien, une orbite sous l'action du groupe affine spécial orthogonal est appelée *un angle orienté* de droites et on peut définir sa mesure à l'aide de la description du groupe spécial orthogonal euclidien.

Ainsi on associe à tout triangle du plan affine euclidien ses trois longueurs et ses trois angles au sommet ; l'ensemble des triangles non plats du plan étant de dimension 6 alors que le groupe affine orthogonal est de dimension 3, on s'attend à décrire l'ensemble des orbites des triangles sous l'action du groupe orthogonal avec 3 paramètres parmi ces 6 : c'est ce que l'on appelle classiquement *les cas d'isométries des triangles*.

En outre on doit pouvoir donner 3 relations indépendantes entre ces 6 quantités, qui seront *la loi des sinus*, le théorème *d'Al-Kashi* et la propriété classique de la géométrie euclidienne bien connue des collégiens, le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ .

Au lieu de demander à nos applications linéaires de conserver le produit scalaire, on peut aussi simplement leur demander de conserver sa nullité, i.e. considérer le sous-groupe des éléments  $g$  du groupe linéaire tels que  $(x|y) = 0 \Rightarrow (g(x)|g(y)) = 0$ . On obtient alors *le groupe des similitudes* et la géométrie associée s'appelle **la géométrie semblable**. Le groupe des similitudes étant de dimension 4, on devrait pouvoir paramétrer les classes de similitudes des triangles du plan affine euclidien à l'aide de 2 paramètres parmi les 6 constitués des longueurs et des angles ; on retrouve ainsi les classiques *critères de similitude des triangles*.

Dans ce chapitre nous nous concentrerons sur les premières propriétés en dimension 2 puis 3 et développerons quelques des énoncés rencontrés en dimension supérieure. La géométrie euclidienne a été l'objet d'étude des mathématiciens pendant de longs siècles et l'étendue des résultats sur le sujet est telle qu'une encyclopédie n'y suffirait pas ; pour ce qui concerne les résultats les plus « classiques » nous en présenterons une sélection personnelle dans le chapitre suivant.

Finissons cette introduction par une très rapide présentation du point de vue axiomatique. Par rapport à la présentation du §??, il faut rajouter des axiomes afin :

- d'identifier le corps  $\mathbb{K}$  avec celui des nombres réels et
- d'introduire la norme.

**Axiomes d'ordre** : il s'agit d'axiomes régissant la relation  $a$  est entre  $b$  et  $c$  pour trois points alignés :

- si  $b$  est entre  $a$  et  $c$ ,  $b$  est entre  $c$  et  $a$ .
- Étant donnés deux points  $a$  et  $b$ , il existe  $c$  entre  $a$  et  $b$ .
- Étant donnés trois points d'une droite, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres.
- Il y a un quatrième axiome plus caché qui exprime qu'une droite qui rentre dans un triangle par un côté en ressort nécessairement par un autre.

*Remarque* : la relation d'ordre permet de définir la notion de segment et de demi-droite. On postule ensuite que chaque droite  $D$  partage le plan en deux parties appelées demi-plan, ce qui permet de parler de secteurs.

**Axiome congruence** : on se donne une relation d'équivalence entre les segments ce qui permet de définir la longueur, puis des axiomes de congruence sur les secteurs pour définir les angles et enfin un axiome de congruence des triangles.

Enfin il faut encore ajouter des axiomes de continuité de sorte qu'à partir des axiome évoqués ci-dessus, on peut faire toute la géométrie du collège,



retrouver les nombres réels, définir les vecteurs, le produit scalaire et montrer que l'on obtient la géométrie euclidienne définie à partir des espaces vectoriels réels.

**Changement de notations** : contrairement aux conventions des chapitres précédents, les points de l'espace affine euclidien seront notés en majuscules laissant les minuscules  $a, b, c \dots$  aux longueurs et les lettres grecques  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  aux angles.

## 1. Le groupe des isométries affines

L'espace de la géométrie affine euclidienne est celui de la géométrie affine de sorte que pour définir cette géométrie il ne nous reste plus qu'à en préciser le groupe des transformations. Comme dans le cas affine, celui-ci s'obtient à partir du cas vectoriel en lui adjoignant les translations.

### 1.1. Le groupe orthogonal

**1.1.1. Définition.** Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est une *isométrie vectorielle* (ou un automorphisme orthogonal) si  $f$  conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

L'ensemble des isométries de  $E$  est un groupe appelé *le groupe orthogonal* de  $E$  et noté  $O(E)$ , où  $O(n)$ .

*Remarque* : une définition équivalente est de demander que  $f$  conserve la norme.

*Remarque* :  $f$  est une isométrie si et seulement si sa matrice  $O$  dans une base orthonormée vérifie  ${}^tOO = I$ .

**1.1.2. Définition.** Le noyau de l'application  $\det : O(E) \rightarrow \{\pm 1\}$  est noté  $O^+(E)$  ou encore  $SO(E)$  et ses éléments sont dits *des isométries positives ou directes*.

*Remarque* : les éléments de  $O(E)$  de déterminant  $-1$  sont dits *négatifs ou indirects* et on note  $O^-(E)$  l'ensemble des isométries négatives : on notera bien que  $O^-(E)$  n'est pas un sous-groupe de  $O(E)$  puisqu'il ne contient même pas l'élément neutre.

*Exemple* : **les symétries orthogonales** : il s'agit des involutions  $f$  telles que  $V_+ = \text{Ker}(f - \text{Id})$  est orthogonal à  $V_- = \text{Ker}(f + \text{Id})$ . On dit que  $f$  est la

symétrie par rapport à  $V_+$ . On notera que tout endomorphisme orthogonal qui est diagonalisable est nécessairement une symétrie.

**1.1.3. Définition.** Une réflexion est une symétrie orthogonale  $f$  telle que  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  est un hyperplan.

**1.1.4. Théorème.** Tout isométrie de  $E$  est produit de  $n - \dim \text{Ker}(f - \text{Id})$  réflexions, ce nombre étant optimal.

*Remarque :* la preuve procède par récurrence sur la dimension de  $\text{Ker}(f - \text{Id})$ , cf. [33] par exemple.

*En dimension 2 :* les isométries

- positives sont les rotations et sont en bijection, via leur angle, avec  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Précisément une orientation du plan étant donnée à  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  on associe la rotation  $r_\theta$  d'angle  $\theta$  au sens du §II-2.3.
- négatives sont les réflexions  $\sigma_D$  par rapport à une droite vectorielle  $D$ . On rappelle par ailleurs que la composée  $\sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1}$  est la rotation d'angle le double de l'angle entre  $D_1$  et  $D_2$ , au sens du paragraphe II-2.3.

*En dimension 3 :* les isométries

- positives sont les rotations relativement à un axe  $D$ . Explicitons leur description : l'espace étant orienté le choix d'un vecteur directeur de  $D$  fournit une orientation de l'orthogonal  $D^\perp$  et la rotation d'axe  $D$  et d'angle  $\theta$  est la somme directe  $\text{Id}_D \oplus r_{\theta, D^\perp}$ .
- Remarque :* parmi ces rotations celles d'angle  $\pi$  sont appelées des retournements ; en utilisant qu'une rotation du plan est le produit de deux réflexions, on en déduit que toute rotation qui n'est pas un retournement est le produit de deux retournements.
- négatives sont les réflexions et sont donc en bijection avec les plans de l'espace.

## 1.2. Isométries affines

**1.2.1. Définition.** Une isométrie affine est une application affine  $f$  telle que  $\vec{f}$  est une isométrie vectorielle. On note  $Is(\mathcal{E})$  le sous-groupe de  $GA(\mathcal{E})$  des isométries affines.

*Remarque :* une application qui conserve les distances est nécessairement une isométrie affine.

*Remarque :* les isométries admettant un point fixe, s'identifient à des isométries vectorielles.

*Remarque* : les isométries affines conservent l'alignement, les barycentres, les milieux, l'orthogonalité, les distances, les angles non orientés, transforment projeté orthogonal en projeté orthogonal.

*Exemple* : les translations, les symétries orthogonales par rapport à un sous-espace affine.

**1.2.2. Définition.** On dit qu'une isométrie affine  $f$  est *positive* ou un déplacement (resp. *négative* ou un anti-déplacement) si  $\vec{f}$  est positive (resp. négative).

*Remarque* : en dimension 2 une isométrie affine  $s$  sans point fixe est une symétrie glissée i.e.  $i = t \circ s_0 = s_0 \circ t$  où  $s_0$  est une réflexion par rapport à une droite  $\mathcal{D}$  et  $t$  une translation de vecteur un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**1.2.3. Corollaire.** Toute isométrie affine est produit de  $m$  réflexions orthogonales où  $m$  peut être choisi  $\leq n - \dim \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) + 2$ .

*Remarque* : en dimension 3, on peut montrer que toute isométrie affine positive est un produit de vissages, où on rappelle qu'un vissage  $f$  est de la forme  $r \circ t = t \circ r$  où  $r$  est une rotation d'axe  $\mathcal{D}$  et  $t$  une translation de vecteur un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

### 1.3. Groupe des similitudes affines

**1.3.1. Définition.** Une *similitude* de  $E$  est un endomorphisme  $f$  tel qu'il existe un nombre réel positif  $\lambda$ , appelé le rapport de  $f$ , tel que  $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$ . Autrement dit  $f = g \circ h$  où  $h$  est une homothétie de rapport  $\lambda$  et  $g$  est une isométrie.

*Remarque* : pour tous  $x, y \in E$ , on a  $(f(x)|f(y)) = \lambda^2(x|y)$ ; en particulier une similitude conserve l'orthogonalité. Matriciellement  $f$  est une similitude si et seulement si sa matrice  $S$  dans une base orthonormée vérifie  ${}^tSS = \lambda^2I$ .

**1.3.2. Définition.** Le groupe des similitudes de  $E$  se note  $GO(E)$ ; les positives forment un sous-groupe noté  $GO^+(E)$ .

*Remarque* :  $GO(E)$  est le produit direct de  $O(E)$  avec  $R^*$ .

**1.3.3. Définition.** Une *similitude affine*  $s$  est une application affine telle que  $\vec{s}$  soit une similitude vectorielle. L'ensemble  $\text{Sim}(\mathcal{E})$  des similitudes de  $\mathcal{E}$  est un sous-groupe de  $GA(\mathcal{E})$ .

*Remarque* : on définit de même les similitudes positives et négatives.

*Remarque* : soit  $s$  une similitude qui n'est pas une isométrie ; alors  $s$  admet un unique point fixe appelé le centre de la similitude. En particulier si  $s$  n'est pas une isométrie et soit  $\lambda$  son rapport et  $A$  son centre. Alors  $s$  s'écrit sous la forme  $s = h(A, \lambda) \circ f = f \circ h(A, \lambda)$  où  $h(A, \lambda)$  est l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\lambda$  et  $f$  une isométrie admettant  $A$  pour point fixe.

## 2. Généralités

Dans la suite  $\mathcal{E}$  désigne un espace affine de dimension  $n$  tel que  $\vec{\mathcal{E}}$  est un espace euclidien, i.e. un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

### 2.1. Sphères

**2.1.1. Définition.** On définit une distance  $d$  sur  $\mathcal{E}$  par la formule  $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$  que l'on notera aussi  $AB$ .

**2.1.2. Définition.** Soit  $O$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $r$  un réel positif ou nul. La *sphère* (resp. la *boule fermée*) de centre  $O$  et de rayon  $r$  est l'ensemble

$$\mathfrak{S}(O, r) = \{M \in \mathcal{E}, OM = r\}, \quad (\text{resp. } \mathfrak{B}(O, r) = \{M \in \mathcal{E}, OM \leq r\}).$$

*Remarque* : en dimension 2 on parle habituellement de cercle et de disque.

*Remarque* : l'équivalence des normes en dimension finie se traduit dans notre contexte en disant qu'étant donnée deux structures euclidiennes sur  $\mathcal{E}$ , il existe  $r \leq t$  tel que  $\mathfrak{B}(0, r) \subset \mathfrak{B}'(O, 1) \subset \mathfrak{B}(O, t)$ , où  $\mathfrak{B}'(O, 1)$  est la boule unité pour le deuxième produit scalaire.

**2.1.3. Lemme.** Soit  $A, B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$ . L'ensemble

$$\left\{ M \in \mathcal{E} : (\vec{MA} \mid \vec{MB}) = 0 \right\}$$

est la sphère de centre l'isobarycentre de  $A, B$  et passant par  $A, B$ .

*Démonstration.* Notons  $I$  l'isobarycentre de  $A, B$ . On écrit

$$(\vec{MA} \mid \vec{MB}) = (\vec{MI} + \vec{IA} \mid \vec{MI} + \vec{IB}) = MI^2 - IA^2$$

de sorte que la ligne de niveau de l'énoncé est l'ensemble des points  $M \in \mathcal{E}$  tels que  $MI = r = IA^2$ , i.e.  $\mathfrak{S}(I, IA)$ .  $\square$

**2.1.4. Proposition.** Soit  $\mathcal{V}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ ,  $O$  un point de projeté orthogonal  $\Omega$  sur  $\mathcal{V}$ . L'intersection de  $\mathfrak{S}(O, r)$  avec  $\mathcal{V}$  est :

- vide si  $r < O\Omega$  ;
- la sphère de  $\mathcal{V}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $s = \sqrt{r^2 - O\Omega^2}$  sinon.

*Démonstration.* On rappelle que si  $M \in \mathcal{V}$  alors  $(\overrightarrow{\Omega M} | \overrightarrow{\Omega O}) = 0$  ; le résultat découle alors du théorème de Pythagore.  $\square$

**2.1.5. Définition.** On dit qu'un sous-espace affine  $\mathcal{V}$  est tangent à une sphère  $\mathfrak{S}$  en un point  $A$  si  $\mathcal{V} \cap \mathfrak{S} = \{A\}$ .

**2.1.6. Corollaire.** Soit  $\mathfrak{S}$  une sphère et  $A \in \mathfrak{S}$  ; il existe alors un unique hyperplan tangent à  $\mathfrak{S}$  en  $A$ , noté  $T_a(S)$ . C'est l'hyperplan orthogonal à la droite  $(OA)$  passant par  $A$  où  $O$  est le centre de  $\mathfrak{S}$ .

**2.1.7. Définition.** La puissance d'un point  $A$  par rapport à  $\mathfrak{S}(O, r)$  est la quantité  $p(A, \mathfrak{S}) = OA^2 - r^2$ .

**2.1.8. Lemme.** Soit  $O \in \mathcal{E}$  et  $r > 0$  un réel strictement positif. Pour  $A \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$  une droite passant par  $A$  qui coupe  $\mathfrak{S}(O, r)$  en  $M$  et  $N$ . Alors  $p(A, \mathfrak{S}) = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$ .

*Démonstration.* Notons  $M'$  tel que  $[MM']$  est un diamètre de  $\mathfrak{S}(O, r)$  et on écrit

$$(\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'N}) = (\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AM'})$$

d'après le lemme II-2.1.3. En développant le dernier terme comme dans la preuve de II-2.1.3, on obtient  $AO^2 - r^2$  d'où le résultat.  $\square$

## 2.2. Orthogonalité

**2.2.1. Définition.** Deux sous-espaces affines  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  sont dits *orthogonaux* si  $\overrightarrow{\mathcal{V}}$  et  $\overrightarrow{\mathcal{W}}$  le sont ; il sont dits *perpendiculaires* s'ils sont orthogonaux et d'intersection non vide.

**2.2.2. Définition.** Un repère affine  $A_0, \dots, A_n$  est dit *orthonormé* si  $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$  est une base orthonormée de  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ .

**2.2.3. Définition.** Soient  $\mathcal{V}$  un sous-espace affine de dimension  $k$ ,  $M$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{W}$  le sous-espace affine de dimension  $n - k$  passant par  $M$  et perpendiculaire à  $\mathcal{V}$ . L'unique point d'intersection de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  est appelé le *projeté orthogonal* de  $M$  sur  $\mathcal{V}$ . L'application qui à  $M$  associe son projeté

orthogonal sur  $\mathcal{V}$  est appelé *la projection orthogonale* de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{V}$  et notée  $p_{\mathcal{V}}$ .

*Remarque :* le projeté orthogonal  $A$  de  $M$  sur  $\mathcal{V}$  vérifie les propriétés suivantes qui le caractérise :

- pour tout  $B \in \mathcal{V}$ , on a  $(\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AM}) = 0$ ;
- pour tout  $B \in \mathcal{V}$ , on a  $MA \leq MB$ ;
- pour tout  $B \in \mathcal{V} - \{A\}$ , on a  $MA < MB$ .

**2.2.4. Définition.** On appelle distance de  $M$  à  $\mathcal{V}$  la distance de  $M$  à son projeté orthogonal sur  $\mathcal{V}$ ; c'est la plus courte distance de  $M$  à un point de  $\mathcal{V}$ .

**2.2.5. Proposition.** Soit  $\mathcal{C}$  un convexe fermé : pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$ , il existe un unique  $P \in \mathcal{C}$  réalisant le minimum de la distance  $MP$ ; on l'appelle le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Le cas où  $M \in \mathcal{C}$  étant trivial, on suppose que  $M \notin \mathcal{C}$ . Notons  $\mathcal{P}(M) = \{P \in \mathcal{C} : \forall Q \in \mathcal{C}, PM \leq QM\}$ . Comme l'ensemble  $\{PM : P \in \mathcal{C}\} \subset \mathbb{R}$  est minoré par 0 il admet une borne inférieure  $m$ . On considère alors  $(P_n)_n$  une suite de points de  $\mathcal{C}$  telle que  $MP_n$  converge vers  $m$ . Comme à partir d'un certain rang  $MP_n \leq m + 1$ , la suite  $P_n$  appartient à une boule fermée centrée en  $M$  laquelle est compacte; ainsi quitte à extraire une sous-suite, on suppose que  $P_n$  converge vers un point  $P$  lequel appartient donc à  $\mathcal{C}$  qui est fermé. Ainsi  $\mathcal{P}(M)$  est non vide; soit alors  $P_1$  et  $P_2$  deux éléments de  $\mathcal{P}(M)$ , d'après l'identité de la médiane, on a pour  $P$  le milieu de  $[P_1P_2]$ ,  $MP^2 = (MP_1^2 + MP_2^2)/2 - P_1P_2^2/4 = m^2 - P_1P_2^2/4 = m^2$  et donc  $P_1 = P_2$ , d'où le résultat.  $\square$

**2.2.6. Définition.** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$ , alors l'ensemble des points  $M$  équidistants de  $A$  et  $B$  est l'hyperplan affine perpendiculaire à  $(AB)$  passant par le milieu de  $A$  et  $B$ . On l'appelle *l'hyperplan médiateur* ou *la médiatrice* en dimension 2.

**2.2.7. Proposition.** Dans un triangle  $ABC$  du plan affine euclidien, les médiatrices sont concourantes.

*Démonstration.* Si  $O$  est l'intersection de deux de ces médiatrices, alors  $O$  est à égale distance de  $A$ ,  $B$  et  $C$  et appartient donc à la troisième médiatrice.  $\square$

**2.2.8. Définition.** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$ ; pour  $C$  un point de  $\mathcal{E}$  n'appartenant pas à  $(AB)$ , l'hyperplan parallèle à l'hyperplan médiateur et passant par  $C$  est appelée *la hauteur* de  $AB$  issue de  $C$ .

**2.2.9. Proposition.** Dans un triangle  $ABC$  du plan affine euclidien, les hauteurs sont concourantes.

*Démonstration.* Considérons comme sur la figure II-2.1, la droite  $D_A$  pas-

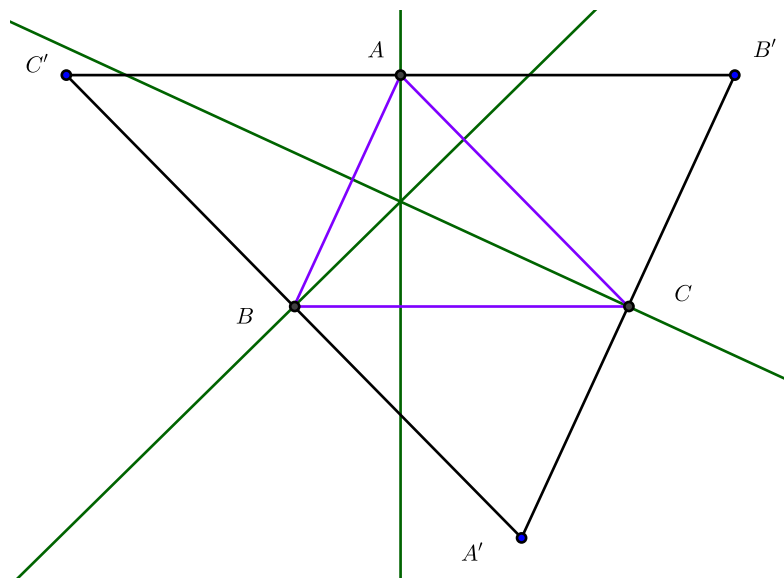


Figure 2.1  
Hauteurs ou médiatrices

sant par  $A$  et parallèle à  $(BC)$  et de même pour les autres sommets  $B$  et  $C$ . Les droites  $D_A, D_B$  et  $D_C$  déterminent un triangle  $A'B'C'$  dans lequel les hauteurs de  $ABC$  en sont les médiatrices. Le résultat découle alors de la proposition précédente.  $\square$

*Remarque :* on renvoie à l'exercice ?? pour une autre preuve utilisant le théorème de Ceva.

**2.2.10. Définition.** Le point de concourance des hauteurs d'un triangle est appelé son *orthocentre*.

### 2.3. Angles d'un plan vectoriel orienté

On cherche à définir la notion d'angle, de droites ou de demi-droites, orienté ou non, se coupant en un point  $O$ . On se ramène pour cela en vectoriel en pointant notre espace affine en  $O$ ; en considérant alors l'espace vectoriel engendré par ces droites, on se ramène au cas de  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire usuel et d'une orientation.

**2.3.1. Définition.** *Un angle orienté* (resp. *non orienté*) de droites de  $\mathbb{R}^2$  est une classe d'équivalence de l'ensemble des couples de droites de  $E$  sous l'action de  $O_2^+(\mathbb{R})$  (resp.  $O_2(\mathbb{R})$ ). On définit de même la notion d'angle orienté ou non orienté de demi-droites.

Dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice d'une rotation  $r \in O_2^+(\mathbb{R})$  est donnée par un élément  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  par la formule  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Le paramètre  $\theta$  est appelé l'angle de la rotation.

**2.3.2. Définition.** *La mesure d'un angle orienté de deux demi-droites* de  $\mathbb{R}^2$  est le paramètre  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  de l'unique rotation  $r$  qui envoie la première demi-droite sur la deuxième. *La mesure d'un angle orienté de deux droites* de  $\mathbb{R}^2$  est le paramètre  $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ , tels que  $\theta, \theta + \pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  correspond aux angles des deux rotations qui envoient la première droite sur la deuxième.

**2.3.3. Proposition.** *Soient  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$  trois demi-droites (resp. droites) de  $\mathbb{R}^2$ ; la mesure de l'angle entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est la somme de la mesure des angles entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  avec celui entre  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ .*

*Démonstration.* Le résultat découle directement de la définition de la mesure d'un angle de demi-droites (resp. de droites) et de l'isomorphisme de groupe  $SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Dans le cas des droites il suffit de remarquer que pour  $r_1$  et  $r_2$  deux rotations alors l'angle de  $(\pm r_1) \circ (\pm r_2)$  est bien défini modulo  $\pi$ .  $\square$

**2.3.4. Notation.** *Si  $A, B, C$  désignent trois points distincts du plan affine euclidien, on note  $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$  la mesure de l'angle orienté entre les demi-droites  $(A, \overrightarrow{AB})$  et  $(A, \overrightarrow{AC})$ . L'angle orienté des droites associées sera noté  $\widehat{BAC}$ .*

*Dans un triangle  $ABC$  on notera*

$$\alpha = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}, \quad \beta = \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}, \quad \gamma = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$$

*et  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  les angles non orientés de droites correspondant.*



**2.3.5. Lemme.** Soit  $O$  un point du plan affine euclidien ainsi que trois points  $A, B, C$  distincts de  $O$ . On a alors la formule

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{OA}, \vec{OC})} &\equiv \widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} + \widehat{(\vec{OB}, \vec{OC})} \pmod{2\pi} \\ \widehat{AOC} &\equiv \widehat{AOB} + \widehat{BOC} \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le résultat découle directement de la définition de la mesure d'un angle et de la structure de groupe de  $SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .  $\square$

**2.3.6. Lemme.** Trois points distincts  $A, B, C$  du plan affine euclidien sont alignés si et seulement si  $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv 0 \pmod{\pi}$ .

*Démonstration.* Il suffit de noter que l'homothétie vectorielle de rapport  $-1$  est la rotation d'angle  $\pi$ , i.e.  $\cos \pi = -1$  et  $\sin \pi = 0$ .  $\square$

**2.3.7. Proposition.** Soit  $ABC$  un triangle de  $\mathcal{E}$  dont on note  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles orientés respectivement en  $A, B$  et  $C$ . On a alors  $\alpha + \beta + \gamma = \pi \pmod{2\pi}$ .

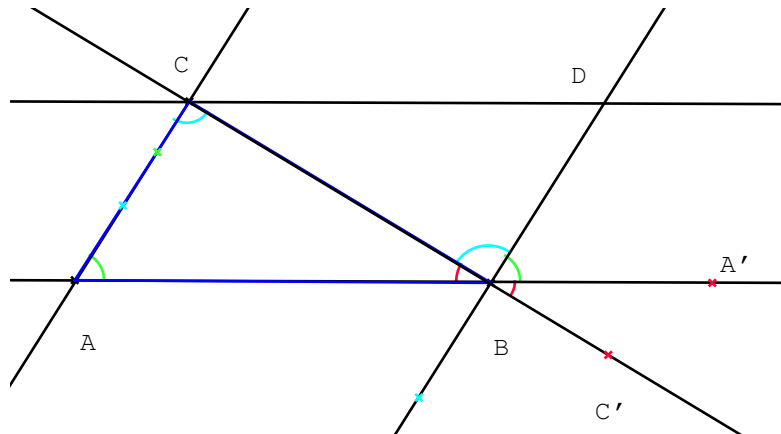


Figure 2.2

Somme des angles d'un triangle euclidien

*Démonstration.* Considérons le point  $D$  tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme; on note  $A'$  (resp.  $C'$ ) un point de  $(AB)$  (resp.  $(AC)$ ) tel que

$B \in [AA']$  (resp.  $B \in [CC']$ ). On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}) \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA'}) \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}) \end{array} \right.$$

de sorte que

$$\alpha + \beta + \gamma = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA'}) + (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BC'}) = \pi \pmod{2\pi}.$$

□

**2.3.8. Définition.** On appellera *bissectrices* d'un couple de droite  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  se coupant en un point  $O$ , les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  telles que l'angle entre  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{D}'$ ) et  $\mathcal{D}_1$  est égal à celui entre  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{D}'$ ).

En ce qui concerne les angles non orientés, comme la réflexion par rapport à la bissectrice échange l'ordre, la mesure n'est définie qu'au signe près; parfois on choisit comme mesure d'un angle orienté son unique représentant dans  $[0, \pi]$ . Notons aussi, comme  $\pm\alpha \pm \beta$  n'est pas égal à  $\pm(\alpha + \beta)$  que la propriété d'additivité des angles n'est plus valide. Leur utilisation correspondra au cas où seul intervient le cosinus de l'angle de sorte que l'orientation n'est pas nécessaire. Citons une de ces situations.

**2.3.9. Proposition.** Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux cercles de centre respectifs  $O_1, O_2$  et de rayons  $R_1, R_2$ . Dans le cas où  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  s'intersectent, tout point  $M$  de l'intersection définit, avec  $O_1$  et  $O_2$ , un angle non orienté  $\theta$  de vecteurs tel que

$$\cos \theta = \frac{R_1^2 + R_2^2 - (O_1O_2)^2}{2R_1R_2}.$$

*Remarque :* on renvoie le lecteur au §?? pour l'utilisation de la quantité  $\cos \theta$  dans le contexte de la géométrie inversive.

*Démonstration.* Notons que si  $N$  est un autre point de l'intersection avec  $\overrightarrow{NO_1}$  et  $\overrightarrow{NO_2}$  s'obtiennent comme l'image par la réflexion par rapport à  $(O_1O_2)$  des vecteurs  $\overrightarrow{MO_1}$  et  $\overrightarrow{MO_2}$ ; autrement dit l'angle non orienté des vecteurs  $\overrightarrow{MO_1}$  et  $\overrightarrow{MO_2}$  est bien indépendant du point  $M$  de  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  choisi. On calcule alors

$$\|\overrightarrow{O_1O_2}\|^2 = \|\overrightarrow{O_1M}\|^2 + \|\overrightarrow{MO_2}\|^2 - 2(\overrightarrow{O_1M} | \overrightarrow{O_2M}) = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos \theta.$$

□

*Remarque* : la mesure de l'angle non orienté  $\theta$  entre deux cercles est aussi celui entre les tangentes en un point de leur intersection. On note aussi que les cercles sont tangents intérieurement (resp. extérieurement) si et seulement si  $\theta \in [0, \pi]$  est égal à 0 (resp.  $\pi$ ).

**2.3.10. Définition.** Deux cercles sont dits *orthogonaux* s'ils s'intersectent et que l'angle non orienté qu'ils définissent est de mesure  $\pi/2 \in [0, \pi]$ .

**2.3.11. Définition.** Étant donné un cercle  $\mathcal{C}$ , deux points  $P, Q$  seront dits *conjugués* par rapport à  $\mathcal{C}$  si le cercle de diamètre  $[PQ]$  lui est orthogonal.

**2.3.12. Proposition.** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ . Pour  $P \neq O$ , l'ensemble  $\mathcal{D}$  de ses conjugués par rapport à  $\mathcal{C}$  est une droite ne contenant pas  $O$  et orthogonale à  $(OP)$ . Réciproquement pour toute droite  $\mathcal{D}$  ne contenant pas  $O$ , il existe un unique point  $P$  tel que  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des conjugués de  $P$  par rapport à  $\mathcal{C}$ .

*Remarque* : aucun point de l'espace affine n'est conjugué à  $O$  par rapport à  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Rappelons que si  $Q$  est un point quelconque, on a

$$(\overrightarrow{OP} \mid \overrightarrow{OQ}) = O\Omega^2 - \Omega P^2$$

où  $\Omega$  est le milieu de  $[PQ]$ . Ainsi  $P$  et  $Q$  sont conjugués par rapport à  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $O\Omega^2 = R^2 + \Omega P^2$  soit si et seulement si  $(\overrightarrow{OP} \mid \overrightarrow{OQ}) = R^2$ , ce qui est bien l'équation d'une droite ne passant pas par  $O$ .

En ce qui concerne la réciproque, il suffit de remarquer que  $\mathcal{D}$  s'obtient à partir de  $P$ , en prenant la droite orthogonale à  $(OP)$  passant par  $P'$  tel que  $\overline{OP \cdot OP'} = R^2$  de sorte que  $\mathcal{D}$  étant donné,  $P'$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur  $\mathcal{D}$  et on construit  $P$  tel que  $\overline{OP \cdot OP'} = R^2$ .  $\square$

*Remarque* : en utilisant la notion d'inversion de la définition ??, les points  $P$  et  $P'$  dans la preuve ci-dessus, sont inverses l'un de l'autre par l'inversion de centre  $O$  et de rapport  $R^2$ , qui conserve  $\mathcal{C}$  point par point.

**2.3.13. Définition.** Pour  $P \neq O$ , la droite  $\mathcal{D}$  de la proposition précédente s'appelle *la polaire* de  $P$ ; réciproquement le point  $P$  associé à une droite ne contenant pas  $O$  est appelé *le pôle* de  $\mathcal{D}$ .

*Remarque* : cette notion sera généralisée au cas des coniques au §IV-3.5.1 et en particulier au cas où cette conique est la réunion de deux droites distinctes, cf. III-1.7.8.

**2.3.14. Lemme.** Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan ne contenant pas le centre  $O$  du cercle  $\mathcal{C}$  ; on note  $P$  le pôle de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $\mathcal{C}$ . L'ensemble des polaires par rapport à  $\mathcal{C}$  des points  $M \in \mathcal{D}$ , est l'ensemble des droites passant par  $P$ . Réciproquement l'ensemble des pôles des droites passant par  $M$  est égal à  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* Comme la notion de conjugués par rapport à  $\mathcal{C}$  est symétrique, et comme  $M \in \mathcal{D}$  est conjugué à  $P$  alors  $P$  appartient à la polaire de  $M$ . Réciproquement pour  $\mathcal{D}'$  une droite passant par  $P$  de pôle  $P'$  par rapport à  $\mathcal{C}$ , les points  $P$  et  $P'$  sont conjugués et donc  $P' \in \mathcal{D}$ .  $\square$

*Remarque :* comme par construction la polaire d'un point de  $\mathcal{C}$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  passant par ce point, on obtient la construction suivante du pôle d'une sécante à  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $M'$ , cf. la figure II-2.3 : il s'agit de l'intersection des deux tangentes  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  à  $\mathcal{C}$  aux points  $M$  et  $M'$ . On renvoie le lecteur au §IV-3.5 pour de plus amples constructions.

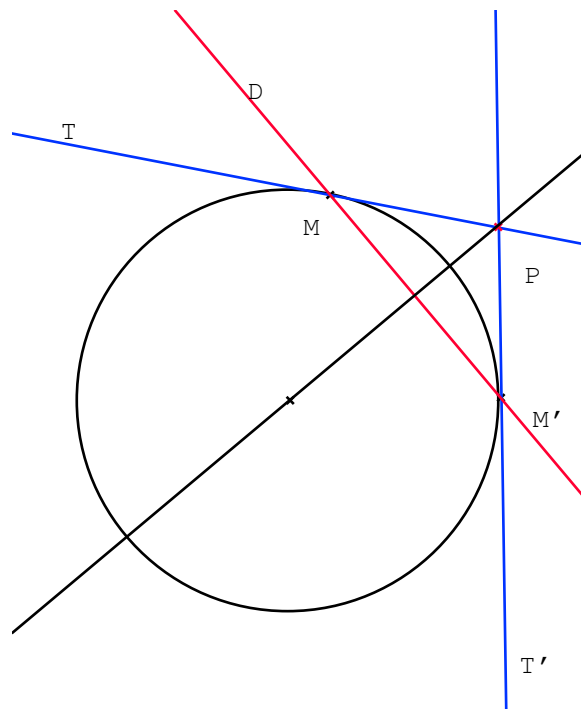


Figure 2.3  
Construction du pôle d'une sécante

### 3. En dimension 2

#### 3.1. Théorème de l'angle au centre

##### 3.1.1. Théorème. (*dit de l'angle au centre*)

Soient  $A, B, C$  sont trois points distincts d'un cercle de centre  $O$  et  $T \neq B$  un point de la tangente en  $B$  alors

$$(\widehat{\vec{OB}, \vec{OC}}) = 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = 2(\widehat{\vec{BT}, \vec{BC}}) \pmod{2\pi}.$$

*Démonstration.* Les notations sont celles de la figure II-3.1 : le triangle  $A'OB$  étant isocèle, on a d'après II-2.3.7

$$(\widehat{\vec{OA'}, \vec{OB}}) = \pi - 2(\pi/2 - (\widehat{\vec{AA'}, \vec{AB}})) = 2(\widehat{\vec{AA'}, \vec{AB}}).$$

De même pour le point  $C$ , on obtient

$$(\widehat{\vec{OC}, \vec{OA'}}) = \pi - 2(\pi/2 - (\widehat{\vec{AC}, \vec{AA'}})) = 2(\widehat{\vec{AC}, \vec{AA'}})$$

et le résultat en découle par addition des angles. □

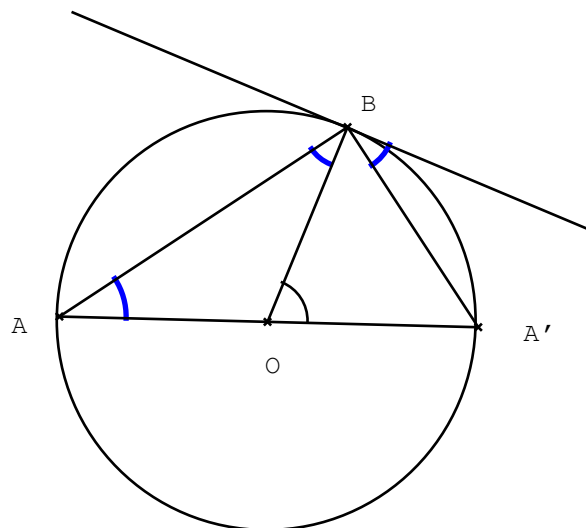


Figure 3.1

*Preuve du théorème de l'angle au centre*

**3.1.2. Corollaire. (Critère de cocyclicité)**

Quatre points distincts deux à deux,  $A, B, C, D$  sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD} \pmod{\pi}.$$

**3.1.3. Corollaire.** Soit  $M$  un point intérieur à un cercle  $C$  de rayon 1 et deux droites  $D$  et  $D'$  passant par  $M$  et coupant  $C$  respectivement en  $A, B$  et  $A', B'$ . Alors l'angle  $\widehat{AMA'}$  est égal à la demi-somme des arcs  $AA'$  et  $BB'$ .

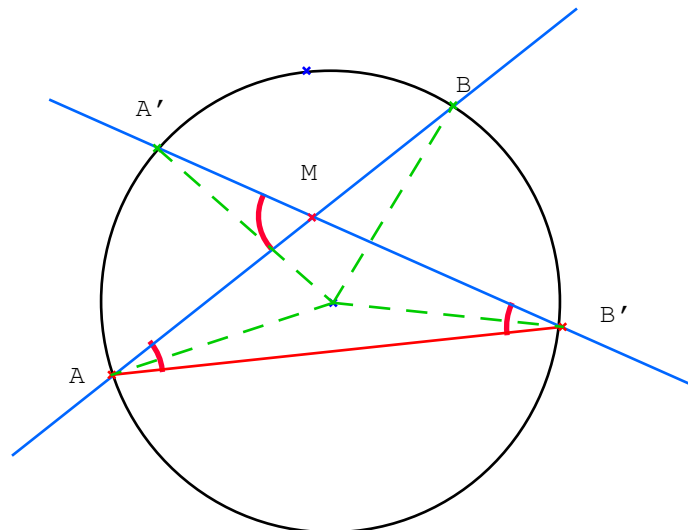


Figure 3.2

Angle et corde dans le cercle unité

*Démonstration.* La somme des angles du triangle  $AMB'$  montre que  $\widehat{AMA'} = \widehat{BAB'} + \widehat{A'B'A}$  et on conclut en appliquant le théorème de l'angle inscrit.  $\square$

**3.1.4. Théorème. (de Lehmus-Steiner)**

Un triangle est isocèle si et seulement s'il possède deux bissectrices de même longueur

*Démonstration.* Evidemment si le triangle est isocèle, il possède deux bissectrices de même longueur. Réciproquement soit  $ABC$  un triangle tel que

$\hat{B} > \hat{C}$ , montrons que la bissectrice  $BB'$  est plus courte que la bissectrice  $CC'$ . Soit  $M$  le point d'intersection de  $CC'$  et du cercle circonscrit à  $BCB'$  : on a  $\widehat{M\hat{B}B'} = \widehat{M\hat{C}B'}$  parce qu'ils interceptent le même arc. Donc  $\widehat{M\hat{B}C} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$  est plus grand que  $\widehat{M\hat{C}B'} = \frac{\hat{C} + \hat{C}'}{2}$ . L'arc  $MC$  intercepté par  $\widehat{M\hat{B}C}$  est donc supérieur à l'arc  $BB'$  intercepté par  $\widehat{M\hat{C}B'}$ , puisqu'ils sont tous les deux intérieurs à un droit. Mais  $M$  est intérieur au segment  $CC'$  car  $\widehat{M\hat{B}B'} < \widehat{A\hat{B}B'}$ . Par suite  $CC' > CM > BB'$  : contradiction.  $\square$

### 3.2. Théorème de Pascal et de Brianchon : version euclidienne

Les théorèmes de Pascal et sa version duale au sens projectif, cf. le §III-1.5, appelée de Brianchon, sont des énoncés de nature projective et seront étudiés en tant que tel, cf. le théorème IV-3.6.6. En attendant nous en donnons des versions euclidiennes avec des cercles.

#### 3.2.1. Théorème. (de Pascal euclidien)

Soit  $C$  un cercle et soient  $A, B, C, A', B', C'$  six points distincts de  $C$ . On suppose que les droites  $(BC')$  et  $(B'C)$  (resp.  $(CA')$  et  $(C'A)$ , resp.  $(AB')$  et  $(A'B)$ ) se coupent en  $U$  (resp.  $V$ , resp.  $W$ ). Alors  $U, V, W$  sont alignés.

*Remarque* : quand deux points sont confondus, la corde correspondante est la tangente au cercle.

*Démonstration.* D'après le corollaire précédent et dans le cas de la figure II-3.3, i.e. en utilisant  $\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$  et  $\widehat{A'B'} = \widehat{A'C'} + \widehat{C'B'}$ , on en déduit que  $\widehat{AWB} = \widehat{AVC} + \widehat{CUB}$ .

On considère alors les cercles circonscrits aux triangles  $ABW$  et  $ACV$  qui se coupent en un deuxième point  $O$ . On a  $\widehat{VOA} = \widehat{VCA} = \widehat{A'CA}$ ; de même on a  $\widehat{WOA} = \widehat{WBA} = \widehat{A'BA}$  de sorte que comme  $\widehat{A'CA} = \widehat{A'BA}$ , on a  $\widehat{VOA} = \widehat{WOA}$  et donc les points  $O, V, W$  sont alignés.

Bien entendu on peut faire de même avec les cercles circonscrits à  $ABW$  et  $BCU$  et le résultat en découlera pourvu que le point  $O$  soit le même, i.e. qu'il appartienne au cercle  $(BCU)$ . En vertu de la réciproque de l'angle inscrit, il suffit de montrer que l'on a  $\widehat{BOC} = \widehat{BUC}$ ; on a  $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = \widehat{AWB} - \widehat{AVC}$  qui d'après ce qui précède est égal à  $\widehat{BUC}$  d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : il y a quelques cas particuliers passés sous silence ici : si les points  $U, V, W$  sont à l'infini, ou si les cercles  $(BCU)$  et  $(CAV)$  sont tangents en  $C$  par exemple. En fait il y a un argument général, le principe

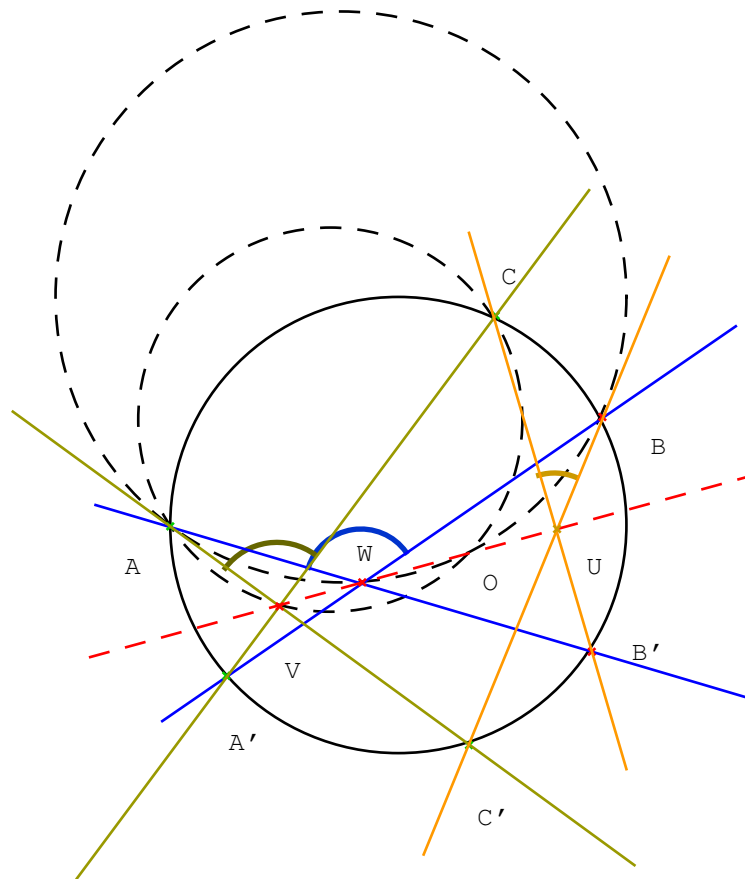


Figure 3.3  
Théorème de Pascal euclidien

de prolongement des identités algébriques, cf. le §?? qui permet de se limiter à prouver le cas générique et d'en déduire le résultat dans tous les cas particuliers.

**3.2.2. Corollaire.** *Les tangentes au cercle circonscrit d'un triangle  $ABC$  en ses sommets rencontrent les côtés opposés en des points  $P, Q, R$  qui sont alignés.*





**3.2.3. Théorème. (de Brianchon, version euclidienne)**

Si  $ABCDEF$  est un hexagone dont les 6 côtés sont tangents à un cercle  $\mathcal{C}$ , alors ses trois diagonales sont concourantes ou parallèles.

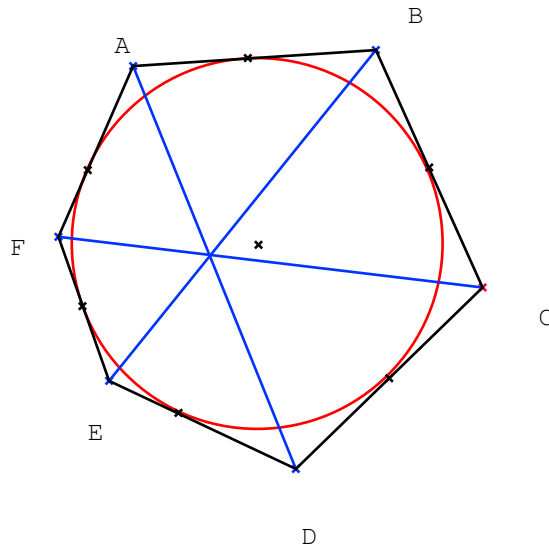


Figure 3.5

*Théorème de Brianchon euclidien*

*Démonstration.* Avec les notations de la figure II-3.6, on note  $R, Q, T, S, P, U$  les points de contact des six tangentes ; on suppose pour simplifier que l'hexagone est convexe de sorte que les trois cordes  $[AD]$ ,  $[BE]$  et  $[CF]$  sont inscrites dans le cercle  $\mathcal{C}$  et non parallèles. On construit alors les points  $P', Q', R', S', T', U'$  comme sur la figure tels que

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$$

et on construit les cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  respectivement tangent à  $(PP')$  et  $(QQ')$  en  $P'$  et  $Q'$  (resp.  $(RR')$  et  $(SS')$  en  $R'$  et  $S'$ , resp.  $(TT')$  et  $(UU')$  en  $T'$  et  $U'$ ). Des égalités

$$AU' = UU' - AU = RR' = RR' - AR = AR'$$

on en déduit que  $A$  a la même puissance par rapport à  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  et donc appartient à l'axe radical de  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ , au sens de la définition II-3.3.3. De même comme

$$DT' = DT + TT' = DS + SS' = DS$$



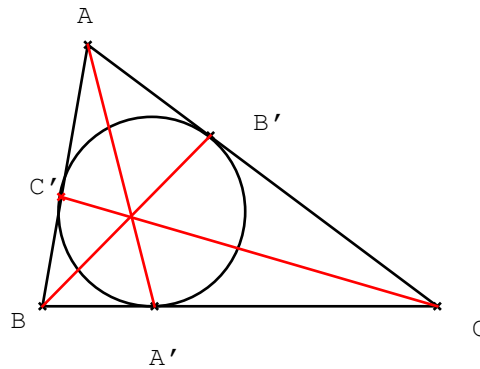


Figure 3.7

*Théorème de Brianchon appliqué au cercle inscrit*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Brianchon à l'hexagone  $AC'BA'CB'$ .  $\square$

### 3.3. Axe radical et autres lignes de niveau

Nous avons déjà rencontré un certain nombre de lignes de niveaux :

- $\{M \in \mathcal{E} : OM = r\}$ , i.e. celle du cercle de centre  $O \in \mathcal{E}$  et de rayon  $r$  ;
- $\{M \in \mathcal{E} : (\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB}) = 0\}$ , i.e. le cercle de diamètre  $[AB]$  ;
- $\{M \in \mathcal{E} : MA = MB\}$ , soit la médiatrice de  $[AB]$  ;
- $\{M \in \mathcal{E} : \widehat{AMB} = \alpha \pmod{\pi}\}$  est le cercle passant par  $A, B$  et de centre  $O$  tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\alpha \pmod{2\pi}$ .

On peut préciser le dernier point en considérant les angles des vecteurs.

**3.3.1. Proposition.** Soient  $A, B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$  et  $\alpha \in [0, 2\pi]$  un réel. L'ensemble des points  $M \in \mathcal{E}$  tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$  est un arc de cercle passant par les points  $A$  et  $B$  de centre  $O$  tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\alpha$  et délimité par  $(AB)$ , cf. la figure II-3.8. L'autre arc de cercle correspond à la ligne de niveau  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + \pi$ .

*Remarque :* avec les angles non orientés de vecteur, la ligne de niveau correspondante est la réunion de l'arc de cercle de la proposition précédente avec son symétrique par rapport à  $(AB)$ .

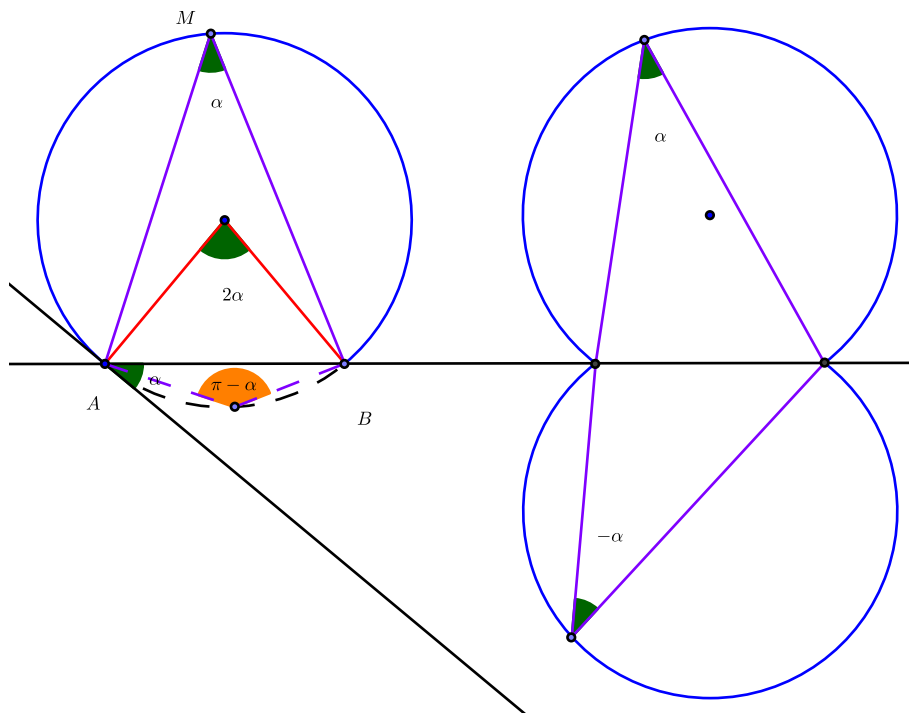


Figure 3.8

*Lignes de niveau : arcs capables*

**3.3.2. Proposition.** Soient  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(O, r)$  et  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'(O', r')$  deux cercles non concentriques. L'ensemble des points  $M \in \mathcal{E}$  qui ont même puissance par rapport à  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{S}'$  est la droite orthogonale à  $(OO')$  en le point  $H \in (OO')$  défini par

$$\overrightarrow{OH} = \frac{r^2 - (r')^2 + O'O^2}{2O'O^2} \overrightarrow{O'O}.$$

*Remarque :* pour deux cercles concentriques, la ligne de niveau considérée est clairement vide.

*Démonstration.* On cherche donc les points  $M \in \mathcal{E}$  tels que  $OM^2 - r^2 = O'm^2 - (r')^2$ . Si  $M \in (OO')$  alors on écrit

$$OM^2 - (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM})^2 = O'O^2 + 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{OM}$$

qui doit donc être égal à  $r^2 - (r')^2$ . Pour  $H \in (OO')$  tel que  $\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{O'O}$ , on obtient alors

$$-h \cdot O'O^2 = r^2 - (r')^2 - O'O^2$$

et donc  $\overrightarrow{OH} = \frac{r^2 - (r')^2 + O'O^2}{2O'O^2} \overrightarrow{O'O}$ . Pour  $M$  un point de la ligne de niveau, on note  $P$  son projeté orthogonal sur  $(OO')$ ; en décomposant  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$  et  $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{PM}$ , on obtient  $OP^2 - O'P^2 = r^2 - (r')^2$  et donc  $P = H$ . Ainsi les points  $M$  cherchés sont ceux dont la projection orthogonale sur  $(OO')$  est  $H$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque :* la proposition précédente et sa preuve sont valables en toute dimension, conduisant à la définition suivante.

**3.3.3. Définition.** L'hyperplan associé à la ligne de niveau de la proposition précédente s'appelle *l'hyperplan radical* de  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{S}'$ . En dimension 2 on parle plutôt *d'axe radical*.

**3.3.4. Corollaire.** Soient  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  trois cercles dont les centres ne sont pas alignés; il existe alors un unique point du plan, appelé *centre radical* de  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ , ayant même puissance par rapport à ces trois cercles.

*Démonstration.* Un tel point appartient nécessairement à l'axe radical de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ainsi qu'à celui de  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ . Ceux-ci étant deux droites non parallèles, puisque les centres des trois cercles ne sont pas alignés, ils s'intersectent en un unique point qui a donc même puissance par rapport à  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ .  $\square$

*Remarque :* rappelons, cf. la définition II-2.3.10, que deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont dits *orthogonaux* s'ils s'intersectent et que leurs tangentes en leurs points d'intersection sont orthogonales.

*Remarque :* par symétrie par rapport à la droite joignant les centres de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , la propriété d'orthogonalité de la définition précédente est simultanément vérifiée pour les deux points d'intersection.

**3.3.5. Proposition.** Deux cercles de centres  $O$  et  $O'$  et de rayons  $R$  et  $R'$  sont orthogonaux si et seulement si  $O'O^2 = R^2 + (R')^2$ .

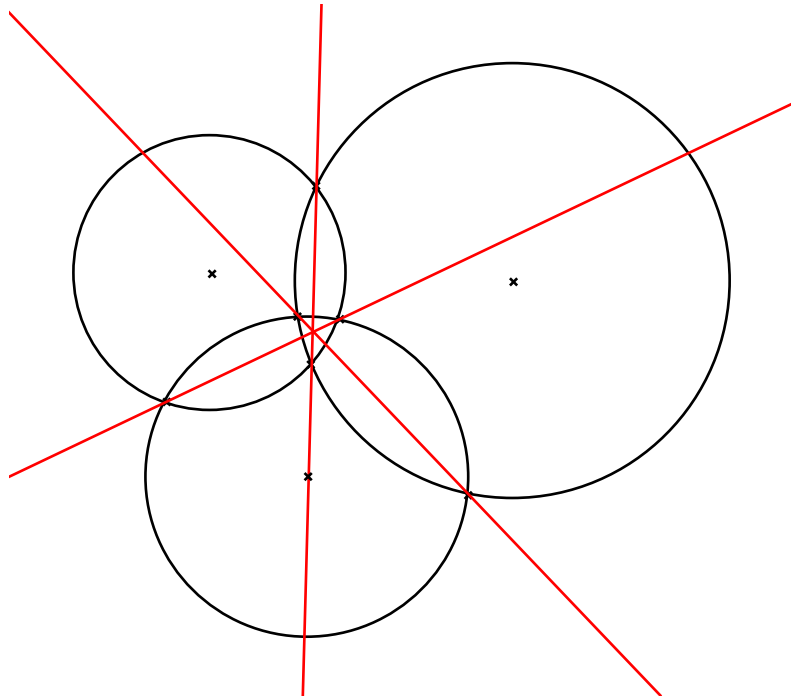


Figure 3.9

Centre radical de trois cercles

*Démonstration.* La relation découle simplement du théorème de Pythagore appliquée dans le triangle  $AOO'$  rectangle en  $A$  un des points d'intersection de ces deux cercles.  $\square$

**3.3.6. Corollaire.** Soient deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  extérieurs l'un par rapport à l'autre. L'ensemble des points  $M$  du plan centre d'un cercle orthogonal simultanément à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , est l'axe radical de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

*Démonstration.* Pour un tel point  $M$  on doit avoir  $OM^2 = R^2 + r^2$  et  $O'M^2 = (R')^2 + r^2$  où  $r$  désigne le rayon d'un tel cercle. On en déduit alors  $OM^2 - R^2 = O'M^2 - (R')^2$  et donc  $M$  appartient à l'axe radical de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Réciproquement pour  $M$  appartenant à cet axe radical  $\mathcal{D}$ , comme  $\mathcal{D}$  est extérieur à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , on a  $OM^2 - R^2 = O'M^2 - (R')^2 \geq 0$  ce qui permet de définir  $r$  leur racine carrée. Le cercle de centre  $M$  et de rayon  $r$  est, d'après la proposition précédente, orthogonal à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .  $\square$

*Remarque :* on renvoie le lecteur au §III-2.2 pour une discussion sur ce thème en termes de faisceaux de cercles. Un exemple classique d'un faisceau

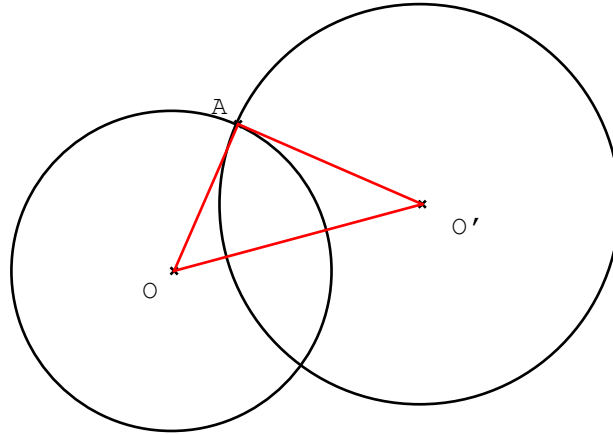


Figure 3.10  
Cercles orthogonaux

de cercle est l'ensemble des lignes de niveau  $\{M : \frac{MA}{MB} = \lambda\}$  où :

- $A$  et  $B$  sont deux points distincts et
- où on fait varier  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Plus généralement on appelle ligne de niveau de Liebnitz les lignes de niveau suivantes.

**3.3.7. Proposition.** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des points de  $\mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  des scalaires ; on note  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i MA_i^2$  et pour  $k \in \mathbb{R}$  on note  $\mathcal{L}_k = \{M \in \mathcal{E} : f(M) = k\}$ .

(1) Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  alors on rappelle que  $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{OA}_i$  est un vecteur indépendant du point  $O$  considéré :

(i) si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , la ligne de niveau  $\mathcal{L}_k = \{M \in \mathcal{E} : (\vec{OM}, \vec{u}) = \frac{f(O) - k}{2}\}$ , soit une droite orthogonale à  $(O, \vec{u})$  ;

(ii) si  $\vec{u} = \vec{0}$  alors  $f$  est une fonction constante et toutes les lignes de niveau sont vides sauf une égale à tout l'espace.

(2) Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$  alors on note  $G$  le barycentres des points pondérés  $(A_i, \lambda_i)$ . Alors les lignes de niveau sont des cercles centrés en  $G$  et de rayon  $\sqrt{\frac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}}$  étant entendu qu'ils sont vides dans le cas où la



fraction  $\frac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$  est  $< 0$ .

*Démonstration.* On décompose  $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$  et on calcule

$$f(M) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)OM^2 + 2(\overrightarrow{MO} | \vec{u}) + f(O)$$

de sorte que si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  alors  $f(M) = f(O) + 2(\overrightarrow{MO} | \vec{u})$  et on retrouve les situations (i) et (ii) de l'énoncé.

Dans le cas (2) pour  $O = G$ , on obtient  $f(M) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i)GM^2 + f(G)$  et on retrouve l'affirmation de l'énoncé.  $\square$

### 3.4. Relations trigonométriques dans le triangle

Étant donné un triangle  $ABC$ , on note :

- $a, b, c$  les longueurs respectives des segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$  et on pose  $p = (a + b + c)/2$  le demi-périmètre ;
- $S$  l'aire de  $ABC$  ;
- $R$  le rayon du cercle circonscrit ;
- $\alpha, \beta, \gamma$  les angles aux sommets.

Comme déjà observé cela fait 8 invariants euclidiens associés à un triangle alors que l'espace des tels triangles modulo l'action du groupe euclidien est de dimension 3, d'où l'existence de relations entre ces paramètres que l'on se propose d'expliciter dans ce paragraphes. Rappelons que la première relation entre ces paramètres était  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

#### 3.4.1. Proposition.

*La loi des sinus est la relation suivante*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

*Démonstration.* On a clairement  $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$  ce qui donne les trois premières égalités. Pour la dernière, on considère dans le cercle circonscrit le point  $A'$  diamétralement opposé à  $A$ . Le triangle  $AA'C$  étant rectangle en  $C$ , on en déduit alors  $b = 2R \sin \beta$ , en utilisant le théorème de l'angle au centre (en effet  $\sin \beta = \sin \widehat{AA'C}$ ).  $\square$

#### 3.4.2. Proposition.

*La formule d'Al-Kashi est la relation suivante*

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

*Démonstration.* On écrit simplement  $a^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2$ .  $\square$

*Remarque :* on peut aussi exprimer la puissance de  $A$  par rapport au cercle de centre  $B$  passant par  $C$  : cette puissance est égale à  $c^2 - a^2$  et aussi à  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$  où  $D$  est le deuxième point d'intersection de  $(AC)$  avec ce cercle, soit  $b(b - 2a \cos \gamma)$  d'où le résultat. Il existe d'autres démonstrations qui utilisent des découpages d'aires.

À ce stade nous avons trouvé 8 relations (une pour la somme des angles, 4 pour la loi des sinus et 3 pour Al-Kashi) sur nos 8 paramètres de sorte que ces relations ne sont pas indépendantes entre elles. Remarquons tout d'abord que :

- si  $a, b, c$  sont donnés alors on retrouve  $\alpha, \beta, \gamma$  grâce à Al-Kashi puis  $S$  et  $R$  via la loi des sinus.
- si  $a, b, \gamma$  sont donnés alors  $c$  se calcule par Al-Kashi puis les autres paramètres en utilisant le point précédent.
- si  $a, \beta, \gamma$  sont donnés, les deux relations d'Al-Kashi pour  $\beta$  et  $\gamma$  permettent de calculer  $b$  et  $c$  et on conclut comme précédemment.
- si  $a, b, R$  (resp.  $\alpha, \beta, R$ , resp.  $a, \beta, R$ ) sont donnés alors la loi des sinus donne  $\alpha$  (resp.  $a$ , resp.  $\alpha$ ) et on conclut comme avant.
- si  $a, b, S$  sont donnés alors la loi des sinus donne  $\gamma$  et on conclut comme avant.
- si  $a, \beta, S$  sont donnés alors  $c$  se calcule par la loi des sinus et on conclut comme avant.
- si  $\alpha, \beta, S$  sont donnés alors le triangle est défini à similitude près et  $S$  fixe le rapport de similitude donc tous les paramètres sont fixés.
- si  $\alpha, S, R$  sont fixés alors, d'après le théorème de l'angle au centre cela fixe  $a$  et on se ramène à un des cas déjà étudiés.
- si  $a, S, R$  sont fixés alors le théorème de l'angle au centre fixe  $\alpha$  et on conclut comme ci-avant.
- si  $a, \beta, R$  sont fixés alors le théorème de l'angle au centre donne  $\alpha$  et on se ramène à une des situations déjà étudiées.
- si  $\alpha, \beta, R$  sont donnés alors d'après le théorème de l'angle au centre on obtient  $a$  et  $b$  soit une situation déjà traitée.

Ainsi pour choix de paramètres fondamentaux, tous les choix raisonnables, i.e. en écartant ceux où les trois paramètres sont dans une même relation, conviennent et les relations données sont génératrices au sens où elles permettent d'obtenir tous les autres paramètres. À priori nous avons trop de relations puisque 5 devraient suffire. Pour en extraire 5 fondamentales qui permettent d'obtenir toutes les autres commençons par le calcul suivant.

**3.4.3. Corollaire.** On a  $\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\ &= \frac{-b^4 - c^4 - a^4 + 2b^2c^2 + 2b^2a^2 + 2c^2a^2}{4b^2c^2} \end{aligned}$$

et on vérifie en développant que  $16p(p-a)(p-b)(p-c) = -b^4 - c^4 - a^4 + 2b^2c^2 + 2b^2a^2 + 2c^2a^2$ .  $\square$

Ainsi partant des relations suivantes :

- $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  ;
- $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  ;
- $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$  ;
- $2S = bc \sin \alpha$  ;
- $4RS = abc$ ,

il est possible d'obtenir toutes les autres. En effet, d'après le corollaire précédent, on exprime  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$  en fonction de  $a, b, c$  de sorte que  $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$  s'exprime en fonction de  $a, b, c$  ce qui est la troisième relation d'Al-Kashi. Le corollaire précédent avec les deux relations  $2S = bc \sin \alpha$  et  $4RS = abc$  donnent enfin toute la loi des sinus. Signalons aussi qu'habituellement le corollaire précédent s'exprime par la formule de Héron suivante.

**3.4.4. Corollaire.**

*La formule de Héron* est la relation  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

*Démonstration.* On part de  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$  et de

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{ab}{2} \sqrt{(1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma)} \\ &= \frac{ab}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right) \left(1 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\left((a+b)^2 - c^2\right) \left(c^2 - (a-b)^2\right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)} \end{aligned}$$

et la formule s'obtient en substituant  $a = 2p - b - c$ .  $\square$

*Remarque :* la formule de Héron présente une instabilité numérique pour les triangles dont un côté est très petit par rapport aux deux autres ; pour

y remédier mieux vaut utiliser la formule

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a + (b + c))(c - (a - b))(c + (a - b))(a + (b - c))}$$

où  $a > b > c$ .

Parmi les invariants numériques associés à un triangle, on aurait pu aussi mentionner le rayon  $r$  du cercle inscrit. La relation avec les autres données est fournie par la proposition suivante.

**3.4.5. Proposition.** *On a  $S = pr$ .*

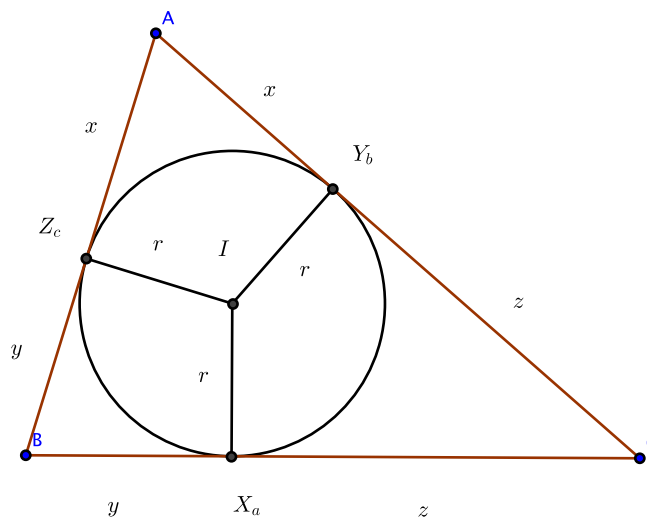


Figure 3.11  
Sur le cercle inscrit

*Démonstration.* Avec les notations de la figure II-3.11, en additionnant les égalités  $y + z = a$ ,  $z + x = b$  et  $x + y = c$ , on obtient  $x + y + z = p$  ce qui donne  $x = p - a$ ,  $y = p - b$  et  $z = p - c$  où  $2p = a + b + c$ . Par ailleurs on a  $\mathcal{A}(IBC) = ar/2$ ,  $\mathcal{A}(IAB) = cr/2$  et  $\mathcal{A}(IAC) = br/2$  et donc  $\mathcal{A}(ABC) = pr$ .  $\square$

*Remarque :* avec les notations de la figure II-3.12,  $r_a$  désigne le rayon du cercle exinscrit du triangle  $ABC$  qui touche  $BC$  en  $X_a$  dont le centre est  $I_a$ . On a  $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(I_aCA) + \mathcal{A}(I_aAB) - \mathcal{A}(I_aCB)$  de sorte que d'après le résultat précédent, on a  $\mathcal{A}(ABC) = \frac{b+c-2a}{2}r_a = (p-a)r_a$ . On peut aussi remarquer que les triangles  $AI_aY_a$  et  $AIY$  sont semblables de sorte que  $\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}$ . Par symétrie du problème, on a aussi  $\frac{r_b}{r} = \frac{p}{p-b}$  et  $\frac{r_c}{r} = \frac{p}{p-c}$  de sorte que

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p} = 1.$$

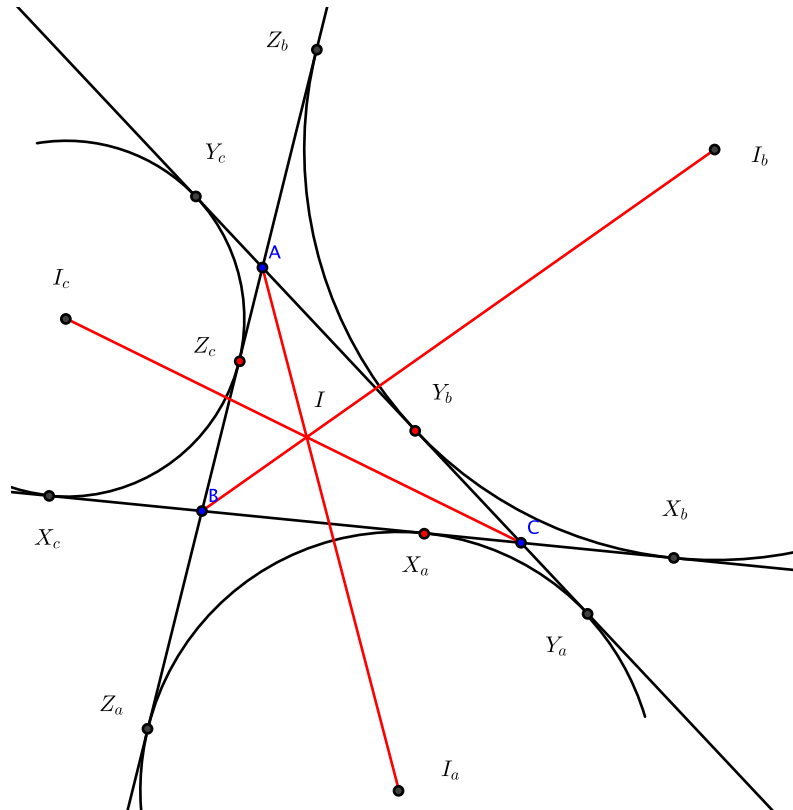


Figure 3.12  
Sur le cercle inscrit

Signalons d'autres relations classiques car élégantes.

**3.4.6. Corollaire.** On a  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ .

*Démonstration.* on a  $\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha)/2 = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)/2$  et on vérifie que  $4(p-b)(p-c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ .  $\square$

**3.4.7. Corollaire.** On a  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ .

*Démonstration.* on a  $\cos^2(\alpha/2) = 1 - \sin^2(\alpha/2) = p(p-a)/bc$ .  $\square$

### 3.5. Triangles semblables

Le groupe des similitudes étant de dimension 4, il nous faut deux paramètres pour classifier les triangles à similitude près. Nous disposons des invariants numériques suivants :

- $\alpha, \beta, \gamma$  les trois angles aux sommets ;
- les rapports  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{c}$  et  $\frac{c}{a}$  des longueurs des côtés.

En ce qui concerne les relations, nous avons :

- $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  ;
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$  ;
- les formules d'Al-Kashi que l'on écrit sous la forme

$$2\cos \alpha = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}.$$

*Remarque :*  $\frac{S}{ab} = \frac{1}{2} \sin \gamma$  est aussi un invariant numérique de la géométrie semblable ainsi donc que  $\frac{S}{bc}$  et  $\frac{S}{ac}$ . De la loi des sinus on en déduit alors que  $\frac{R}{a} = \frac{bc}{4S}$  est un invariant ainsi donc que  $\frac{R}{b}$  et  $\frac{R}{c}$  ; il en est de même pour  $\frac{r}{a}$ ,  $\frac{r}{b}$  et  $\frac{r}{c}$ .

En ce qui concerne la description des triangles du plan affine à similitudes près il sont classifiés par :

- l'ensemble des couples  $(\alpha, \beta)$  d'éléments de  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  tels que  $\alpha + \beta \leq \pi$ . On récupère les longueurs des côtés à homothéties près en procédant comme dans le cas euclidien ; par exemple la donnée de  $a = 1, \alpha, \beta$  permet de préciser toutes les autres données. On peut aussi décrire l'ensemble des paramètres comme  $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/\mathfrak{S}_3$ , au sens de la définition III-1.1.1, en associant à  $(a : b : c)$  le triplet  $(\frac{\pi a}{a+b+c}, \frac{\pi b}{a+b+c}, \frac{\pi c}{a+b+c})$ .
- l'ensemble des couples  $(\alpha, \frac{b}{c}) \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^\times$  ; la formule d'Al-Kashi pour  $\cos \alpha$  permet d'obtenir  $\frac{a}{b}$  et donc  $\frac{a}{c}$  puis on procède comme dans le cas isométrique.

- l'ensemble  $(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}) \in (\mathbb{R}_+^{\times})^2$ ; pour  $a = 1$  cela donne  $b, c$  et on continue comme dans le cas isométriques en libérant à la fin le paramètre  $a$ .

**3.5.1. Corollaire. (Théorème de Pythagore)**

Pour tout triangle rectangle en  $A$ , on a la relation

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1.$$

*Remarque* : partant de l'algèbre linéaire euclidienne, le théorème de Pythagore est intrinsèque à la théorie. La preuve que nous présentons ici n'a de sens que dans une présentation axiomatique de la géométrie euclidienne à la Euclide.

*Démonstration.* On note  $AH$  la hauteur menée de  $A$  sur  $BC$ , les triangles  $ABC$  et  $AHB$  sont semblables de sorte que  $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$ . De même on a  $CH^2 = CH.CB$  et donc  $AB^2 + AC^2 = (BH + HC)BC = BC^2$ ;  $\square$

Dans le même esprit citons le fameux théorème dit du papillon, car son dessin ressemble à un papillon stylisé.

**3.5.2. Théorème. (du papillon)**

Soit  $[PQ]$  une corde d'un cercle  $\mathcal{C}$ ; on note  $M$  le milieu de  $[PQ]$  et on considère deux cordes  $[AB]$  et  $[CD]$  de  $\mathcal{C}$  passant par  $M$ . On note  $X$  et  $Y$  les intersections de  $AD$  et  $CB$  avec  $PQ$  alors  $M$  est aussi le milieu de  $[XY]$ .

*Démonstration.* Les notations sont celles de la figure II-3.13 :  $X_1$  et  $X_2$  (resp.  $Y_1$  et  $Y_2$ ) sont les projetés orthogonaux de  $X$  (resp.  $Y$ ) sur  $AB$  et  $CD$ . On note  $a = MP = MQ$ ,  $x = XM$  et  $y = YM$ . On observe alors un certain nombre de triangles semblables qui nous donne des relations :

- $MX_1X$  et  $MY_1Y$  :  $x/y = XX_1/YY_1$ ;
- $MX_2X$  et  $MY_2Y$  :  $x/y = XX_2/YY_2$ ;
- $AX_1X$  et  $CY_2Y$  :  $XX_1/YY_2 = AX/CY$ ;
- $DXX_2$  et  $BYY_1$  :  $XX_2/YY_1 = XD/YB$ .

On en déduit alors

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{XX_1}{YY_2} \cdot \frac{XX_2}{YY_1} = \frac{AX.XD}{CY.YB}.$$

De même les triangles  $PXA$  et  $DXQ$  (resp.  $QYC$  et  $BYP$ ) étant semblables, on en déduit que  $\frac{AX.XD}{CY.YB} = \frac{PX.XQ}{PY.YQ}$  et donc  $x^2/y^2 = (a - x)(a + x)/(a - y)(a + y) = (A^2 - x^2)/(a^2 - y^2) = a^2/a^2 = 1$  soit  $x = y$ .  $\square$

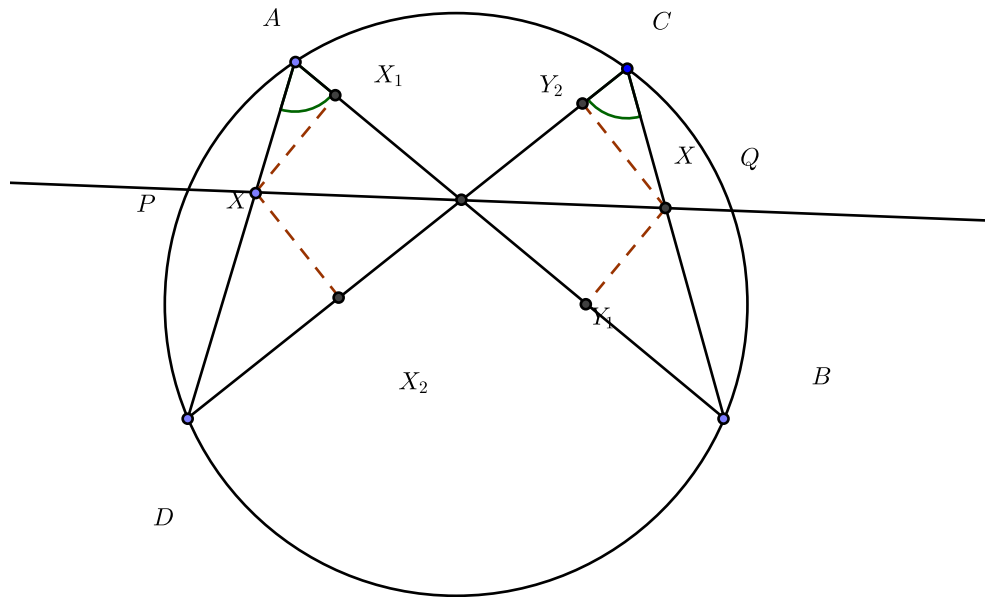


Figure 3.13  
*Butterfly*

## 4. Quelques classiques de la géométrie euclidienne

### 4.1. Points de concours et leurs coordonnées barycentriques

Rappelons que dans le repère affine  $A, B, C$ , les coordonnées barycentriques homogènes  $(x_A : x_B : x_C)$  d'un point  $M$  sont telles que

$$x_A \overrightarrow{MA} + x_B \overrightarrow{MB} + x_C \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

et ne sont définies qu'à un scalaire multiplicatif près, i.e. définissent un élément de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Commençons par quelques uns des points classiques d'un triangle.

**4.1.1. Proposition.** *Le centre  $O$  du cercle circonscrit a pour coordonnées barycentriques homogènes*

$$(x_A : x_B : x_C) = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma) = (a \cos \alpha : b \cos \beta : c \cos \gamma).$$



*Démonstration.* D'après le théorème de l'angle inscrit on a  $\widehat{AOB} = 2\gamma$ ,  $\widehat{AOC} = 2\beta$  et  $\widehat{BOC} = 2\alpha$ . On prend alors le déterminant de  $x_A \overrightarrow{OA} + x_B \overrightarrow{OB} + x_C \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  avec  $\overrightarrow{OA}$  ce qui donne  $x_B R^2 \sin 2\beta - x_C R^2 \sin 2\gamma = 0$  et donc  $\frac{x_B}{x_C} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma}$  et par permutation circulaire  $\frac{x_C}{x_A} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}$  d'où le premier résultat. Pour le deuxième, on note que  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{R} a \cos \alpha$  ce qui fournit le deuxième résultat.  $\square$

*Remarque :* il est aussi possible d'utiliser la proposition I-2.2.5, à savoir que les coordonnées barycentriques d'un point  $M$  du plan par rapport à  $ABC$  sont données par les aires signées des triangles  $MBC$ ,  $MAC$  et  $MAB$ . On calcule alors  $2\mathcal{A}(OBC) = a(R^2 - a^2/4)^{1/2} = \frac{a^2 \cos \alpha}{4 \sin \alpha} = \frac{R}{2} a \cos \alpha$ , ce qui donne le deuxième résultat.

**4.1.2. Proposition.** *Les bissectrices sont concourantes au centre du cercle inscrit dont les coordonnées barycentriques homogènes sont*

$$(a : b : c) = (\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma).$$

*Démonstration.* Notons  $X$  l'intersection de la bissectrice issue de  $A$  avec  $(BC)$ ; la loi des sinus dans le triangle  $ABX$  (resp.  $AXC$ ) donne  $\frac{BX}{\sin(\alpha/2)} = \frac{c}{\sin \widehat{BXA}}$  (resp.  $\frac{CX}{\sin(\alpha/2)} = \frac{b}{\sin \widehat{CXA}}$ ) de sorte que  $\frac{BX}{CX} = -\frac{c}{b}$ . De manière équivalente cela revient à dire que les coordonnées barycentriques de  $X$  sont  $(0 : b : c)$ .

On procède de même avec les intersections  $Y, Z$  respectives des bissectrices issues de  $B, C$  avec  $(AC)$  et  $(AB)$ , ce qui donne  $\frac{CY}{AY} = -\frac{a}{c}$  et  $\frac{AZ}{BZ} = -\frac{b}{a}$ , ou encore  $Y$  et  $Z$  ont pour coordonnées barycentriques homogènes  $(a : 0 : c)$  et  $(a : b : 0)$ . Le résultat découle alors du théorème de Ceva et de sa forme barycentrique donnée par le théorème I-3.2.9 et la remarque qui le suit. En ce qui concerne la deuxième formule elle découle de la loi des sinus.  $\square$

**4.1.3. Proposition.** *Les coordonnées barycentriques homogènes de l'orthocentre  $H$  sont*

$$\begin{aligned} (x_A : x_B : x_C) &= (a \cos \beta \cos \gamma : b \cos \alpha \cos \gamma : c \cos \alpha \cos \beta) \\ &= (\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par construction  $H$  est le barycentre de  $A$  et  $A'$  où  $A'$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ . Les coordonnées barycentriques

homogènes de  $A'$  sont  $(0, b\cos\gamma, c\cos\beta)$  de sorte que celle de  $H$  sont  $(x_A : b\cos\alpha : c\cos\beta)$ . L'orthocentre  $H$  est aussi barycentre de  $C' = (a\cos\beta : b\cos\alpha : 0)$  et  $C$  de sorte que  $(x_A : b\cos\alpha)$  est égal à  $(a\cos\beta : b\cos\alpha)$  ce qui donne  $x_a = a\cos\beta\cos\gamma/\cos\alpha$  d'où le résultat. En ce qui concerne la deuxième formule elle découle de la loi des sinus.  $\square$

**4.1.4. Proposition. (Point de Fermat)**

Pour un triangle  $ABC$  avec  $0 < \alpha, \beta, \gamma < 2\pi/3$ , on considère  $A', B', C'$  tels que  $BAC', CBA'$  et  $ACB'$  soient des triangles équilatéraux construits à l'extérieur de  $ABC$ , cf. la figure II-4.1. Les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont alors concourantes au point dit de Toricelli ou de Fermat dont les coordonnées barycentriques homogènes sont

$$(a\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) : b\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) : c\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)).$$

*Remarque : le point de Toricelli* est par définition l'unique point  $P$  qui minimise  $PA + PB + PC$ ; dans l'exercice ?? nous montrerons le point de Fermat coïncide avec le point de Toricelli.

*Démonstration.* On calcule  $\det(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) = a\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)$ , de sorte que les coordonnées barycentriques de  $A'$  sont

$$(a\sin\frac{\pi}{3} : b\sin(\gamma + \frac{\pi}{3}) : c\sin(\beta + \frac{\pi}{3})).$$

On en déduit alors qu'une équation barycentrique de  $(AA')$  est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & a\sin\frac{\pi}{3} & x \\ 0 & b\sin(\gamma + \frac{\pi}{3}) & y \\ 0 & c\sin(\beta + \frac{\pi}{3}) & z \end{vmatrix} = -b\sin(\gamma + \frac{\pi}{3})z + c\sin(\beta + \frac{\pi}{3})y.$$

On remarque alors que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -c\sin(\beta + \frac{\pi}{3}) & b\sin(\gamma + \frac{\pi}{3}) \\ c\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) & 0 & -a\sin(\gamma + \frac{\pi}{3}) \\ -b\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) & a\sin(\beta + \frac{\pi}{3}) & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible avec pour vecteur dans le noyau

$$(a\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma), b\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma), c\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)),$$

et donc les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en un point de coordonnées barycentriques homogènes

$$(a\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) : b\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) : c\sin(\frac{\pi}{3} + \beta)\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)).$$

$\square$

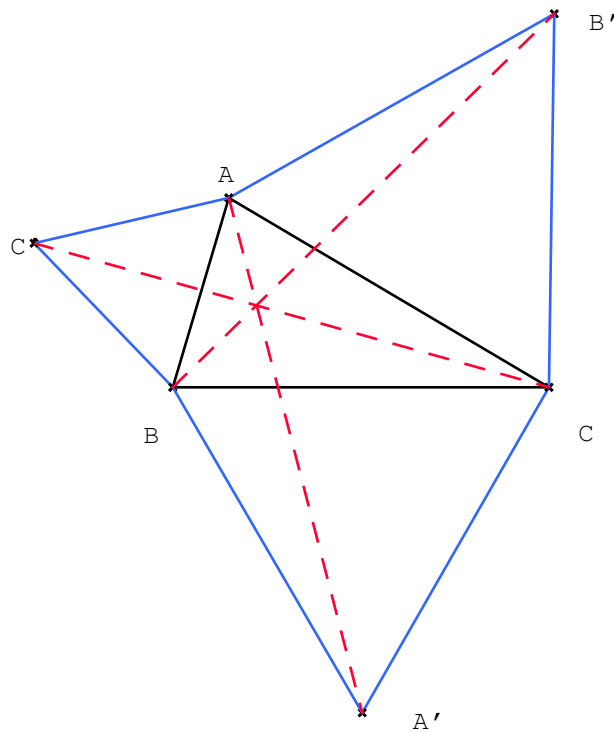


Figure 4.1  
Point de Fermat

**4.1.5. Proposition. (Point de Gergonne)**

Notons  $D, E, F$  les points de contact du cercle inscrit d'un triangle  $ABC$  avec ses côtés, alors les droites  $AE, BF$  et  $CD$  sont concourantes au point dit de Gergonne dont les coordonnées barycentriques homogènes sont  $(\tan \frac{\alpha}{2} : \tan \frac{\beta}{2} : \tan \frac{\gamma}{2})$ .

*Démonstration.* On a  $AD = AF, BD = BE$  et  $CE = CF$  de sorte que  $\frac{DA}{DB} \frac{EB}{EC} \frac{FC}{FA} = -1$  et l'existence du point de Gergonne découle du théorème de Ceva. Dans le triangle rectangle  $BEI$  où  $I$  est le centre du cercle inscrit, on a  $BE \cdot \tan \frac{\beta}{2} = r$ ; de même  $CE \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = r$  de sorte que  $E$

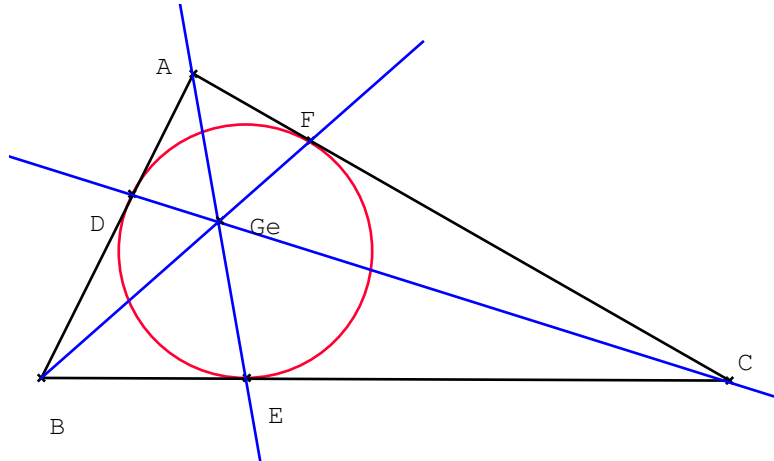


Figure 4.2

a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : \tan \frac{\beta}{2} : \tan \frac{\gamma}{2})$ . Par permutations circulaires,  $D$  (resp.  $F$ ) a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(\tan \frac{\alpha}{2} : \tan \frac{\beta}{2} : 0)$  (resp.  $(\tan \frac{\alpha}{2} : 0 : \tan \frac{\gamma}{2})$ ) et le résultat découle de I-3.2.9.  $\square$

*Remarque :* la droite pédale au sens de la définition I-3.2.7, du point de Gergonne s'appelle la droite de Gergonne.

**4.1.6. Définition.** Dans un triangle  $ABC$ , la *symédiane* de  $A$  est la symétrique de la médiane issue de  $A$  par rapport à la bissectrice issue de  $A$ .

**4.1.7. Proposition. (Point de Lemoine)**

Les symédianes d'un triangle sont concourantes en un point dit de Lemoine dont les coordonnées barycentriques homogènes sont  $(a^2 : b^2 : c^2)$ .

*Démonstration.* On applique la loi des sinus dans les triangles suivant :

$$\begin{aligned}
 - ABS_a &: \frac{BS_a}{\sin \widehat{BAS_a}} = \frac{AB}{\sin \widehat{BS_aA}}; \\
 - AS_aC &: \frac{AC}{\sin \widehat{BS_aA}} = \frac{CS_a}{\sin \widehat{S_aAC}}; \\
 - ABM_a &: \frac{BM_a}{\sin \widehat{S_aAC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{BM_aA}};
 \end{aligned}$$

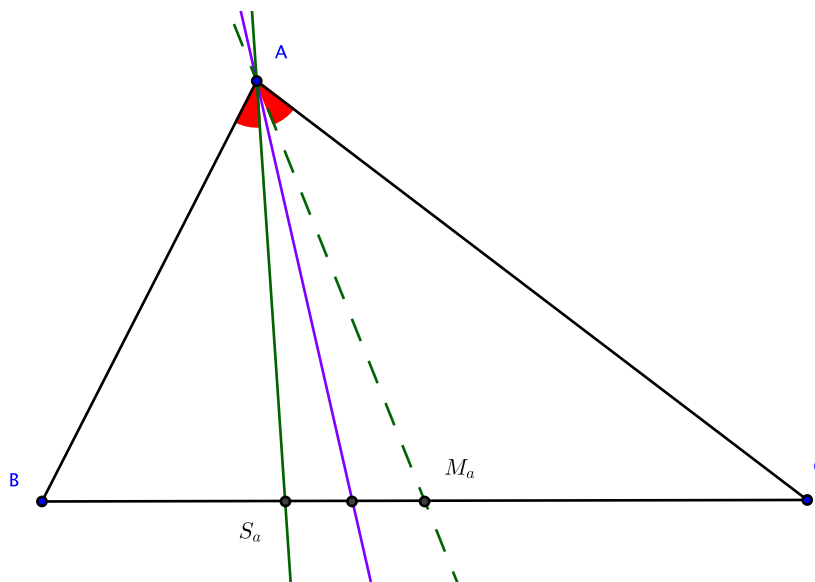


Figure 4.3

Symédiane issue de A dans un triangle ABC

$$- AM_aC : \frac{CM_a}{\sin \widehat{BAS_a}} = \frac{AC}{\sin \widehat{BM_aA}}.$$

On en déduit alors

$$\frac{BS_a}{CS_a} = \frac{AB}{AC} \frac{\sin \widehat{BAS_a}}{\sin \widehat{S_aAC}}, \quad 1 = \frac{BM_a}{CM_a} = \frac{AB}{AC} \frac{\sin \widehat{S_aAC}}{\sin \widehat{BAS_a}}$$

de sorte que  $\frac{BS_a}{CS_a} = \frac{AB^2}{AC^2}$ , ou encore que les coordonnées barycentriques homogènes de  $S_a$  sont  $(0 : b^2 : c^2)$ .

Par permutations circulaires on a les mêmes égalités concernant  $S_b$  et  $S_c$

de sorte que  $\frac{\overline{S_bA}}{\overline{S_bC}} \frac{\overline{S_aC}}{\overline{S_aB}} \frac{\overline{S_cB}}{\overline{S_cA}} = -1$  et le résultat découle du théorème de Ceva.

□

#### 4.1.8. Proposition. (Point de Nagel)

Notons  $X_a$  resp.  $X_b$  et  $X_c$ ) le point de contact du cercle exinscrit au triangle ABC au côté BC (resp. AC et AB). Les droites  $AX_a$ ,  $BX_b$  et  $CX_c$  sont alors concourantes au point de Nagel dont les coordonnées barycentriques homogènes sont  $(p - a : p - b : p - c)$ .

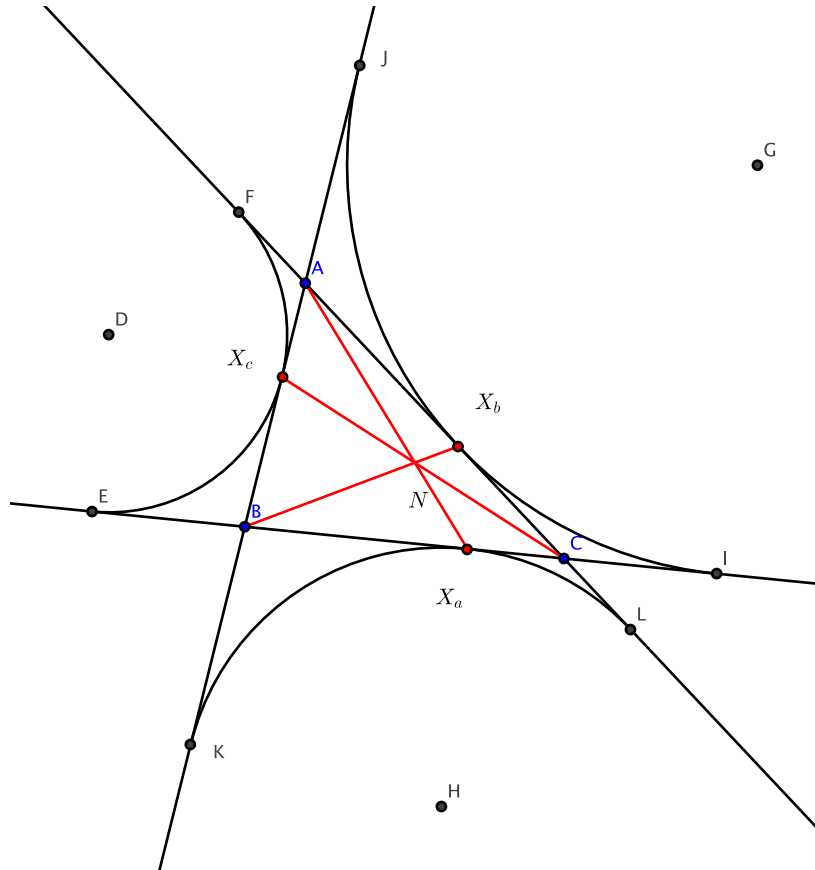


Figure 4.4

*Démonstration.* On a  $AB + BX_a = AC + X_a$  de sorte qu'en notant  $p = (a + b + c)/2$  le demi-périmètre du triangle  $ABC$ , on a  $BX_a = p - c$  et  $CX_a = p - b$  de sorte que  $\frac{X_aB}{X_aC} = -\frac{p-c}{p-b}$ , ou encore  $X_a$  a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : p - b : p - c)$ .

Par permutations circulaires on en déduit que  $\frac{X_bA}{X_bC} \frac{X_aC}{X_aB} \frac{X_cB}{X_cA} = -1$  et le résultat découle du théorème de Ceva et de sa version barycentrique, cf. I-3.2.9.  $\square$

**4.1.9. Proposition.** Soit  $ABC$  un triangle non dégénéré et  $A_1, B_1$  et  $C_1$  les milieux respectifs des segments  $[BC], [AC]$  et  $[AB]$ . Pour  $P$  n'appartenant pas aux côtés de  $ABC$ , on note  $A_P, B_P$  et  $C_P$  les pieds des céviennes

issues de  $P$ . Soient alors  $A'_P, B'_P$  et  $C'_P$  les symétriques respectifs de  $A_P, B_P$  et  $C_P$  par rapport à  $A_1, B_1$  et  $C_1$ . Les droites  $(AA'_P), (BB'_P)$  et  $(CC'_P)$  sont concourantes en un point  $P'$ .

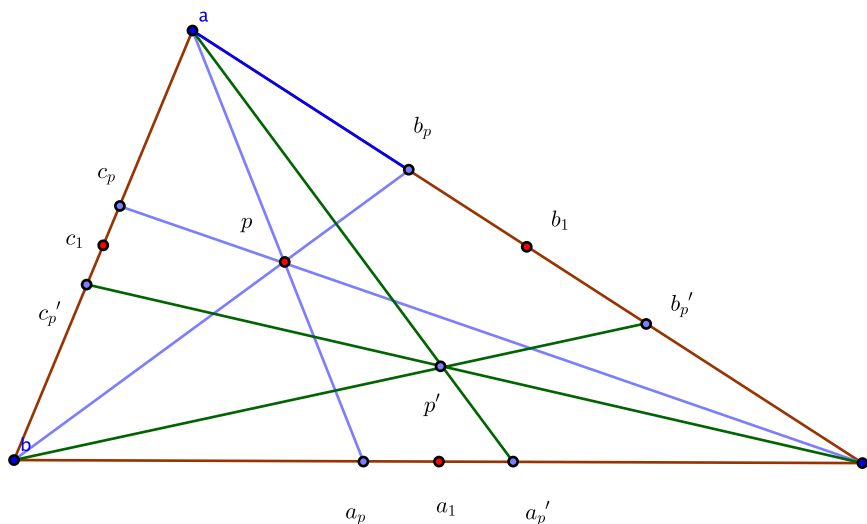


Figure 4.5  
Points réciproques

*Démonstration.* Notons  $(x : y : z)$  des coordonnées barycentriques de  $P$  de sorte que dans le repère  $(A, B, C)$ , le point  $A_P$  a, d'après le lemme I-3.2.4,  $(0 : y : z)$  pour coordonnées barycentriques et donc des coordonnées barycentriques de  $A_1$  sont  $(0 : z : y) = (0 : y^{-1} : z^{-1})$ . Par symétrie des coordonnées barycentriques de  $B_P$  (resp.  $C_P$ ) sont  $(x^{-1} : 0 : z^{-1})$  (resp.  $(x^{-1} : y^{-1} : 0)$ ) et le résultat découle du théorème de Ceva.  $\square$

**4.1.10. Définition.** On dit que les céviennes issues de  $P$  et  $P'$  sont isotomiques ; les points  $P$  et  $P'$  sont dits réciproques l'un de l'autre.

**4.1.11. Définition.** Le triangle  $A_P B_P C_P$  est appelé *le triangle pédal* de  $P$  ; son cercle circonscrit est dit le *cercle pédal* de  $P$ . Dans le cas où  $P$  est l'orthocentre (resp. isobarycentre), le triangle pédal associé est appelé *le triangle orthique* (resp. *le triangle médian*).

**4.1.12. Proposition. (Point de Terquem)**

Le cercle pédal de  $P$  recoupe le triangle  $ABC$  en des points  $A', B', C'$  tels que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

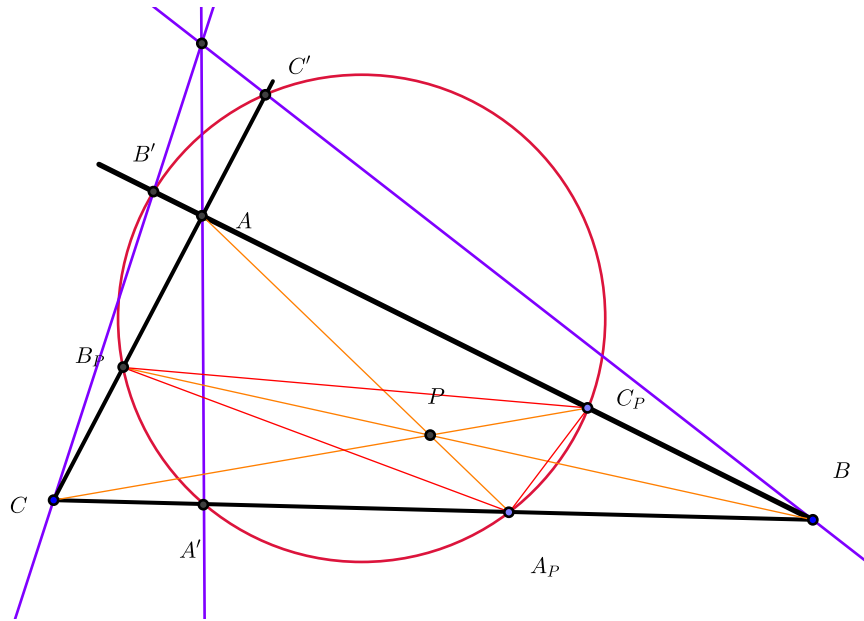


Figure 4.6  
Points de Terquem

*Démonstration.* D'après le théorème de Ceva on a

$$\frac{\overline{A_P B}}{\overline{A_P C}} \cdot \frac{\overline{B_P C}}{\overline{B_P A}} \cdot \frac{\overline{C_P A}}{\overline{C_P B}} = -1. \quad (1)$$

La puissance des points  $A, B, C$  par rapport au cercle pédal, fournit les égalités suivantes :

$$\overline{B_P A} \cdot \overline{B' A} = \overline{C_P A C' A}, \quad \overline{A_P B} \cdot \overline{A' B} = \overline{C_P B C' B}, \quad \overline{B_P C} \cdot \overline{B' C} = \overline{A_P C A' C}$$

ce qui donne

$$\frac{\overline{C_P A}}{\overline{B_P A}} = \frac{\overline{B' A}}{\overline{C' A}}, \quad \frac{\overline{C_P B}}{\overline{A_P B}} = \frac{\overline{A' C}}{\overline{B' C}}, \quad \frac{\overline{B_P C}}{\overline{A_P C}} = \frac{\overline{A' C}}{\overline{B' C}}$$

en faisant le produit de ces trois égalités et en utilisant l'égalité (II-1), on obtient

$$\frac{\overline{A' B}}{\overline{A' C}} \cdot \frac{\overline{B' C}}{\overline{B' A}} \cdot \frac{\overline{C' A}}{\overline{C' B}} = -1,$$



§4. Quelques classiques de la géométrie euclidienne 77

ce qui prouve le résultat d'après le théorème de Ceva. □

Pour un point du plan  $P$  quelconque, que l'on peut repérer à l'aide des deux paramètres que sont les angles  $\theta = (\widehat{BC}, \widehat{BP})$  et  $\phi = (\widehat{CP}, \widehat{CB})$  comme sur la figure II-4.7, Conway a proposé une formule donnant ses coordonnées barycentriques homogènes que nous nous proposons de présenter dans ce qui suit.

**Convention :** jusque la fin de ce paragraphe  $S$  désignera le double de l'aire du triangle  $ABC$ .

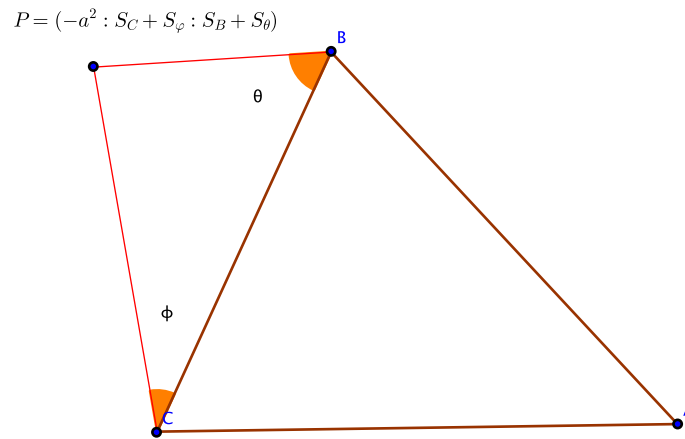


Figure 4.7  
Formule de Conway

**4.1.13. Notation. (de Conway)**

Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $S_\theta = S \cot \theta$ . Pour  $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ ,  $S_{\theta, \phi}$  désignera  $S_\theta S_\phi$ .

Exemples : on note  $S_A = S_\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$  et de même  $S_B = S_\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$ ,  $S_C = S_\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$ . De manière similaire, on posera  $S_{AB} = S_{\alpha, \beta} = S_\alpha S_\beta$ .

**4.1.14. Lemme.** *Avec les notations précédentes, on a*

$$S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2.$$

*Démonstration.* Comme  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , on en déduit que le dénominateur de  $\cot(\alpha + \beta + \gamma)$  dans la formule d'addition est nul, soit

$$\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha - 1 = 0,$$

ce qui donne  $S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2(\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha) = S^2$ .  $\square$

*Exemples :* en écrivant  $a \cos \alpha = (\frac{2}{abc})a^2 S_A$ , d'après II-4.1.1, les coordonnées barycentriques homogènes du centre du cercle circonscrit sont

$$(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = (S_A(S_B + S_C) : S_B(S_C + S_A) : S_C(S_A + S_B)).$$

De même en écrivant  $a \cos \beta \cos \gamma = abc \cot \beta \cot \gamma (\frac{2S}{abc})^2$ , d'après II-4.1.3, les coordonnées barycentriques homogènes de l'orthocentre sont

$$(S_{BC} : S_{CA} : S_{AB}) = (\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}).$$

En ce qui concerne le point de Fermat, nous utiliserons la formule de Conway suivante.

**4.1.15. Proposition. (Formule de Conway)**

*On note  $\theta = \widehat{CBP}$  et  $\phi = \widehat{BCP}$  que l'on choisit dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Alors les coordonnées barycentriques homogènes de  $P$  sont*

$$(-a^2 : S_C + S_\phi : S_B + S_\theta).$$

*Démonstration.* D'après la proposition I-2.2.5, les coordonnées barycentriques homogènes de  $P$  sont

$$(-aPC \sin \phi : PC.B \sin(\phi + \gamma) : PB.C \sin(\theta + \beta)).$$

On écrit

$$PC.b \sin(\phi + \gamma) = PC.b \sin \gamma \sin \phi (\cot \phi + \cot \gamma) = \frac{PC}{a} \sin \phi (S_C + S_\phi)$$

de sorte qu'en utilisant  $PB \sin \theta = PC \sin \phi$ , on obtient comme coordonnées barycentriques homogènes  $(-a^2 : S_C + S_\phi : S_B + S_\theta)$ .  $\square$

*Exemple :* on reprend les notations de la figure II-4.1. D'après la formule de Conway en utilisant que  $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , les coordonnées barycentriques

homogènes de  $A'$  sont

$$\begin{aligned} (-a^2 : S_C + \frac{S}{\sqrt{3}} : S_B + \frac{S}{\sqrt{3}}) = \\ \left( \frac{-a^2}{(S_B + \frac{S}{\sqrt{3}})(S_C + \frac{S}{\sqrt{3}})} : \frac{1}{S_B + \frac{S}{\sqrt{3}}} : \frac{1}{S_C + \frac{S}{\sqrt{3}}} \right). \end{aligned}$$

Par symétrie du problème, les coordonnées barycentriques de  $B'$  (resp.  $C'$ ) sont

$$\left( \frac{1}{S_A + \frac{S}{\sqrt{3}}} : \dots : \frac{1}{S_C + \frac{S}{\sqrt{3}}} \right), \quad (\text{resp. } \left( \frac{1}{S_A + \frac{S}{\sqrt{3}}} : \frac{1}{S_B + \frac{S}{\sqrt{3}}} : \dots \right))$$

de sorte que d'après le théorème de Ceva, les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en un point dont les coordonnées barycentriques homogènes sont

$$\left( \frac{1}{\sqrt{3}S_A + S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_B + S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_C + S} \right).$$

#### 4.2. Cercle d'Euler et droites de Steiner

*Remarque* : ce paragraphe est la version euclidienne classique de l'exercice affine ?? du premier chapitre.

Soit  $ABC$  un triangle non plat et soient :

- $G$  son isobarycentre, intersection des 3 médianes  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  ;
- $O$  le centre du cercle circonscrit, intersection des 3 médiatrices ;
- $H$  son orthocentre, intersection des 3 hauteurs,  $(AH_A)$ ,  $(BH_B)$  et  $(CH_C)$ .

Rappelons que l'homothétie  $h_1$  de centre  $G$  et de rapport  $-1/2$  transforme le triangle  $ABC$  en  $A'B'C'$  ; les médiatrices de  $ABC$  sont alors les hauteurs de  $A'B'C'$  de sorte que les points  $O, G, H$  sont alignés sur la droite d'Euler :  $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$ .

**4.2.1. Définition.** Le cercle d'Euler  $\mathcal{C}_E$ , est le cercle circonscrit au triangle  $A'B'C'$ .

**4.2.2. Lemme.** Le centre  $\Omega$  du cercle d'Euler est le milieu de  $[HO]$ .

*Démonstration.* Le cercle  $\mathcal{C}_E$  est l'image du cercle circonscrit à  $ABC$  par l'homothétie précédente de sorte que son centre  $\Omega$  est tel que  $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ , autrement dit  $\Omega$  est le milieu de  $[HO]$ .  $\square$

**4.2.3. Proposition.** *Les coordonnées barycentriques homogènes du centre du cercle d'Euler sont*

$$(x_A : x_B : x_C) = (\sin 2\beta + \sin 2\gamma : \sin 2\alpha + \sin 2\gamma : \sin 2\alpha + \sin 2\beta).$$

*Démonstration.* D'après la proposition II-4.1.1, on a  $(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)O = \sin 2\alpha A + \sin 2\beta B + \sin 2\gamma C$  et donc

$$\begin{aligned} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)\Omega &= \sin 2\alpha A' + \sin 2\beta B' + \sin 2\gamma C' \\ &= \sin 2\alpha \left( \frac{B+C}{2} \right) + \sin 2\beta \frac{C+A}{2} + \sin 2\gamma \frac{A+B}{2} \\ &= \frac{\sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2} A + \frac{\sin 2\gamma + \sin 2\alpha}{2} B \\ &\quad + \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2} C \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.  $\square$

*Remarque :* on peut aussi utiliser le fait que  $3G = 2\Omega + O$  et donc

$$\begin{aligned} 2\Omega &= A + B + C - \frac{1}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} (\sin 2\alpha A + \sin 2\beta B + \sin 2\gamma C) \\ &= \frac{1}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} \left( (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)A \right. \\ &\quad \left. + (\sin 2\alpha + \sin 2\gamma)B + (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)C \right) \end{aligned}$$

ce qui redonne le résultat.

**4.2.4. Lemme.** *Les milieux  $E_A, E_B, E_C$  respectifs des segments  $[AH], [BH]$  et  $[CH]$  appartiennent à  $\mathcal{C}_E$ .*

*Démonstration.* Considérons l'homothétie  $h_2$  de centre  $H$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ . Le résultat découle alors du fait que  $h_2$  transforme le cercle circonscrit à  $ABC$  en un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon moitié, i.e. en le cercle  $\mathcal{C}_E$ .  $\square$

**4.2.5. Lemme.** *Le cercle d'Euler passe par les points  $H_A, H_B$  et  $H_C$ .*

*Démonstration.* L'homothétie  $h_1 \circ h_2^{-1}$  de rapport  $-1$  envoie  $E_A E_B E_C$  sur  $A' B' C'$ ; le point  $F$  étant invariant c'est le centre de cette symétrie centrale et les segments  $[E_A A'], [E_B B']$  et  $[E_C C']$  sont des diamètres de  $\mathcal{C}_E$ . Comme les triangles  $E_A A' H_A, E_B B' H_B$  et  $E_C C' H_C$  sont rectangles en  $H_A, H_B$  et  $H_C$ , on en déduit alors que  $H_A, H_B$  et  $H_C$  appartiennent ainsi à  $\mathcal{C}_E$ .  $\square$

En résumé le cercle d'Euler passe par les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et par les milieux de  $[HA], [HB]$  et  $[HC]$ , il est aussi appelé *le cercle des 9 points* ou *cercle de Feuerbach* en l'honneur du mathématicien qui remarqua cette propriété.

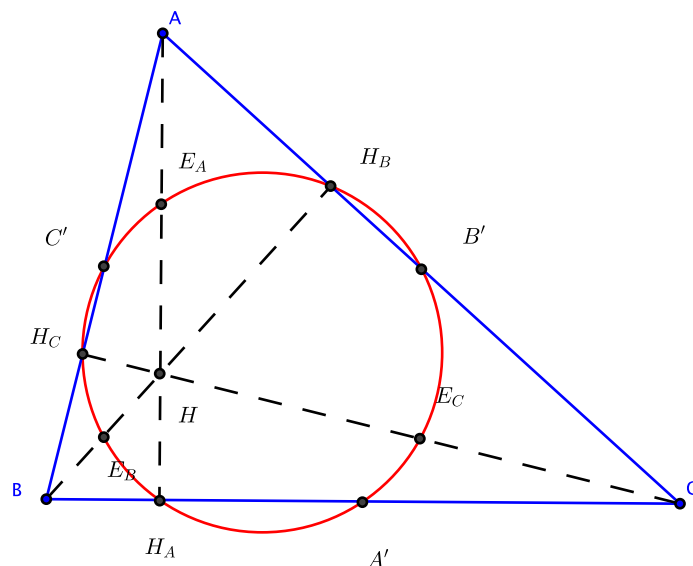


Figure 4.8  
Cercle d'Euler

**4.2.6. Proposition. (Droite de Simson)**

Soit  $P$  un point du plan à partir duquel on construit ses projetés orthogonaux  $A', B', C'$  sur les côtés d'un triangle  $ABC$ , i.e.  $A'B'C'$  est le triangle podaire de  $P$ . Les points  $A', B', C'$  sont colinéaires si et seulement si  $P$  appartient au cercle circonscrit de  $ABC$ ; la droite ainsi formée s'appelle la **droite de Simson** de  $P$ .

*Démonstration.* Par construction le cercle de diamètre  $[AP]$  (resp.  $[BP]$ , resp.  $[CP]$ ) passe par  $C', B'$  (resp.  $A', C'$ , resp.  $A', B'$ ) de sorte que les points  $A, P, B', C'$  (resp.  $B, P, A', C'$ , resp.  $C, P, A', B'$ ) sont cocycliques.

Supposons que  $P$  appartienne au cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $ABC$ ; quitte à renommer les sommets on suppose que  $P$  appartient à l'arc  $AC$  de sorte que  $\widehat{APC} = \widehat{ABC} = \widehat{C'BA'}$  lequel est donc égal à  $\widehat{C'PA'}$  car les points  $B, P, A', C'$  sont cocycliques. Ainsi en soustrayant  $\widehat{APA'}$  on obtient  $\widehat{A'PC} = \widehat{C'PA'}$ . Par ailleurs on a  $\widehat{A'PC} = \widehat{A'B'C}$  et  $\widehat{C'PA'} = \widehat{C'B'A}$  et donc  $\widehat{A'B'C} = \widehat{C'B'A}$  i.e. les points  $A', B', C'$  sont alignés.

Réciproquement si  $A', B', C'$  sont alignés, alors quitte à renommer les sommets, on peut supposer que  $P$  appartient à la région délimitée par le secteur angulaire  $\widehat{CBA}$  au delà du segment  $AC$  comme dans la figure II-4.9. On

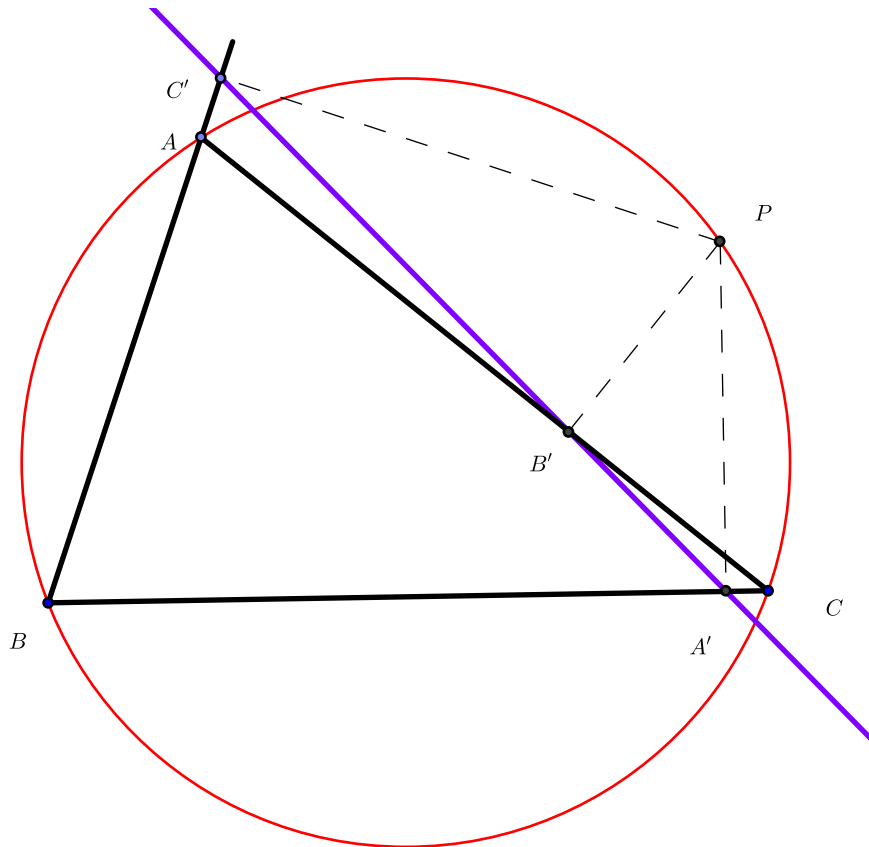


Figure 4.9  
Droite de Simson

remonte alors les égalités précédentes pour obtenir que  $\widehat{APC} = \widehat{ABC}$  et donc  $P \in \mathcal{C}$ .  $\square$

**4.2.7. Définition.** La droite homothétique de la droite de Simson par l'homothétie de centre  $P$  est de rapport 2 s'appelle la droite de Steiner.

*Remarque :* la proposition précédente s'énonce aussi en disant que l'image de  $P$  par les réflexions par rapport aux côtés du triangle  $ABC$  sont alignés sur la droite de Steiner.

**4.2.8. Proposition.** Pour tout  $P$  appartenant au cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $ABC$ , sa droite de Steiner passe par l'orthocentre  $H$  de  $ABC$ .

*Démonstration.* Si  $P = A$  alors sa droite de Steiner est la hauteur issue de  $A$  et contient donc  $H$ . Supposons donc que  $P$  n'est pas un sommet du triangle. Notons  $H_1$  l'image de  $H$  par la réflexion d'axe  $(BC)$  et supposons, quitte à changer le noms des sommets du triangle, que  $P \neq H_1$ . On note  $Q$  l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $(PA')$ .

**4.2.9. Lemme.** *La droite de Steiner est parallèle à  $(AQ)$ .*

*Démonstration.* Les points  $Q, A, C, P$  étant cocycliques sur  $\mathcal{C}$ , on a  $\widehat{AQP} = \widehat{ACP} \pmod{\pi}$ . Les points  $A', B', C, P$  étant cocycliques sur le cercle de diamètre  $[PC]$ , on a  $\widehat{B'A'P} = \widehat{ACP}$  et donc  $(AQ)$  et  $(A'B')$  forment avec  $(PQ)$  le même angle et sont donc parallèles.  $\square$

*Remarque :* dans le cas où  $(PA')$  est tangente à  $\mathcal{C}$  alors  $Q = P$  et l'angle de  $(AP)$  avec la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $P$  est  $\widehat{ACP} = \widehat{B'A'P}$  soit l'angle entre la droite de Steiner et cette tangente; ainsi  $(AQ)$  est encore parallèle à la droite de Steiner.

Notons  $Q_1$  l'image de  $P$  par la réflexion d'axe  $(BC)$ . On a alors  $\widehat{HQ_1P} = \widehat{Q_1PH_1}$  puisque ces angles sont échangés par ladite réflexion. Or dans le cercle  $\mathcal{C}$ , on a  $\widehat{QPH_1} = \widehat{QAH_1}$  qui est l'angle de la droite de Steiner avec la perpendiculaire  $(AH)$  à  $(BC)$  et qui donc égal à l'angle  $\widehat{HQ_1P}$  de la droite  $(AQ_1)$  avec cette même perpendiculaire. Autrement dit  $(HQ_1)$  et  $(AQ)$  sont parallèles.

*Remarque :* dans le cas  $P = Q$  où  $(PQ_1)$  est tangente à  $\mathcal{C}$ , on utilise le théorème de l'angle inscrit avec la tangente : l'angle de  $(PH_1)$  avec cette tangente est égal à  $\widehat{PAH_1}$  et on conclut comme avant.

Ainsi  $(HQ_1)$  est une droite parallèle à  $(AQ)$  et donc à la droite de Steiner et possède un point en commun, à savoir  $Q_1$  donc la droite de Steiner est  $(HQ_1)$  d'où le résultat.

*Remarque :* comme l'homothétie de centre  $H$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  transforme le cercle circonscrit en le cercle d'Euler, on en déduit que pour tout  $P \in \mathcal{C}$  le milieu de  $[HP]$  qui appartient donc à la droite de Simson, parcourt le cercle d'Euler.

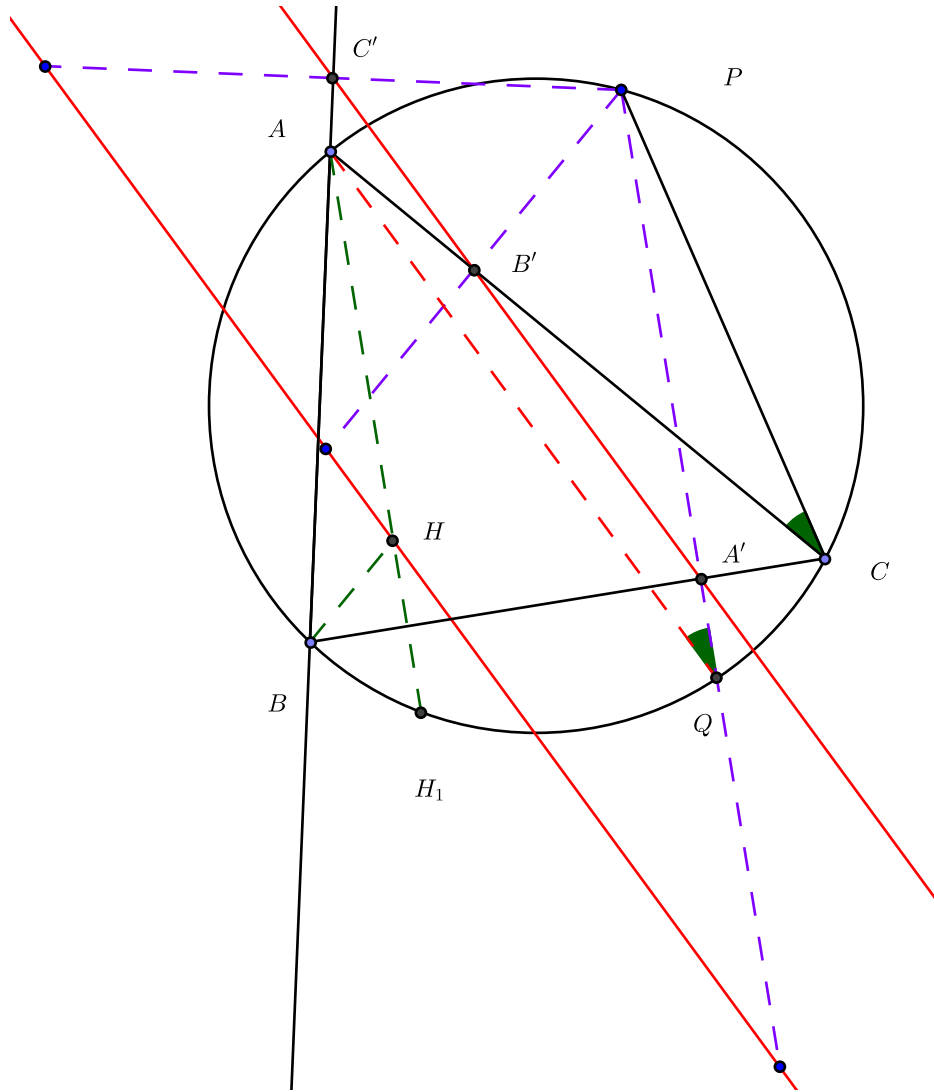


Figure 4.10  
 Droite de Steiner

### 4.3. Constructions du pentagone régulier

Rappelons que  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  : en effet partons de  $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$  et de la linéarisation de  $\sin 2a$  et  $\sin 3a$ . On obtient alors

$$2\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} (4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1)$$



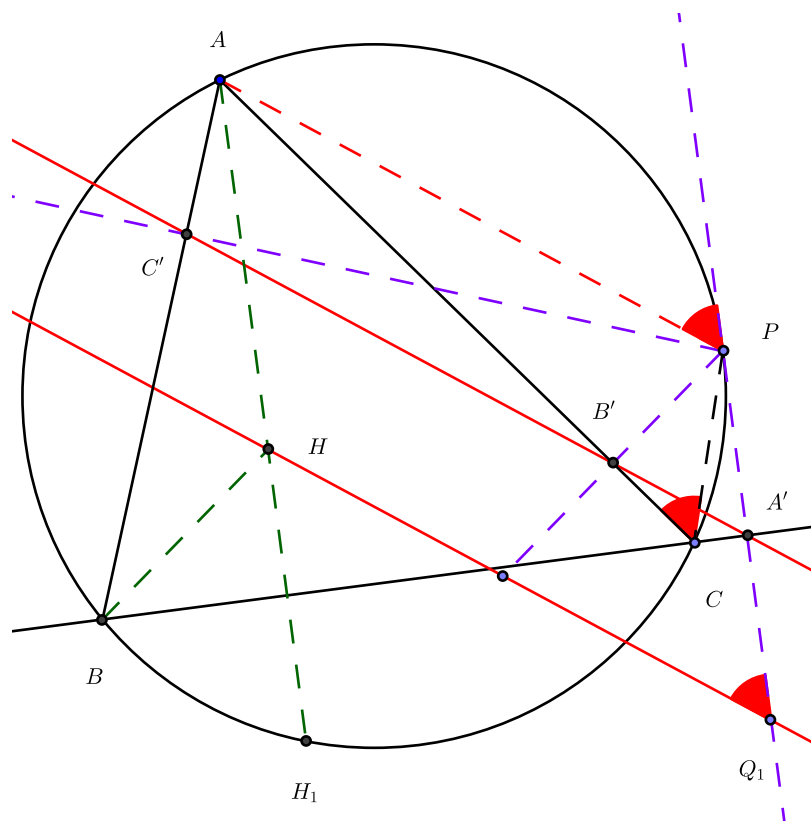


Figure 4.11  
Droite de Steiner

de sorte que  $\cos \frac{\pi}{5}$  est la solution positive de  $4X^2 - 2X - 1 = 0$  soit  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ . En utilisant  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ , on obtient alors le résultat.

*Méthode de Ptolémée* : avec les notations de la figure II-4.12, le cercle de centre  $K$  milieu de  $[A'O]$  et passant par  $J$  coupe  $AA'$  en  $U$ . La médiatrice de  $[OU]$  coupe  $C$  en  $B$  et  $E$  qui sont deux sommets du pentagone régulier inscrit dans  $C$  dont  $A$  est un sommet. En effet d'après Pythagore,  $KJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$  et donc  $OU = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  et donc  $OI = \cos(\frac{2\pi}{5})$ .

*Méthode des cercles tangents* : avec les notations de la figure II-4.13, soit  $C_2$  le cercle de centre  $I$ , milieu de  $OJ$ , et de rayon  $1/2$ . La droite  $A'I$  coupe  $C_2$  en  $P$  et  $Q$ . On note  $C_3$  (resp.  $C_4$ ) le cercle de centre  $A'$  et tangent

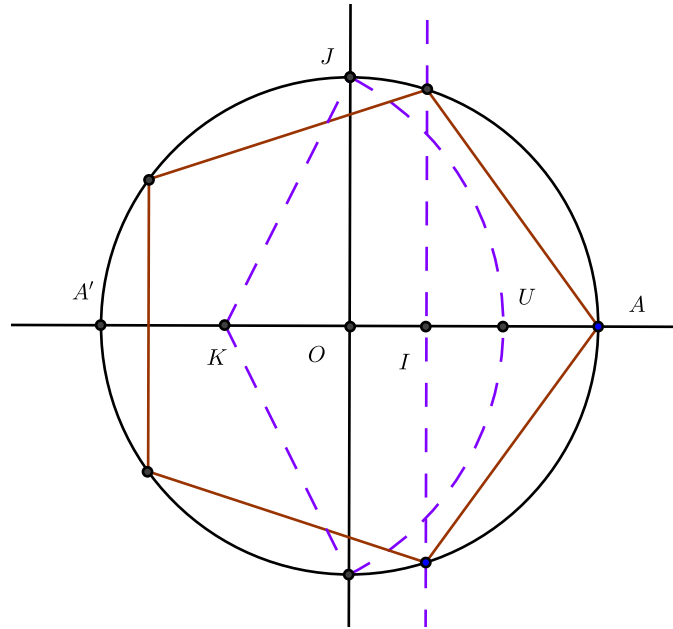


Figure 4.12

intérieurement (resp. extérieurement) à  $\mathcal{C}_2$  en  $P$  (resp.  $Q$ ) et coupe  $\mathcal{C}$  en  $B$  et  $E$  (resp.  $C$  et  $D$ ). Les points  $ABCDE$  sont alors les sommets du pentagone cherché. En effet notons  $w = e^{i\theta}$  l'affixe de  $B$ ; le rayon de  $\mathcal{C}_3$  est

$$A'B = |1 + \omega| = A'P = A'I + IP = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

de sorte que  $(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2(1 + \cos\theta) = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$  et donc  $\cos\theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$  soit  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ .

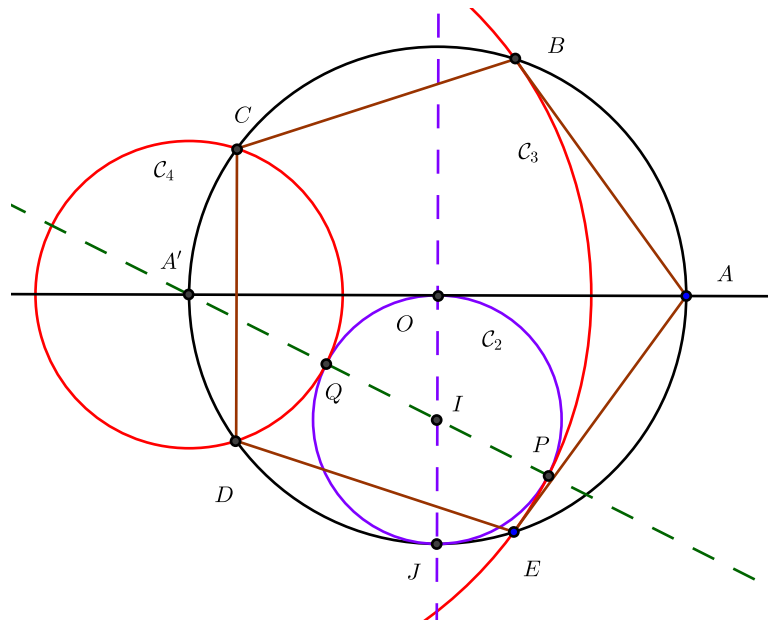


Figure 4.13

*Construction du pentagone régulier par la méthode des cercles tangents*

Algèbre et géométries

Boyer Pascal

12 septembre 2012 [8:55] Fichier:chap06 chapitre:II

## Chapitre III

# Géométrie projective

### Introduction

Selon Klein, toutes les géométries peuvent s'obtenir à partir de la géométrie projective à l'aide d'une donnée supplémentaire. Par exemple le plan affine s'obtient à partir du plan projectif en regardant le complémentaire d'une droite projective ; la structure semblable s'obtient ensuite en se donnant une involution sur la droite de l'infini que l'on voit comme l'orthogonalité sur les directions des droites du plan affine. Plus naturellement les géométries non euclidiennes, elliptique et hyperbolique, s'obtiennent en précisant une forme quadratique  $q$  non dégénérée sur  $E$ .

Le point de départ historique de cette nouvelle géométrie qui remonte aux grecs est la généralisation du théorème de Thalès aux faisceaux de droites menant à la notion de *birapport* qui comme nous le verrons est l'invariant de base de la géométrie projective. Rappelons brièvement de quoi il s'agit : étant données 4 droites  $(aa')$ ,  $(bb')$ ,  $(cc')$  et  $(dd')$  passant par un point  $o$ , avec  $a, b, c, d$  et  $a', b', c', d'$  alignés, alors

$$[a, b, c, d] := \frac{\frac{\overline{ac}}{\overline{ad}}}{\frac{\overline{bc}}{\overline{bd}}} = \frac{\frac{\overline{a'c'}}{\overline{a'd'}}}{\frac{\overline{b'c'}}{\overline{b'd'}}} =: [a', b', c', d'].$$

Donnons rapidement la preuve qu'en donnait Pappus dès le *IV*-ième siècle de notre ère. La droite parallèle à  $(oa)$  passant par  $b$  coupe  $(oc)$  et  $(od)$  en respectivement  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$ . D'après le théorème de Thalès, on a  $\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{oa}}{\overline{\tilde{c}b}}$  et  $\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{oa}}{\overline{\tilde{d}b}}$  de sorte que  $[a, b, c, d] = \frac{\overline{\tilde{d}b}}{\overline{\tilde{c}b}}$ . En procédant de même avec la

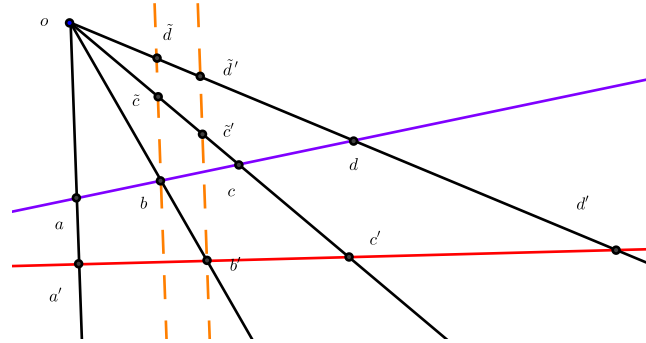


Figure 0.14

*Du théorème de Thalès au birapport*

droite passant par  $b$  et parallèle à  $(oa)$ , on obtient de même  $[a', b', c', d'] = \frac{\tilde{d}'b'}{\tilde{c}'b'}$ . L'égalité  $\frac{\tilde{d}b}{\tilde{c}b} = \frac{\tilde{d}'b'}{\tilde{c}'b'}$  découle alors du théorème de Thalès vu du point  $o$ . Pappus en déduit alors notamment le fameux théorème qui porte son nom et introduit la notion de polaire et de division harmonique.

Il serait illusoire de vouloir citer toutes les influences et contributions qui ont permis de développer cette nouvelle géométrie si féconde, rappelons simplement que son développement à la Renaissance doit beaucoup aux peintres de l'époque, cf. le §??, et que les logiciels 3D actuels l'utilisent intensivement, par exemple pour reconstituer une image 3D à partir de deux clichés, cf. le §IV-3.11.

On peut considérer que le véritable père fondateur de la géométrie projective est le mathématicien Girard Desargues (1591-1661) ; sa contribution a été mal reçue par ses contemporains et ne doit notre reconnaissance qu'à la redécouverte d'un de ses manuscrits deux siècles plus tard. Parmi ses contributions mentionnons le fameux théorème qui porte son nom ainsi que l'introduction de la notion de point à l'infini. S'il faut citer un deuxième mathématicien, ce serait assurément Poncelet (1788-1867) qui fonde sa géométrie sur l'utilisation systématique des perspectives qu'il considère comme une projection centrale d'un plan de l'espace affine de  $\mathbb{R}^3$  sur un autre. Il introduit les coordonnées homogènes et les équations homogènes de droites, coniques...

Il y a plusieurs façons d'introduire l'espace projectif : par les coordonnées homogènes, en adjoignant des éléments à l'infini à l'espace affine, de manière axiomatique. Pour ce qui nous concerne nous partirons de l'algèbre linéaire, l'espace projectif étant alors vu comme l'ensemble des droites d'un espace vectoriel  $E$ , ou plus algébriquement comme un quotient de  $E - \{0\}$  par la relation d'équivalence de proportionnalité ; cette approche revient en

définitive à l'utilisation des coordonnées homogènes mais dans un langage plus contemporain. Le lecteur pourra consulter le livre de Pierre Samuel [36] et celui annoncé de Daniel Perrin [31].

## 1. Généralités

### 1.1. Espaces et sous-espaces projectifs

**1.1.1. Définition.** Étant donné un espace vectoriel  $E$ , on appelle *espace projectif* associé à  $E$  et on note  $\mathbb{P}(E)$ , le quotient  $E - \{0\}$  par la relation d'équivalence de proportionnalité. La dimension de  $\mathbb{P}(E)$  est  $\dim E - 1$ .

*Remarque :* autrement dit  $\mathbb{P}(E)$  est l'ensemble des droites vectorielles de  $E$ .

**1.1.2. Notation.** On note  $p$  la projection  $E - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ .

**1.1.3. Définition.** On appelle *sous-espace projectif*, et on écrit *sep*, de  $\mathbb{P}(E)$ , l'image par  $p$  d'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$ .

*Remarque :* on devrait dire  $p(V - \{0\})$  mais on écrira  $p(V)$ .

*Remarque :* une droite (resp. un plan) projective de  $\mathbb{P}(E)$  est un *sep* de dimension 1 (resp. 2). Des points de  $\mathbb{P}(E)$  sont ainsi dits alignés (resp. coplanaires) s'il existe une droite (resp. un plan) projective les contenant.

**1.1.4. Proposition.** Soit  $\mathbb{P}(E)$  un espace projectif de dimension  $n \geq 2$ . On a les propriétés suivantes :

- par deux points distincts  $a, b$  passe une droite projective et une seule que l'on note  $(ab)$  ;
- par trois points  $a, b, c$  non alignés passe un plan et un seul que l'on note  $(abc)$ .

*Démonstration.* Notons  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  deux vecteurs de  $E$  relevant  $a$  et  $b$ . Comme  $a \neq b$ , les vecteurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  sont non colinéaires et déterminent donc un unique plan vectoriel dont l'image par  $p$  détermine l'unique droite projective contenant  $a$  et  $b$ . Le raisonnement est analogue dans le cas de 3 points.  $\square$

**1.1.5. Proposition.** Soit  $A$  une partie quelconque de  $\mathbb{P}(E)$ . L'ensemble des *sep* contenant  $A$  possède un plus petit élément relativement à l'inclusion que l'on note  $\langle A \rangle$  et que l'on appelle le *sep engendré* par  $A$ .

*Démonstration.* Comme d'habitude, il suffit de remarquer qu'une intersection quelconque de sep est un sep, éventuellement vide, de sorte que  $\langle A \rangle$  est l'intersection de tous les sep contenant  $A$ .  $\square$

*Remarque :*  $\langle A \rangle$  est aussi l'image par  $p$  du sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $p^{-1}(A)$ .

**1.1.6. Proposition.** *Si  $L$  et  $L'$  sont deux vlp de  $\mathbb{P}(E)$ , on a la formule des dimensions :*

$$\dim L + \dim L' = \dim(L \cap L') + \dim v(L \cup L').$$

*Démonstration.* C'est une simple traduction de la formule de Grassman pour les espaces vectoriels.  $\square$

**1.1.7. Corollaire.** *Si  $\dim L + \dim L' \geq \dim \mathbb{P}(E)$  alors  $L \cap L'$  est non vide.*

*Remarque :* on retrouve ainsi que dans le plan projectif toutes les droites s'intersectent, donc pas de droites parallèles. On peut dire en quelque sorte que la géométrie projective correspond au cas « générique » de la géométrie affine, le cas où il n'y a pas de parallèles.

## 1.2. Repères projectifs

Tout comme en géométrie vectorielle, les calculs relativement aux sep reposent sur les équations des hyperplans projectifs :

**1.2.1. Définition.** Soit  $H$  un hyperplan vectoriel de  $E$  défini comme noyau d'une forme linéaire  $f \in E^*$  ; on dit que  $f$  est *une équation* de l'hyperplan projectif  $p(H)$ , laquelle est définie à un scalaire multiplicatif près.

*Remarque :* un point  $a \in \mathbb{P}(E)$  appartient à  $p(H)$  si et seulement si  $f(\tilde{a}) = 0$  pour un représentant quelconque  $\tilde{a} \in E$  de  $a$ . La mise en place de calculs explicites nécessitera alors le choix d'un repère projectif .

Avant de donner la définition formelle d'un repère projectif, essayons d'en donner une justification vectorielle. Soit  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  ; si  $A$  est un point de  $\mathbb{P}(E)$ , il lui correspond une droite de  $E$  et donc un système de coordonnées homogènes de la forme  $\{\lambda(x_0, \dots, x_n) : \lambda \in K^\times\}$ . Pour décrire cette donnée purement intrinsèquement en termes de  $\mathbb{P}(E)$  il suffit de se donner :



- des points  $P_0, \dots, P_n$  de  $\mathbb{P}(E)$  qui sont les images des éléments d'une base de  $E$ ;
- un point  $P_{n+1}$  de coordonnées homogènes  $(1, \dots, 1)$ .

La donnée des points  $P_0, \dots, P_n$  détermine les droites  $Ke_i$  et donc la base cherchée est de la forme  $(a_0e_0, \dots, a_n e_n)$ . Le point  $P_{n+1}$  associé à  $\sum_{i=0}^n a_i e_i$  détermine la droite  $K(e_0 + \dots + e_n)$  ce qui impose que tous les  $a_i$  sont égaux. Ainsi les bases associées à ces données sont  $\lambda(e_0, \dots, e_n)$  de sorte que si les coordonnées de  $M$  dans la base  $(e_0, \dots, e_n)$  est  $(x_0, \dots, x_n)$ , dans la base  $\lambda(e_0, \dots, e_n)$  est  $(\lambda^{-1}x_0, \dots, \lambda^{-1}x_n)$ .

**1.2.2. Définition.** *Un repère projectif* de  $\mathbb{P}(E)$  consiste en la donnée de  $n + 2$  points  $x_0, \dots, x_{n+1}$  tels qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  de  $E$  vérifiant :

- $p(e_i) = x_i$  pour  $i = 1, \dots, n + 1$  et
- $p(e_1 + \dots + e_{n+1}) = x_0$ .

On peut donner une caractérisation géométrique d'un repère.

**1.2.3. Proposition.** *Un  $n + 2$ -uplet de points de  $\mathbb{P}(E)$  est un repère si et seulement si  $n + 1$  quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants, i.e. n'appartiennent pas à un même hyperplan.*

*Démonstration.* Notons d'abord qu'il est équivalent de dire que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  ou que leurs images  $x_i = p(e_i)$  ne sont pas dans un même hyperplan. Dans le sens direct, le résultat vient du fait que  $n + 1$  quelconques vecteurs parmi  $e_0 = e_1 + \dots + e_{n+1}$ ,  $e_1, \dots, e_{n+1}$  forment une base de  $E$ .

Réciproquement si  $x_0, \dots, x_{n+1}$  vérifient les conditions de la proposition, on note  $e_1, \dots, e_{n+1}$  des antécédents par  $p$  alors par hypothèse, ils forment une base de  $E$ . On relève  $x_0$  en un vecteur  $e_0$  qui se décompose alors en  $e_0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1}$ . On note alors que les  $\lambda_i$  sont tous non nuls car si  $\lambda_{i_0} = 0$  alors la famille  $(e_i)_{i \neq i_0}$  serait liée et les  $(x_i)_{i \neq i_0}$  appartiendraient à un même hyperplan. Quitte à changer  $e_i$  en  $\lambda_i e_i$ ,  $x_0, \dots, x_{n+1}$  vérifient bien la propriété d'être un repère.  $\square$

*Exemple :* Un repère projectif d'une droite projective est la donnée de trois points distincts; un point  $y$  est repéré par un système  $\{\lambda(x_0, x_1); \lambda \in K^\times\}$  de coordonnées homogènes. Pour le plan projectif il faut 4 points dont les 3 premiers forment un vrai triangle et le quatrième n'appartient à aucune des trois droites déterminées par les côtés de ce triangle.

*Remarque :* un hyperplan de  $E$  a une équation de la forme  $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$ ; cette équation exprime que le point de coordonnées homogènes  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{P}(E)$  est dans l'hyperplan projectif  $p(H)$ . Un sep étant l'intersection d'hyperplans, sera définie par un système d'équations homogènes.

### 1.3. Groupe projectif

Pour définir les transformations d'un espace projectif  $\mathbb{P}(E)$ , il est naturel de partir des endomorphismes de  $E$ ; comme par ailleurs on ne veut pas obtenir 0, il faut se restreindre aux automorphismes. Ainsi, une application linéaire injective  $u$  stabilise  $E - \{0\}$  et passe au quotient par la relation de proportionnalité; elle définit donc une application  $\mathbb{P}(u)$  de  $\mathbb{P}(E)$ . Plus généralement pour  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels on définit la notion d'homographie.

**1.3.1. Définition.** Soit  $u : E \rightarrow E'$  une application linéaire bijective, l'application bijective  $\mathbb{P}(u) : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$  définie par  $\mathbb{P}(u)(a) = p(u(\tilde{a}))$  où  $a = p(\tilde{a})$ , est appelée *une homographie*.

*Remarque :* on a  $\mathbb{P}(u \circ v) = \mathbb{P}(u) \circ \mathbb{P}(v)$ , de sorte que l'ensemble des homographies de  $\mathbb{P}(E)$  est un groupe noté  $PGL(E)$ .

**1.3.2. Proposition.** *Le groupe projectif  $PGL(E)$  de  $\mathbb{P}(E)$  est isomorphe à  $GL(E)/K^\times$ .*

*Démonstration.* L'application  $\mathbb{P} : GL(E) \rightarrow PGL(E)$  est clairement surjective et son noyau est l'ensemble des applications linéaire  $u \in GL(E)$  telles que pour tout  $x \in E$  il existe  $\lambda_x \in K^\times$  avec  $u(x) = \lambda_x x$ . Montrons que la fonction  $x \mapsto \lambda_x$  est constante ce qui prouvera que le noyau de  $\mathbb{P}$  est  $K^\times$  identifié aux homothéties non nulles.

Si  $y = \mu x$  alors  $u(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$  et comme  $u(y) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x$  on en déduit que  $\lambda_y = \lambda_x$ . Si désormais  $(x, y)$  est une famille libre, on a

$$\begin{aligned} u(x + y) &= \lambda_{x+y}(x + y) \\ &= u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \end{aligned}$$

et comme  $(x, y)$  est libre, on en déduit que  $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque :* l'image par une homographie d'un sep est un sep de même dimension. En particulier les homographies conservent l'alignement, on dit encore que ce sont des *collinéations*. La réciproque est donnée par le théorème fondamental de la géométrie projective dont le lecteur intéressé pourra trouver une preuve dans la bonne littérature, par exemple dans [31].

### 1.3.3. Théorème. (fondamental de la géométrie projective)

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels de même dimension et  $f : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$  une bijection conservant l'alignement, i.e. une collinéation. Alors  $f$

est une semi-homographie, i.e. de la forme  $\mathbb{P}(u)$  pour  $u : E \rightarrow E'$  une application semi-linéaire.

**1.3.4. Proposition.** Soient  $\mathbb{P}(E)$  et  $\mathbb{P}(E')$  deux espaces projectifs de même dimension  $n$ ,  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  et  $(P'_0, \dots, P'_{n+1})$  des repères projectifs de  $\mathbb{P}(E)$  et  $\mathbb{P}(E')$ . Il existe alors une unique homographie  $h$  de  $\mathbb{P}(E)$  sur  $\mathbb{P}(E')$  telle que  $h(P_i) = P'_i$  pour  $i = 0, \dots, n + 1$ .

*Démonstration.* On relève  $P_0, \dots, P_n$  en une base  $(e_0, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $p(e_0 + \dots + e_n) = P_{n+1}$ ; idem pour  $(e'_0, \dots, e'_n)$ . Si  $h$  existe et est de la forme  $\mathbb{P}(u)$  alors  $u(e_i) = a_i e'_i$  avec  $a_i \neq 0$ . Comme  $h(P_{n+1}) = P'_{n+1}$ , on doit aussi avoir  $u(e_0 + \dots + e_n) = a_0 e'_0 + \dots + a_n e'_n = b(e'_0 + \dots + e'_n)$  de sorte que tous les  $a_i$  sont égaux à  $b$  ce qui détermine  $u$  à homothétie près et donc  $h = \mathbb{P}(u)$  est unique.  $\square$

#### 1.4. Liaison affine-projectif

Supposons que l'espace vectoriel  $E$  de dimension  $n + 1$  est muni d'une base de sorte que l'on a  $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^n(K)$  avec les coordonnées  $(x_0, \dots, x_n)$ . Soit  $H$  l'hyperplan vectoriel d'équation  $x_0 = 0$  et posons  $U = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$ . On a alors une bijection  $\phi : U \rightarrow K^n$  qui à un point  $x = (x_0, \dots, x_n)$  associe  $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$ . Cette application est bien définie car sur  $U$ ,  $x_0$  est non nul et l'image de  $x$  par  $\phi$  ne dépend pas du système de coordonnées homogènes choisis. Elle est évidemment bijective, la réciproque étant donnée par  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$ .

On a ainsi décrit  $\mathbb{P}^n(K)$  comme la réunion disjointe de l'espace affine  $K^n$  et d'un espace projectif de dimension  $n - 1$ , autrement dit on a plongé l'espace affine dans un espace projectif de même dimension en lui rajoutant des points « à l'infini ».

*La droite projective :* il s'agit du cas  $n = 1$  et on appelle  $(x, t)$  les coordonnées de  $K^2$  avec  $t = 0$  comme hyperplan à l'infini ce qui donne un unique point  $\infty = (1, 0)$  de  $\mathbb{P}^1(K)$ . Ainsi la droite projective est une droite affine à laquelle on a adjoint un unique point à l'infini. La figure III-1.1 illustre la construction précédente : on associe à chaque droite de  $K^2$  son intersection avec la droite affine  $D$  d'équation  $t = 1$ . En ce qui concerne les homographies, l'image de  $(x, 1)$  par l'application linéaire de matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est  $(ax + b, cx + d)$  de sorte qu'en projectif l'image de  $(x, 1)$  est le point  $(\frac{ax + b}{cx + d}, 1)$  si  $x \neq -d/c$  et sinon le point  $\infty$ , lequel s'envoie sur  $a/c$ .

*Les droites du plan projectif :* utilisons les coordonnées  $(x, y, t)$  avec  $t = 0$  comme hyperplan à l'infini de sorte que  $\mathbb{P}^2(K)$  est la réunion du plan affine

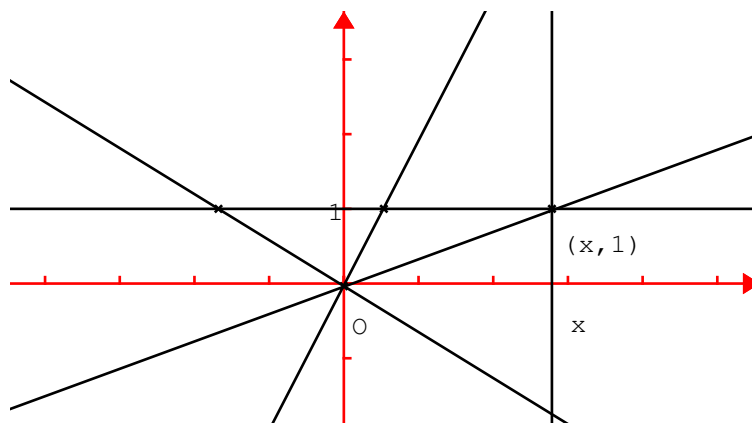


Figure 1.1

Bijection entre les droites vectorielles du plan et la droite projective

$U = \{(x, y, 1)\}$  et de la droite projective  $D_\infty$  d'équation  $t = 0$ . Soit alors  $D$  une droite projective de  $\mathbb{P}^2(K)$  d'équation  $ux + vy + wt = 0$  avec  $(u, v, w)$  non nul.

- Si  $u = v = 0$  alors on peut imposer  $w = 1$  et  $D$  n'est autre que la droite de l'infini  $D_\infty$ .
- Sinon, la trace de  $D$  sur le plan affine  $U$  de  $\mathbb{P}^2(K)$  consiste en les points  $(x, y)$  tels que  $ux + vy + w = 0$  et on retrouve bien une droite affine. La trace de  $D$  sur  $D_\infty$  est donnée par les points  $(x, y, 0)$  tels que  $ux + vy = 0$  ce qui correspond à un unique point de coordonnées homogènes  $(v, -u, 0)$  que l'on peut appeler *la pente* de  $D$ . On remarque alors que les traces dans le plan affine  $U$  de deux droites projectives distinctes  $D$  et  $D'$  sont d'intersection vide si et seulement si elles ont la même pente; dans ce cas  $D$  et  $D'$  se coupent à l'infini, au point de  $D_\infty$  défini par leur pente.

*Remarque :* la notion de point à l'infini n'est pas intrinsèque et dépend de l'hyperplan de  $E$  considéré qui n'est pas nécessairement donné par l'annulation d'une coordonnée dans un repère donné. Nous donnons à présent une construction générale quel que soit l'hyperplan  $H$  choisi.

**1.4.1. Proposition.** Soit  $\mathbb{P}(E)$  un espace projectif de dimension  $n$  et  $\mathbb{P}(H)$  un hyperplan de  $\mathbb{P}(E)$ . Alors  $\mathcal{E} = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$  est un espace affine tel que  $\vec{\mathcal{E}} \simeq H$ .

*Démonstration.* On définit tout d'abord une action de  $H$  sur  $\mathcal{E}$  comme suit : soit  $A = \mathbb{P}(x) \in \mathcal{E}$  alors  $h.A = \mathbb{P}(x + h)$ . C'est licite car  $x + h \notin H$  et donc  $\mathbb{P}(x + h) \in \mathcal{E}$  et  $h.(h'.A) = (hh').A$ . Il faut ensuite vérifier que cette action est simplement transitive. Pour la transitivité, soit  $D$  tel que  $E = H \oplus D$

de sorte que pour  $B = \mathbb{P}(y) \in \mathcal{E}$ , il existe  $\lambda \in K^\times$  tel que  $\lambda y = x + h$  et donc  $B = h.A$ . Enfin si  $h.A = h'.A$  alors il existe  $\lambda \in K^\times$  tel que  $x + h = \lambda(x + h')$ ; or comme  $x \notin H$ , on doit avoir  $\lambda = 1$  et donc  $h = h'$ .  $\square$

**1.4.2. Définition.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $K$ ; la clôture projective de  $\mathcal{E}$  est l'espace  $\hat{\mathcal{E}} = \mathbb{P}(\vec{\mathcal{E}} \times K)$ .

Pour  $A$  un point de  $\mathcal{E}$ , on définit une injection  $j_A : \mathcal{E} \hookrightarrow \hat{\mathcal{E}}$  par  $j_A(M) = p(M - A, 1)$ . L'image est le complémentaire de l'hyperplan  $\mathbb{P}(\vec{\mathcal{E}} \times \{0\})$  de  $\hat{\mathcal{E}}$ .

**1.4.3. Définition.** Soit  $f$  une application affine injective de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{F}$ ; on définit  $\hat{f} = \mathbb{P}(\vec{f} \times \text{Id}_K) : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ .

*Remarque :*  $\hat{f}$  prolonge  $f$  au sens où  $\hat{f}(j_A(M)) = j_{f(A)}(f(M))$ .

Ainsi tout espace affine peut être vu comme le complémentaire  $P - H$  d'un hyperplan projectif; cet hyperplan et ses points, droites, sont dits à l'infini. Dans ce langage deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement s'ils ont les mêmes points à l'infini. Inversement lorsqu'on choisit un hyperplan  $H$  d'un espace projectif  $P$  et que l'on regarde la structure affine de  $P - H$ , on dit qu'on a envoyé  $H$  à l'infini; on choisit alors les systèmes de coordonnées homogènes  $(x_0, \dots, x_n)$  de sorte que  $H$  soit l'hyperplan d'équation  $x_0 = 0$ . Ainsi pour un point  $M$  de  $P - H$ ,  $(x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$  est un système de coordonnées affines de  $M$ .

Si un sep non situé à l'infini est défini par le système d'équation homogènes

$$a_{j,0}x_0 + a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = 0, \quad j = 1, \dots, q$$

son intersection avec  $P - H$  est le sous-espace affine défini par les équations  $a_{j,1}y_1 + \dots + a_{j,n}y_n = 0$ . Dans l'autre sens un sous-espace affine défini par les équation  $a_{j,1}y_1 + \dots + a_{j,n}y_n = b_j$  pour  $j = 1, \dots, q$ , sa clôture projective a pour équations  $a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = b_jx_0$ .

## 1.5. Dualité

On rappelle que pour un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n + 1$ , son dual  $E^*$  est l'espace des formes linéaires sur  $E$ . Un hyperplan de  $E$  s'identifie au noyau d'une forme linéaire ou plus exactement à une droite vectorielle de  $E^*$ . Plus généralement pour  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , on définit

l'orthogonal de  $F$  comme le sous-espace vectoriel de  $E^*$  défini par

$$F^\perp = \{f \in E^* : \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

Réciproquement on définit l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E^*$  par

$$F^\perp = \{x \in E : \forall f \in F, f(x) = 0\}.$$

Dans les deux cas, on a les formules

$$\dim F^\perp = n + 1 - \dim F \text{ et } F^{\perp\perp} = F.$$

Rappelons enfin que si  $u : E \rightarrow F$  est une application linéaire, elle induit une application linéaire transposée  ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$  définie par la formule  ${}^t u(f) = f \circ u$ . La correspondance  $u \mapsto {}^t u$  est fonctorielle, i.e. vérifie  ${}^t \text{Id}_E = \text{Id}_{E^*}$  et  ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$ .

**1.5.1. Définition.** Pour  $p = 0, \dots, n - 1$ , on note  $G_p(\mathbb{P}(E))$  la *grassmannienne* d'indice  $p$ , i.e. l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension  $p$  de  $\mathbb{P}(E)$ .

**1.5.2. Proposition.** L'application  $\Phi_E : \mathbb{P}(E^*) \rightarrow G_{n-1}(\mathbb{P}(E))$  qui associe à l'image  $f$  d'une forme linéaire non nulle le sous-espace projectif associé à  $\text{Ker } f$ , est une bijection.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$  si et seulement si  $f$  et  $g$  sont proportionnelles.  $\square$

*Remarque :* la bijection précédente permet donc de munir  $G_{n-1}(\mathbb{P}(E))$  d'une structure d'espace projectif de dimension  $n$ .

**1.5.3. Définition.** Si  $V$  est un sep de  $\mathbb{P}(E)$ , on pose

$$V^* = \{H \in G_{n-1}(\mathbb{P}(E)) : V \subset H\}.$$

**1.5.4. Proposition.** On a les formules suivantes :

- (1) pour tout sous-espace vectoriel  $F$  non nul de  $E^*$ ,  $\Phi_E(p(F)) = (p(F)^\perp)^*$  ;
- (2) pour un sous-espace vectoriel  $G$  non nul de  $E$  ;  $p(G)^* = \Phi_E(p(G)^\perp)$ .

*Démonstration.* (1) Soit  $f \in F$  ; par définition de  $F^\perp$ , on a  $F^\perp \subset \text{Ker } f$  d'où  $\Phi_E(p(f)) \in (p(F)^\perp)^*$ .

(2) Le résultat découle de (1) appliquée à  $G^\perp$ .  $\square$

*Remarque :* dans le cas  $n = 1$ , l'ensemble des hyperplans de la droite projective n'est autre que l'ensemble de ses points. Ainsi  $G_{n-1}(\mathbb{P}(E)) =$

§1. Généralités



$\mathbb{P}(E)$  est déjà muni d'une structure projective que l'on peut comparer à celle provenant de  $\Phi_E$ .

**1.5.5. Proposition.** *Pour  $n = 1$ , l'application  $\Phi_E : \mathbb{P}(E^*) \rightarrow \mathbb{P}(E)$  est une homographie.*

*Démonstration.* Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $E$  et  $(e_1^*, e_2^*)$  sa base duale. Soit  $f = x_1 e_1^* + x_2 e_2^* \in E^*$  non nulle; son noyau admet pour vecteur directeur  $x_2 e_1 - x_1 e_2$  de sorte que  $\Phi_E$  n'est autre que l'homographie associée à l'application linéaire  $u : E^* \rightarrow E$  définie par  $u(x_1 e_1^* + x_2 e_2^*) = x_2 e_1 - x_1 e_2$ .  $\square$

En dimension 2, i.e. dans le cas d'un plan projectif, un point  $m_*$  de  $\mathbb{P}(E^*)$  correspond à une droite vectorielle  $\langle f \rangle$  de  $E^*$  et on lui associe par  $\Phi_E$  la droite projective  $D_{m_*} = p(\text{Ker } f)$  de  $\mathbb{P}(E)$ . Une droite  $D_*$  de  $\mathbb{P}(E^*)$  correspond à un plan vectoriel  $F$  de  $E^*$  dont l'orthogonal  $F^\perp$  est de dimension 1 dans  $E$  et définit donc un point  $m_{D_*} = p(F^\perp)$  de  $\mathbb{P}(E)$ . Partant dans  $\mathbb{P}(E^*)$ , d'un point  $m_*$  appartenant à une droite  $D_*$ , dualement dans  $\mathbb{P}(E)$ , la droite  $D_{m_*}$  contiendra le point  $m_{D_*}$ . En utilisant la bidualité canonique  $E \simeq (E^*)^*$ , on obtient les constructions dans l'autre sens, i.e. on associe à un point  $m$  de  $\mathbb{P}(E)$  appartenant à une droite  $D$ , une droite  $m^*$  de  $\mathbb{P}(E^*)$  contenant le point  $D^*$ . Ainsi toute propriété dans  $\mathbb{P}(E)$  admet par dualité sa traduction dans  $\mathbb{P}(E^*)$ . Par exemple, trois points  $a, b, c$  de  $\mathbb{P}(E)$  sont alignés sur une droite  $D$  si et seulement si les trois droites duales  $a^*, b^*, c^*$  sont concourantes au point  $D^*$  de  $\mathbb{P}(E^*)$ . Ainsi pour chaque théorème portant sur les points et droites de  $\mathbb{P}(E)$ , on peut en obtenir une variante duale, appelé *théorème corrélatif*, en l'appliquant à  $\mathbb{P}(E^*)$  et en traduisant l'énoncé sur les points et les droites de  $\mathbb{P}(E^*)$ .

**1.6. Incidences, perspectives et réfractions du plan projectif**

Dans ce paragraphe on suppose que  $n = 2$ , i.e. que  $\mathbb{P}(E)$  est un plan projectif.

**1.6.1. Définition.** Soit  $m \in \mathbb{P}(E)$ , un point de la droite projective  $m^*$  de  $\mathbb{P}(E^*)$  définit une droite de  $\mathbb{P}(E)$  passant par  $m$  et réciproquement tout droite projective de  $\mathbb{P}(E)$  passant par  $m$  définit dans  $\mathbb{P}(E^*)$  un point appartenant à  $m^*$ . La droite  $m^*$  s'appelle *le pinceau* des droites de  $\mathbb{P}(E)$  passant par  $m$ .

*Remarque :* on renvoie au §III-2.1 pour le cas de la dimension quelconque.

**1.6.2. Définition.** Pour  $D$  une droite de  $\mathbb{P}(E)$  et  $m \notin D$ , on définit l'application bijective

$$i : m^* \longrightarrow D$$

appelée *incidence*, en associant à une droite  $\Delta$  passant par  $m$  l'unique point d'intersection  $d$  de  $D$  et  $\Delta$ . La réciproque de cette application, appelée aussi incidence, associe à un point  $d$  de  $D$  la droite  $(md)$ .

**1.6.3. Proposition.** *L'incidence est une homographie.*

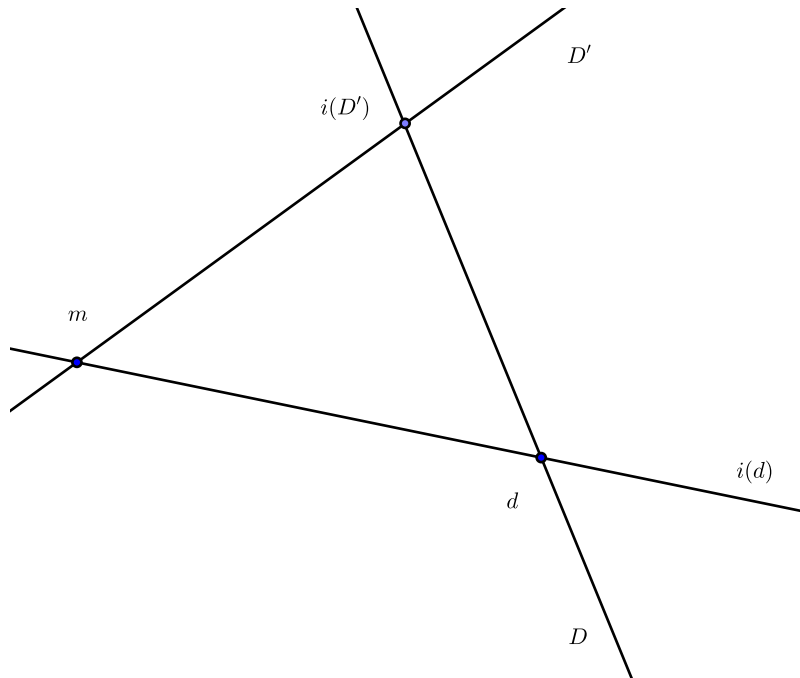


Figure 1.2  
Les incidences entre  $m^*$  et  $D$

*Démonstration.* On choisit une base  $(x, y, z)$  de  $E$  avec  $p(x) = m$  et  $p(y), p(z) \in D$ . Si  $(x^*, y^*, z^*)$  est la base duale,  $m^*$  est l'image par  $\Phi_E$  du sous-espace de  $\mathbb{P}(E^*)$  image de  $(y^*, z^*)$ . Soit  $\delta = \lambda y^* + \mu z^*$  dans ce sous-espace avec  $(\lambda, \mu)$  non nul. L'intersection  $d$  de la droite  $\Delta$  définie par  $\delta$  avec  $D$  est donnée par les  $\alpha y + \beta z$  vérifiant  $(\lambda y^* + \mu z^*)(\alpha y + \beta z) = \lambda \alpha + \mu \beta = 0$  ce qui donne  $d = \mu y - \lambda z$  à un scalaire près, de sorte que  $i$  provient de l'application linéaire  $\lambda y^* + \mu z^* \mapsto \mu y - \lambda z$  et est donc bien une homographie.  $\square$



**1.6.4. Corollaire.** Soient  $D$  et  $D'$  deux droites de  $\mathbb{P}(E)$  et soit  $m \notin D \cup D'$ . L'application

$$p_m : D \rightarrow D'$$

qui à  $x \in D$  associe l'unique point d'intersection de  $(mx)$  et de  $D'$ , est une homographie.

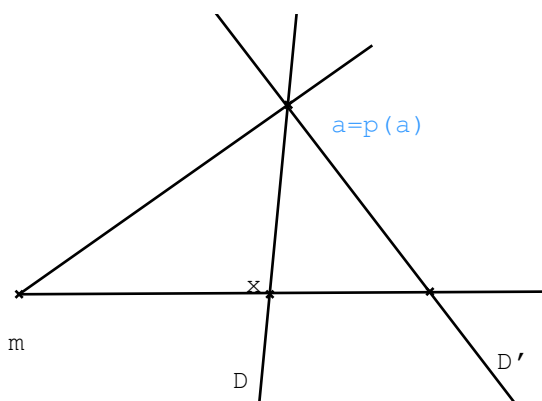


Figure 1.3

La perspective de centre  $m$  de  $D$  sur  $D'$

*Démonstration.* Considérons la droite  $m^*$  de  $\mathbb{P}(E^*)$ , i.e. l'ensemble des droites de  $\mathbb{P}(E)$  passant par  $m$ . L'application  $p_m$  est alors la composée des deux incidences suivantes :

- celle de  $D$  dans  $m^*$  qui à  $x$  associe  $(mx)$  ;
  - celle de  $m^*$  dans  $D'$  qui à une droite  $\Delta$  associe l'unique point de  $\Delta \cap D'$ .
- Comme les incidences sont des homographies, le résultat en découle.  $\square$

**1.6.5. Définition.** L'application  $p_m$  de la proposition précédente s'appelle la perspective de centre  $m$  de  $D$  sur  $D'$ .

*Remarque :*  $p_m$  est bijective, c'est l'identité si  $D = D'$  et le point d'intersection de  $D$  et  $D'$  est fixe. Par dualité, on définit :

**1.6.6. Définition.** Soient  $m \neq m'$  deux points de  $\mathbb{P}(E)$  et  $D$  une droite ne contenant ni  $m$  ni  $m'$ . La réfraction d'axe  $D$  de  $m^*$  sur  $(m')^*$  associe à une droite  $M$  passant par  $m$ , l'unique droite  $M'$  qui coupe  $M$  sur  $D$ .

*Remarque :* on peut évidemment définir des perspectives (resp. des réfractations) en dimension quelconque d'un hyperplan sur un autre en copiant les constructions précédentes ; ce sont encore des homographies.

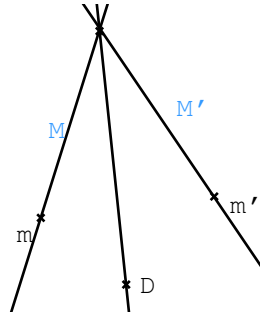


Figure 1.4

La réfraction d'axe  $D$  de  $m^*$  sur  $(m')^*$

### 1.7. Desargues, Pappus : preuves projectives

Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème de Desargues.

#### 1.7.1. Théorème. (de Desargues)

Dans un plan projectif, soient  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  trois droites distinctes ayant en commun un point  $o$ . On prend sur chacune deux points distincts  $a_i, b_i$  tous distincts de  $o$ . Alors les trois points d'intersection  $k = (a_1a_2) \cap (b_1b_2)$ ,  $j = (a_1a_3) \cap (b_1b_3)$  et  $i = (a_2a_3) \cap (b_2b_3)$  sont alignés.

*Démonstration. par changement de géométrie*

On envoie la droite  $(ij)$  à l'infini de sorte que dans le plan affine associé, les droites  $(a_1a_3)$  et  $(a_2a_3)$  sont respectivement parallèles à  $(b_1b_3)$  et  $(b_2b_3)$ . La nouvelle figure III-1.6 est alors celle de I-1.3 et on reprend la démonstration du corollaire I-1.4.7.

□

*Démonstration. par un détour dans la troisième dimension*

On considère l'énoncé en dimension 3 en supposant les trois droites non coplanaires ; ainsi les plans  $a_1a_2a_3$  et  $b_1b_2b_3$  ont une droite en commun qui contient  $i, j, k$ . Le résultat en dimension 2 s'obtient alors par projection. □

Nous proposons désormais une preuve purement projective.

#### 1.7.2. Lemme. (des trois perspectives)

Soient  $A, B, C$  trois droites distinctes concourantes en un point  $o$  et soient  $u, v, w$  trois points distincts tels que  $u \notin B \cup C$ ,  $v \notin C \cup A$  et  $w \notin A \cup B$ . On considère les trois perspectives  $p_u, p_v$  et  $p_w$  respectivement de  $B$  sur  $C$ ,  $C$  sur  $A$  et  $A$  sur  $B$ . Alors si on a  $p_w \circ p_v \circ p_u = \text{Id}_B$  alors les points  $u, v, w$  sont alignés.

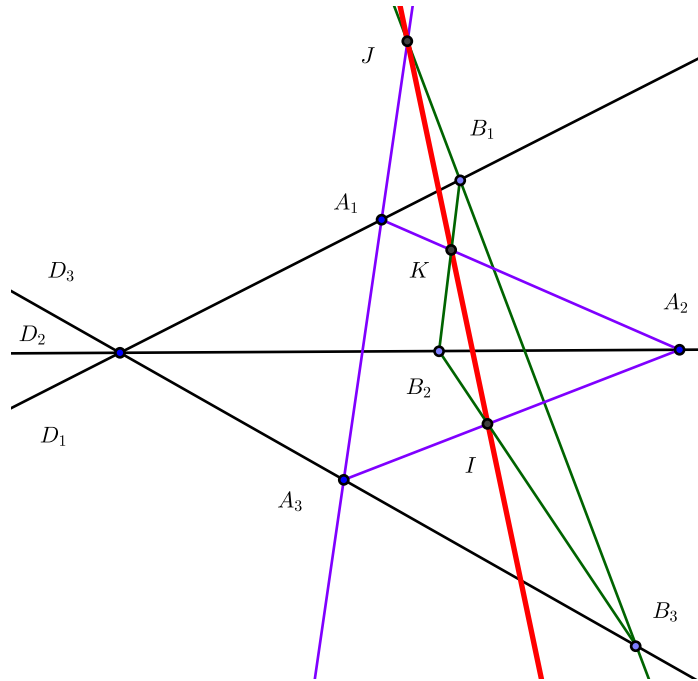


Figure 1.5  
*Desargues projectif*

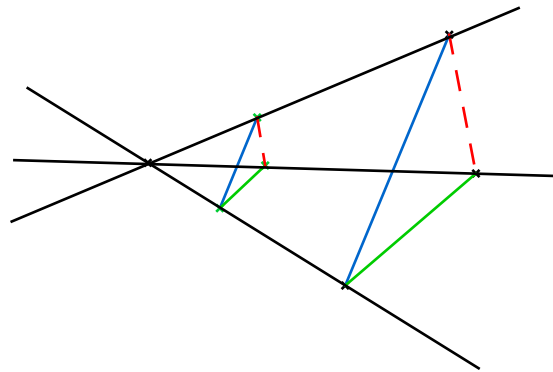


Figure 1.6  
*Desargues par changement de géométrie*

*Démonstration.* Si les droites  $(uv)$  et  $(vw)$  passent par  $o$ , elles sont toutes deux égales à  $(ov)$  et les trois points sont alignés. Sinon, supposons par exemple que  $(uv)$  ne passe pas par  $o$ , alors  $(uv)$  coupe  $A, B, C$  (car  $u \notin BUC$

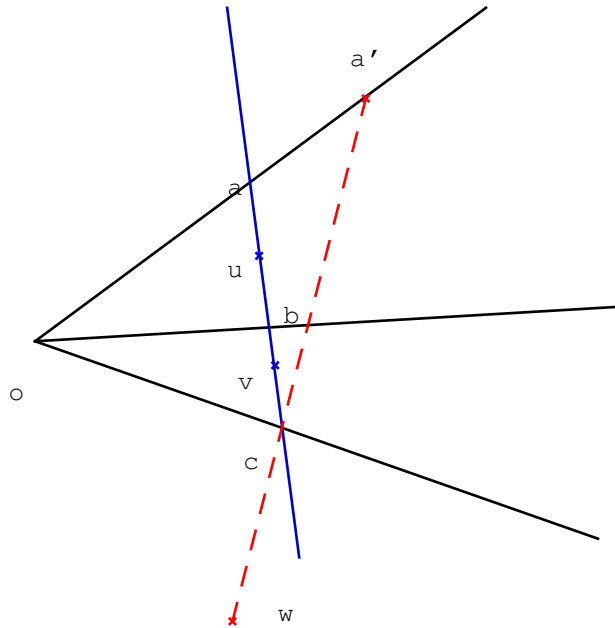


Figure 1.7

Lemme des trois perspectives

et  $v \notin A$  en  $a, b, c$  respectivement et on a  $a \neq b$  (sinon on aurait  $a = b = o$ ), de sorte qu'on a  $(uv) = (ab)$ . Mais on a  $p_u(b) = c$  et  $p_v(c) = a$  et comme  $p_w p_v p_u = \text{Id}_B$ , on a aussi  $p_w(a) = b$  et donc  $w$  est sur  $(ab) = (uv)$ .  $\square$

*Remarque :* le fait que  $u, v, w$  soient alignés n'implique pas que la composée des perspectives soit l'identité, mais si pour un point  $y \in B$  distinct de  $o$  et du point  $b$  défini dans la preuve du lemme, on a  $p_w p_v p_u(y) = y$  alors la composée est l'identité (regarder sur le repère  $(o, b, y)$ ); on est alors dans la configuration de Desargues.

*Démonstration. projective du théorème de Desargues*

On considère la composée des perspectives  $f = p_i \circ p_j \circ p_k$ ; on a  $f(o) = o$ ,  $f(a_2) = a_2$  et  $f(b_2) = b_2$  de sorte que, les points  $o, a_2, b_2$  définissant une base de  $D_2$ ,  $f$  est égale à l'identité et le résultat découle du lemme des trois perspectives.  $\square$

*Remarque :* l'énoncé du théorème de Desargues est autodual.

**1.7.3. Corollaire. (réciproque du théorème de Desargues)**

Soient deux triangles  $a_1a_2a_3$  et  $b_1b_2b_3$  tels que les points  $i = (a_2a_3) \cap (b_2b_3)$ ,  $j = (a_1a_3) \cap (b_1b_3)$  et  $k = (a_1a_2) \cap (b_1b_2)$  sont alignés; alors les droites  $(a_1b_1)$ ,  $(a_2b_2)$  et  $(a_3b_3)$  sont concourantes.

*Démonstration.* Comme toujours dans ces situations d'énoncés réciproques, on utilise le sens direct. Notons  $o = (a_1b_1) \cap (a_2b_2)$  et soit  $b'_3$  l'intersection de  $(oa_3)$  avec  $(b_1b_3)$ . On applique le théorème de Desargues aux triangles  $a_1a_2a_3$  et  $b_1b_2b'_3$ ; les points  $k$  et  $j$  restent les mêmes et le point  $i$  devient un point  $i'$  appartenant aux droites  $(jk)$ ,  $(a_2a_3)$  et  $(b_2b'_3)$ . Comme  $i = (jk) \cap (a_2a_3)$  on en déduit que  $i = i'$  mais alors  $(b_2b'_3) = (b_2b_3)$  soit  $b'_3 = (b_2b_3) \cap (b_1b_3) = b_3$  et donc  $o \in (a_3b_3)$ .  $\square$

**1.7.4. Corollaire. Les médianes d'un triangle sont concourantes.**

*Démonstration.* Notons  $a', b', c'$  les milieux respectifs des segments  $[bc]$ ,  $[ac]$  et  $[ab]$ . D'après le théorème de Thalès les droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  sont parallèles de même que  $(bc)$  et  $(b'c')$  (resp.  $(ac)$  et  $(a'c')$ ). Ainsi avec les notations du théorème de Desargues les points  $i, j, k$  sont alignés sur la droite de l'infini et donc, d'après la réciproque du théorème de Desargues, les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes.  $\square$

**1.7.5. Théorème. (de Pappus)**

Soient deux droites distinctes  $D$  et  $D'$  munies des points  $a, b, c$  et  $a', b', c'$  tous distincts. Les points  $k = (ab') \cap (ba')$ ,  $j = (ac') \cap (ca')$  et  $i = (bc') \cap (cb')$  sont alignés.

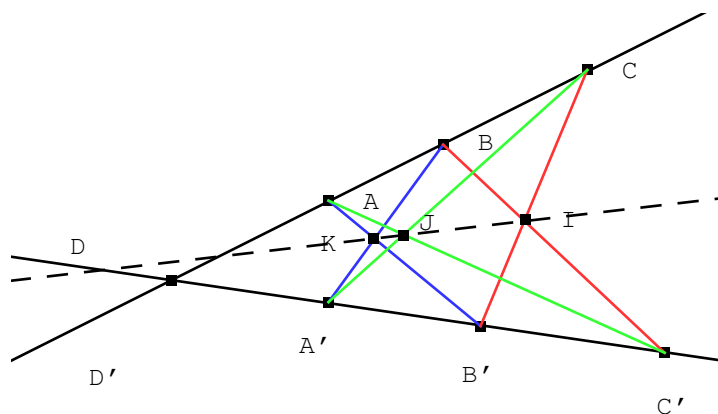


Figure 1.8  
Pappus projectif

*Démonstration. en envoyant la droite  $(ij)$  à l'infini*

Dans le plan affine associé, les droites  $(bc')$  et  $(ac')$  sont respectivement parallèles à  $(cb')$  et  $(ca')$ ; la nouvelle figure est alors celle de I-1.2 et on conclut via le corollaire I-1.4.6.

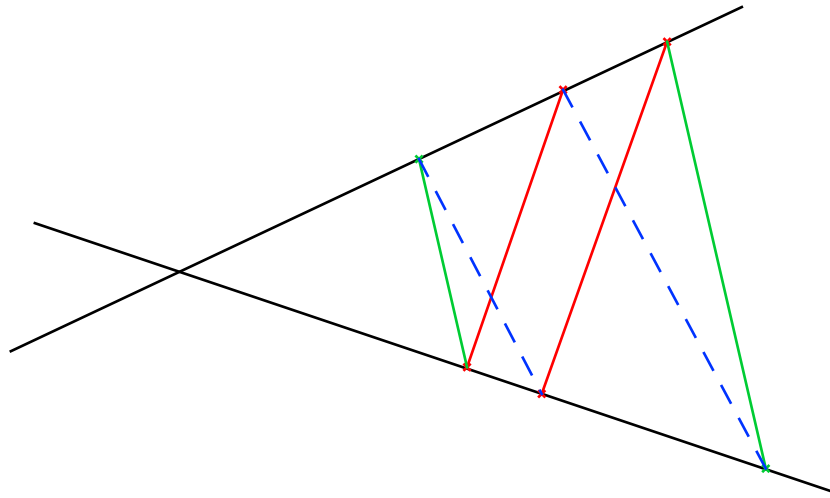


Figure 1.9

*Pappus projectif par changement de géométrie*

□

*Démonstration. par composition d'application projective*

Considérons la projection  $p_a$  de centre  $a$  de la droite  $(a'b)$  sur  $D'$ ; en notant  $u = (a'b) \cap (ac')$ , le quadruplet  $(a', i, u, b)$  est envoyé sur  $(a', b', c', o)$ . La projection  $p_c$  de centre  $c$  de  $D'$  sur  $(bc')$  envoie  $(a', b', c', o)$  sur  $(v, k, c', b)$  où  $v = (bc') \cap (ca')$ . Ainsi  $p_c \circ p_a$  envoie  $(a', i, u, b)$  sur  $(v, k, c', b)$ .

La projection  $p_j$  de centre  $j$  qui envoie  $(a'b)$  sur  $(bc')$  envoie  $(a', i, u, b)$  sur  $(v, k', c', b)$ , où  $k' = (ij) \cap (bc')$ .

Ainsi comme  $p_j$  et  $p_c \circ p_a$  coïncident sur trois points distincts  $a, u, b$ , elles sont égales et donc  $k = k' \in (ij)$ . □

*Remarque :* le théorème corrélatif de Pappus est le théorème de Brianchon.

**1.7.6. Théorème. (de Brianchon)**

Soient  $d$  et  $d'$  deux points distincts de  $\mathbb{P}(E)$  et  $D = (dd')$ . Soient  $A, B, C$

(resp.  $A', B', C'$ ) trois droites distinctes passant par  $d$  (resp.  $d'$ ) et distinctes de  $D$ . On appelle respectivement  $U, V, W$  les droites qui joignent les points d'intersection de  $B, C'$  et de  $B', C$  et de  $C, A'$  et de  $C', A$  et de  $A, B'$  et de  $A', B$ . Alors  $U, V, W$  sont concourantes.

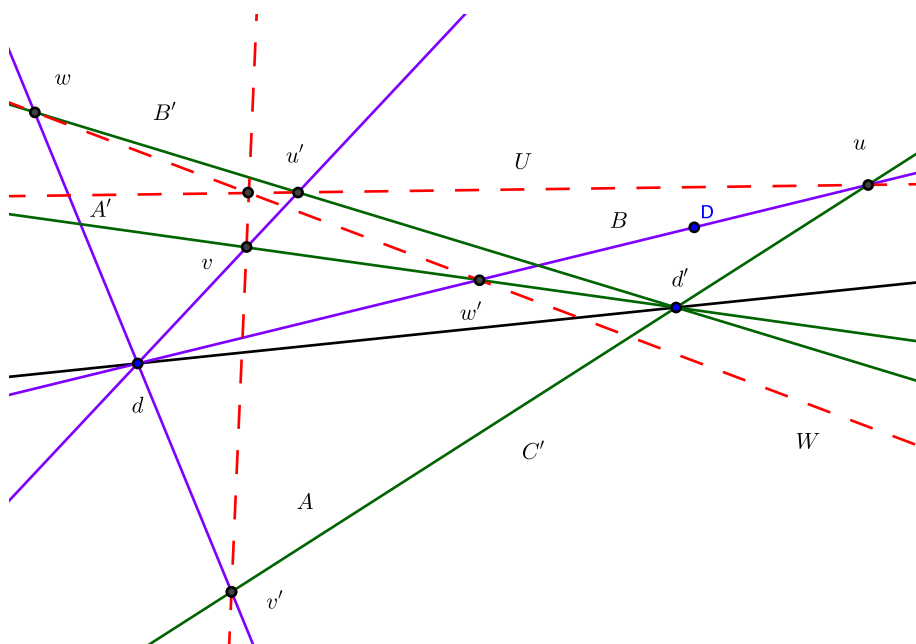


Figure 1.10  
Le théorème de Brianchon

Finissons ce paragraphe par la construction de la polaire d'un point relativement à deux droites, cas particulier d'une conique dégénérée, cf. la définition IV-3.5.1.

**1.7.7. Théorème.** Soient  $A, B$  deux droites distinctes concourantes en  $o$  et soit  $d \notin A \cup B$ . Soient  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  trois droites distinctes passant par  $d$  mais pas par  $o$ , qui coupent respectivement  $A$  et  $B$  en  $a_i, b_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . On considère les points d'intersection  $u, v$  de  $(a_1b_2) \cap (b_1a_2)$  et de  $(a_2b_3) \cap (b_2a_3)$ . Alors les points  $o, u, v$  sont alignés.

*Remarque :* on notera la similitude de la figure III-1.11 avec celle du théorème de Pappus ; on pourrait formuler l'énoncé précédent en disant que si les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  du théorème de Pappus sont concourantes, alors la droite  $(ijk)$  passe par le point  $o$ .

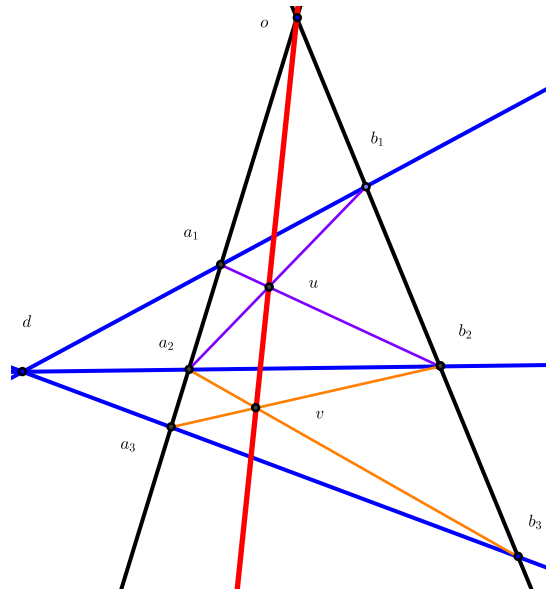


Figure 1.11

*La polaire d'un point relativement à deux droites*

*Démonstration.* On considère les perspectives  $p_u$ ,  $p_v$  et  $p_o$  respectivement de  $\Delta_1$  sur  $\Delta_2$ , puis de  $\Delta_2$  sur  $\Delta_3$  et enfin de  $\Delta_3$  sur  $\Delta_1$ . Comme les points  $d, a_1, b_1$  sont fixes par  $f = p_o \circ p_v \circ p_u$ , on a  $f = \text{Id}_\Delta$  et le résultat découle du lemme des trois perspectives. □

Autrement dit la droite  $(ou)$  de l'énoncé précédent est indépendant du couple de droites sécantes  $(\Delta_1, \Delta_2)$  choisis pour construire  $u$ ; on introduit alors la définition suivante.

**1.7.8. Définition.** Dans la situation de la proposition précédente, la droite  $(ou)$  est appelée *la polaire* de  $d$  par rapport aux droites  $A, B$ . Inversement  $d$  est appelé le *pôle* de la droite  $(ou)$ .

*Remarque :* on renvoie le lecteur à la définition IV-3.5.1 pour une généralisation de ces deux notions dans le cas d'une conique; deux droites étant considérées comme une conique dégénérée.



## 2. Exemples

### 2.1. Espaces projectifs d'hyperplans

On rappelle que l'ensemble des hyperplans de  $E$  ou de  $\mathbb{P}(E)$  s'identifie à  $\mathbb{P}(E^*)$ .

**2.1.1. Définition.** Un sep  $S$  de  $\mathbb{P}(E^*)$  s'appelle *un système linéaire d'hyperplans* ; si  $\dim S = 1$  on l'appelle un faisceau linéaire d'hyperplans.

**2.1.2. Théorème.** *Étant donné un système linéaire  $S$  d'hyperplans de  $\mathbb{P}(E)$ , il existe un sep  $B(S)$ , appelé la base de  $S$ , telle que  $S$  soit l'ensemble des hyperplans contenant  $B(S)$  ; on a  $\dim B(S) = \dim \mathbb{P}(E) - \dim S - 1$ .*

*Remarque :* ce résultat généralise le cas déjà étudié en dimension 2 où un faisceau de droite est l'ensemble des droites passant par un point  $B \in \mathbb{P}(E)$ .

*Démonstration.* Raisonnons au niveau des espaces vectoriels ; soit  $T$  le sous-espace de  $E^*$  associé à  $S$ . Par bidualité  $E = (E^*)^*$ ,  $T'$  s'identifie à l'ensemble des zéros communs aux formes de  $T$  et  $(T')' = T$ . En posant  $B(S) = p(T')$ , on voit donc que les hyperplans de  $S$  ne sont autres que ceux qui contiennent  $B(S)$ . Comme  $\dim B(S) = \dim T' - 1 = \dim e - \dim T - 1$ , on obtient bien le résultat.  $\square$

*Remarque :* comme dans le cas de la dimension 2 avec la dualité points-droites, tout théorème sur les sep d'un espace projectif s'applique aux systèmes linéaires d'hyperplans, i.e. à  $\mathbb{P}(E^*)$ .

### 2.2. L'espace projectif des cercles : faisceaux de cercles

Dans un repère orthonormé, un cercle du plan affine euclidien a une équation de la forme  $x^2 + y^2 + bc + cy + d = 0$ . Bien entendu une telle équation n'a pas toujours de solutions réelles, considérer par exemple  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  ; pour autant on aimerait bien identifier un cercle du plan euclidien à son équation, une façon de contourner le problème consiste à regarder les solutions complexes d'une telle équation. Mais alors s'introduisent naturellement de telles équations à coefficients complexes. Par ailleurs pour être certain que l'on aura tous les points, il est plus prudent de se placer dans le plan projectif. On introduit alors la notion suivante.

**2.2.1. Définition.** Nous appellerons *cercle généralisé*, l'ensemble des points de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  dont les coordonnées homogènes  $(x, y, t)$  satisfont à une équation

de la forme

$$a(x^2 + y^2) + bxt + cyt + dt^2 = 0$$

où  $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$  est défini à proportionnalité près.

Ainsi un cercle généralisé est soit

- un vrai cercle complexe si  $a \neq 0$ ;
- la réunion de la droite de l'infini et d'une autre droite si  $a = 0$  et  $(b, c) \neq (0, 0)$ ;
- la droite de l'infini comptée deux fois si  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ .

Dans ce contexte l'ensemble des cercles généralisés est un espace projectif complexe de dimension 3.

**2.2.2. Définition.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles généralisés de coordonnées homogènes respectives  $(a : b : c : d)$  et  $(a' : b' : c' : d')$ . Leur *axe radical* est la droite d'équation :

- $bx + cy + dt$  si  $a = 0$  (resp.  $b(x + c'y + d't = 0$  si  $a' = 0)$ );
- pour  $aa' \neq 0$

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)x + \left(\frac{c}{a} - \frac{c'}{a'}\right)y + \left(\frac{d}{a} - \frac{d'}{a'}\right)t = 0.$$

*Remarque :* cette définition généralise celle de II-3.3.3 : en effet  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$  est une équation du cercle de centre  $O = (a, b)$  et de rayon  $r$  et la puissance d'un point  $M = (x_0, y_0)$  par rapport à celui-ci est, par définition  $MO^2 - r^2$  soit  $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ . Ainsi pour deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  d'équations respectives  $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  et  $C'(x, y) = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ , l'ensemble des points  $(x_0, y_0)$  ayant même puissance par rapport à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  est ceux tels que  $C(x_0, y_0) - C'(x_0, y_0) = (a - a')x_0 + (b - b')y_0 + d - d' = 0$ .

**2.2.3. Proposition.** Deux cercles généralisés  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  de coordonnées homogènes  $(a, b, c, d)$  et  $(a', b', c', d')$  sont orthogonaux si et seulement si

$$bb' + cc' - 2(ad' + da') = 0.$$

*Démonstration.* Un cercle d'équation affine  $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w = 0$  a  $(u, v)$  pour centre et  $u^2 + v^2 - w$  pour carré du rayon. L'orthogonalité de ce cercle avec celui d'équation  $x^2 + y^2 - 2u'x - 2v'y + w' = 0$  s'exprime par  $(u - u')^2 + (v - v')^2 = u^2 + v^2 - w + (u')^2 + (v')^2 - w'$  soit  $2(uu' + vv') - (w + w') = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

En tenant compte des cercles dégénérés, on a :

- $\mathcal{C}$  de rayon nul et  $\mathcal{C}'$  quelconque  $\neq 2D_0$ , sont orthogonaux si et seulement si le centre de  $\mathcal{C}$  est sur  $\mathcal{C}'$ ;

- un vrai cercle  $C$  et  $D + D_0$  sont orthogonaux si et seulement si  $D$  passe par le centre de  $C$  ;
- $D + D_0$  et  $D' + D_0$  sont orthogonaux si et seulement si  $D$  et  $D'$  sont orthogonales ;
- $C$  est orthogonal à  $2D_0$  si et seulement si  $C$  est de la forme  $D + D_0$ .

**2.2.4. Définition.** *Un faisceau de cercles est une droite de l'espace projectif  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .*

**2.2.5. Proposition.** *Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux cercles généralisés distincts d'un faisceau  $\mathcal{F}$  de cercles et soient  $D$  leur axe radical au sens de la définition III-2.2.2. Alors  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des cercles généralisés tels que  $D$  est l'axe radical de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Si  $(a_1 : b_1 : c_1 : d_1)$  et  $(a_2 : b_2 : c_2 : d_2)$  sont respectivement les coordonnées homogènes de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  alors tout cercle  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{F}$  a pour coordonnées homogènes  $(\alpha a_1 + \beta a_2 : \alpha b_1 + \beta b_2 : \alpha c_1 + \beta c_2 : \alpha d_1 + \beta d_2)$ . Avec la définition III-2.2.2, l'axe radical de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}$  est donné par l'équation

$$\left( \frac{\alpha b_1 + \beta b_2}{\alpha a_1 + \beta a_2} - \frac{b_1}{a_1} \right) x + \left( \frac{\alpha c_1 + \beta c_2}{\alpha a_1 + \beta a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) y + \left( \frac{\alpha d_1 + \beta d_2}{\alpha a_1 + \beta a_2} - \frac{d_1}{a_1} \right) t = 0$$

soit  $\beta a_1 a_2 \left( \left( \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} \right) x + \left( \frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) y + \left( \frac{d_2}{a_2} - \frac{d_1}{a_1} \right) t \right) = 0$  d'où le résultat.  $\square$

Étant donné un cercle  $\mathcal{C}$ , une droite  $D$  lui est soit sécante, tangente ou extérieure. On obtient ainsi trois types de faisceau de cercles  $\mathcal{F}$  contenant  $\mathcal{C}$  et d'axe radical  $D$  ; notons tout d'abord que tous les cercles de  $\mathcal{F}$  sont nécessairement centrés sur la droite  $D'$  perpendiculaire à  $D$  et passant par le centre  $o$  de  $\mathcal{C}$ .

- Si  $D$  est sécante à  $\mathcal{C}$  en  $a \neq b$  ; alors tout cercle du faisceau  $\mathcal{F}$  doit passer par  $a$  et  $b$  puisque la puissance de  $a$  et  $b$  par rapport à chacun de ces cercles doit être nulle. Réciproquement si  $\mathcal{C}'$  est un cercle centré sur  $D'$  et passant par  $a$  et  $b$ , d'après II-3.3.3, l'axe radical de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  est  $D$  et donc  $\mathcal{C}'$  appartient au faisceau  $\mathcal{F}$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est **le faisceau de points base  $a$  et  $b$  et d'axe radical  $D$** , cf. la figure III-2.1.
- Si  $D$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en un point  $a$ , le raisonnement précédent montre que tous les cercles de  $\mathcal{F}$  passent par  $\{a\} = D \cap D'$  et comme ils sont centrés sur  $D'$ , ils sont alors obligatoirement tangents à  $D$  en  $a$ . Réciproquement si  $\mathcal{C}'$  est un cercle tangent à  $D$  en  $a$  alors l'axe radical de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  est  $D$  et donc  $\mathcal{C}'$  appartient à  $\mathcal{F}$ , cf. la figure III-2.2.
- Si  $D$  ne rencontre pas  $\mathcal{C}$  d'après les cas précédents il en est donc de même pour tous les cercles de  $\mathcal{F}$ . On note  $h$  le projeté orthogonal de  $o$  sur  $D$  ;

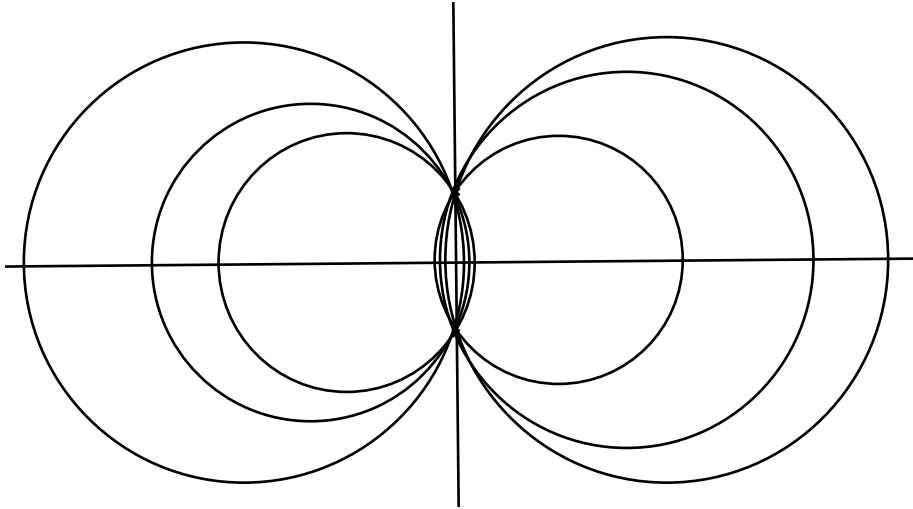


Figure 2.1

*Faisceau de cercles à points base*

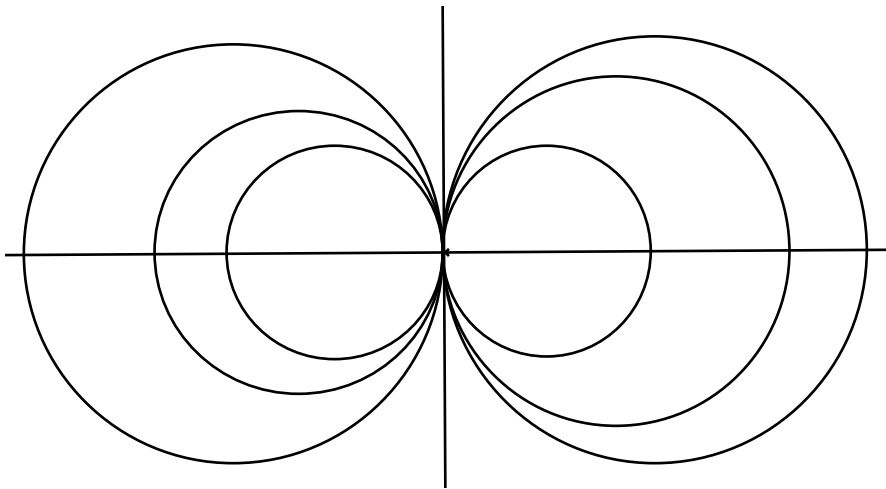


Figure 2.2

*Faisceau de cercles tangents*

d'après II-3.3.6, le cercle  $\mathcal{C}_0$  de centre  $h$  et orthogonal à  $\mathcal{C}$  est orthogonal à tous les cercles de  $\mathcal{F}$ . Réciproquement si  $\mathcal{C}'$  est un cercle centré sur  $D'$  et orthogonal à  $\mathcal{C}_0$ , d'après II-3.3.6, le point  $h$  appartient à l'axe radical de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  et comme cet axe radical est orthogonal à  $D'$ , il est égal à  $D$ . Notons  $j, k$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_0$  avec  $D'$ ; les cercles centrés en

$j, k$  et de rayon nul sont des cercles limites de  $\mathcal{F}$ , on dit que  $\mathcal{F}$  est le **faisceau de points limites**  $j$  et  $k$ , cf. la figure III-2.3.

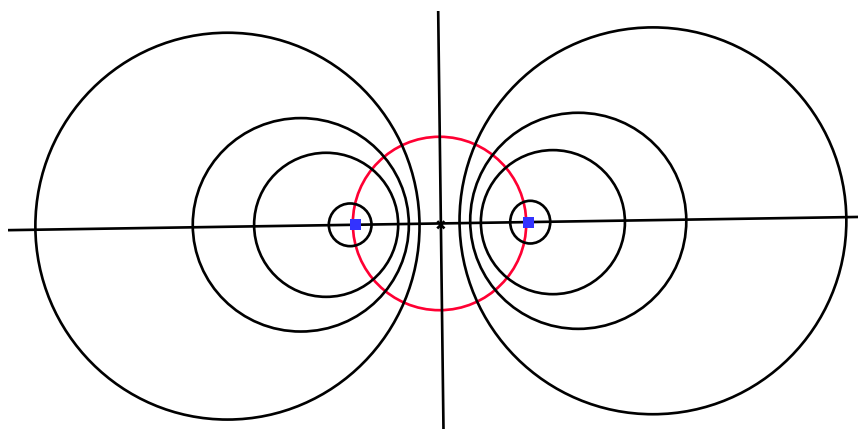


Figure 2.3

Faisceau de cercles à points limites

*Remarque :* dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , les *points cycliques* de la définition III-2.3.2, appartiennent à tous les cercles mais on ne les compte pas comme points base.

**2.2.6. Lemme.** Soit  $D(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$  une équation cartésienne de  $D$  et  $C(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  une équation de  $\mathcal{C}$ . L'équation d'un cercle  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{F}$  est  $C(x, y) + \lambda D(x, y)$ .

*Démonstration.* Rappelons que la puissance d'un point  $M(x_0, y_0)$  par rapport à  $\mathcal{C}$  est donnée par  $C(x_0, y_0)$  de sorte que tout cercle d'équation  $C(x, y) + \lambda D(x, y)$  appartient à  $\mathcal{F}$ . Réciproquement si  $\mathcal{C}'(x, y)$  est une telle équation alors  $\mathcal{C}'(x, y) = C(x, y) + f(x, y) = 0$  où  $f(x, y)$  est de la forme  $\alpha'x + \beta'y + \gamma'$ . Or pour tout point  $M(x_0, y_0)$  on a  $\mathcal{C}'(x_0, y_0) = C(x_0, y_0)$  et donc  $f(x_0, y_0) = 0$ , autrement dit  $f$  est une équation de  $D$  et donc de la forme  $\lambda D(x, y)$ .  $\square$

*Remarque :* en particulier par tout point  $(x_0, y_0, z_0)$  n'appartenant pas à  $D$ , il passe un cercle de  $\mathcal{F}$ , ce que l'on pouvait vérifier directement à partir de la description des trois types de faisceaux.

**2.2.7. Lemme.** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle orthogonal à deux cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  distincts d'un faisceau  $\mathcal{F}$ . Alors  $\mathcal{C}$  est orthogonal à tous les cercles de  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* D'après le corollaire II-3.3.6, le centre de  $\mathcal{C}$  appartient à

l'axe radical de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  qui est aussi l'axe radical de tout couple de cercles de  $\mathcal{F}$  et donc d'après loc. cit.,  $\mathcal{C}$  est orthogonal à tout cercle de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**2.2.8. Proposition.** *Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de cercles; l'ensemble  $\mathcal{F}'$  des cercles orthogonaux à tous les cercles de  $\mathcal{F}$  est un faisceau de cercles et on dit que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux **faisceaux orthogonaux ou conjugués**.*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}'_2$  deux cercles orthogonaux à deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de  $\mathcal{F}$ . On a  $O'_1O_1^2 - (R'_1)^2 = R_1^2 = O'_2O_1^2 - (R'_2)^2$ , où  $O_1$ ,  $O'_1$  et  $O'_2$  (resp.  $R_1$ ,  $R'_1$  et  $R'_2$ ) sont les centres (resp. rayons) respectifs de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}'_2$ . On en déduit donc que  $O_1$  appartient à l'axe radical de  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}'_2$ . Il en est de même du centre  $O_2$  de  $\mathcal{C}_2$  de sorte que  $(O_1O_2)$  est l'axe radical de tout couple de cercles distincts de  $\mathcal{F}'$  ont  $(O_1O_2)$  comme axe radical;  $\mathcal{F}'$  est donc un faisceau de cercles.  $\square$

*Remarque :* le conjugué d'un faisceau de cercles tangents (resp. à points base) est un faisceau de cercles tangents (resp. à points limites).

### 2.3. L'espace projectif des coniques

En attendant le §IV-3, introduisons une version complexe de la notion de conique projective.

**2.3.1. Définition.** *Une conique projective complexe est l'ensemble des points d'un plan projectif complexe dont les coordonnées homogènes satisfont à une équation de degré 2. Elle est dite irréductible si le polynôme associé est irréductible sur la clôture algébrique de  $K$ .*

*Remarque :* une conique de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  est un cercle généralisé si et seulement si elle passe par les points  $(1, \pm i, 0)$ . En effet si  $ax^2 + bxy + cy^2 + dxy + eyt + ft^2 = 0$  est une équation de la conique, son intersection avec la droite de l'infini  $t = 0$  est définie par l'équation  $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ ; les racines en  $y/x$  de celle-ci sont  $\pm i$  si et seulement si  $b = 0$  et  $a = c$ , d'où l'affirmation.

**2.3.2. Définition.** Les points à l'infini  $(1, \pm i, 0)$  communs à tous les cercles s'appellent *les points cycliques*. Une droite dont le point à l'infini est cyclique est dite isotrope.

*Remarque :* les droites isotropes issues du centre d'un vrai cercle sont tangentes à ce cercle aux points cycliques; on peut donc dire que ce sont les asymptotes du cercle.

**2.3.3. Proposition.** *À moins qu'elles n'aient une droite en commun, deux coniques distinctes  $C$  et  $C'$  ont au plus 4 points communs et exactement 4 si on les compte avec leurs multiplicités et que  $K$  est algébriquement clos.*

*Démonstration.* C'est clair si l'une au moins des coniques est décomposée. Sinon on prend un point  $A$  de  $C$  qui n'est pas sur  $C'$  et un autre point  $B$  de  $C$ . On prend  $A$  pour point base  $(0, 1, 0)$ , la tangente en  $A$  pour droite de l'infini,  $B$  pour point base  $(0, 0, 1)$  et l'intersection de la droite de l'infini avec la tangente en  $B$  comme dernier point base  $(1, 0, 0)$ . Un rapide calcul montre alors que l'équation affine de  $C$  est  $y = x^2$  et comme  $C$  et  $C'$  n'ont pas de point commun à l'infini, en reportant cette égalité dans l'équation de  $C'$  on obtient une équation polynomiale de degré 4 en  $x$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque :* deux coniques non dégénérées peuvent être transformées par une homographie en deux cercles généralisés, il suffit pour cela d'envoyer deux de leurs points d'intersection sur les points cycliques. On peut en outre faire en sorte que leurs images réelles soient non vides et donc obtenir de vrais cercles.

**2.3.4. Proposition.** *Par 5 points distincts du plan projectif tels qu'aucune droite ne contienne 4 d'entre eux, il passe une conique et une seule.*

*Démonstration.* Le passage par 5 points s'exprime par 5 équations linéaires homogènes en les 6 coefficients de l'équation de la conique, d'où l'existence de la solution. Supposons que deux coniques distinctes  $C$  et  $C'$  passent par les 5 points; d'après la proposition précédente, elles ont une droite en commun qui contient au plus 3 des 5 points. Ainsi 2 autres sont en dehors de  $D$  et déterminent de façon unique la seconde droite qui compose  $C$  et  $C'$  d'où  $C = C'$ .  $\square$

**2.3.5. Définition.** L'espace des coniques est un espace projectif de dimension 5; ses sep sont appelés *des systèmes linéaires* de coniques, *des faisceaux* en dimension 1.

**2.3.6. Corollaire.** *Soient  $A, B, C, D$  quatre points quelconques du plan projectif dont trois quelconques ne sont jamais alignés. L'ensemble des coniques du plan passant par  $A, B, C, D$  est un faisceau de coniques.*

*Démonstration.* Les points  $A, B, C, D$  forment un repère projectif avec

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

Une conique dans ce repère a une équation de la forme

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$$

et elle passe par  $A, B, C, D$  si et seulement si

$$a = b = c = 0 \text{ et } d + e + f = 0.$$

Ainsi les coniques passant par  $A, B, C, D$  sont celles d'équation

$$dY(X - Z) + eZ(X - Y) = 0$$

où  $(d : e) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : les faisceaux de coniques sont tous obtenus à partir du corollaire précédent en permettant à certains points d'être égaux. On trouve alors les faisceaux

- à points base  $A, B, C$  tangent en  $A$  à une droite  $D_A$  donnée ;
- bitangents en  $A$  et  $B$  à deux droites  $D_A, D_B$  ;
- osculatrices, passant par deux points  $A, B$  avec une intersection triple en  $A$  ;
- sur-osculatrices où toutes les coniques s'intersectent en un unique point  $A$  avec multiplicité 4.

On renvoie le lecteur à [26] §VIII.2 pour plus de détails sur le sujet.

### 3. Géométrie projective de dimension 1

#### 3.1. Birapport

Désormais  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base  $(e_1, e_2)$  et  $D = \mathbb{P}(E)$  désigne la droite projective associée. Dans le cas où  $E = \mathbb{K}^2$  muni de la base canonique, tout point de  $D = \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , admet des systèmes de coordonnées homogènes  $(x, y)$  tous non nuls et proportionnels. Si  $x \neq 0$ , ces systèmes sont uniquement déterminés par le rapport  $t = y/x$  ; d'autre part il y a un seul point de  $D$  tel que  $x = 0$  et on pose  $t = \infty$  pour celui-ci. L'élément  $t$  ainsi défini s'appelle l'abscisse projective dans le repère considéré. L'ensemble des abscisses projectives est donc la réunion du corps  $\mathbb{K}$  et d'un symbole noté  $\infty$  ; nous noterons cet ensemble  $\hat{\mathbb{K}}$  qui est en bijection canonique avec  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ .

*Exemple* : dans le cas d'un faisceau de droites du plan projectif, cette abscisse projective s'appelle la pente.

*Remarque* : si  $h$  est une homographie entre deux droites projectives, elle est alors donnée en termes d'abscisses projectives par une formule  $t \mapsto \frac{at + b}{ct + d}$  avec  $ad - bc \neq 0$ .



**3.1.1. Définition.** Étant donnés 4 points  $a, b, c, d$  d'une droite projective  $D$ , les 3 premiers étant distincts, on appelle *birapport* de ces points et on note  $[a, b, c, d]$ , l'élément  $h(d) \in \hat{\mathbb{K}}$  où  $h$  est l'unique homographie de  $D$  sur  $\hat{\mathbb{K}}$  qui amène  $a, b, c$  en  $\infty, 0, 1$ .

*Remarque :* l'action du groupe projectif sur les triplets de points alignés distincts admet une unique orbite de sorte qu'on ne peut pas affecter un invariant associé à ces trois points. Pour 4 points dont 3 ne sont pas alignés, les orbites sont par contre en bijection avec  $\hat{\mathbb{K}}$ , d'où la notion de birapport. Précisons ce résultat.

**3.1.2. Proposition.** Soient  $D, D'$  deux droites projectives,  $a, b, c, d$  des points de  $D$  et  $a', b', c', d'$  des points distincts de  $D'$ . Alors il existe une homographie  $u$  de  $D$  sur  $D'$  telle que  $u(a) = a', u(b) = b', u(c) = c', u(d) = d'$  si et seulement si les birapports  $[a, b, c, d]$  et  $[a', b', c', d']$  sont égaux.

*Démonstration.* Soit  $h$  (resp.  $h'$ ) l'unique homographie de  $D$  (resp.  $D'$ ) sur  $\hat{\mathbb{K}}$  qui amène  $a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) en  $\infty, 0, 1$ . Si  $u$  est l'homographie qui amène  $a, b, c$  en  $a', b', c'$ , alors  $h(m) = h'(u(m))$  pour tout  $m \in D$  d'après l'unicité. Ainsi si  $u(d) = d'$ , on en déduit  $[a, b, c, d] = h(d) = h'(d') = [a', b', c', d']$ .

Réciproquement si ces birapports sont égaux on a  $h(d) = h'(d')$  et aussi  $h(d) = h'(u(d))$  d'où  $u(d) = d'$  car  $h'$  est injective.

□

**3.1.3. Notation.** Pour  $x, y \in E - \{0\}$  avec  $x = x_1e_1 + x_2e_2$  et  $y = y_1e_1 + y_2e_2$  on pose

$$\overline{xy} = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = y_1x_2 - y_2x_1.$$

*Remarque :* la quantité  $\overline{xy}$  dépend du choix de la base ; par un changement de base de matrice  $P$ ,  $\overline{xy}$  est alors multiplié par  $\det P$ . En outre si on remplace  $x, y$  par  $\lambda x$  et  $\mu y$  alors  $\overline{xy}$  est multiplié par  $\lambda\mu$ .

**3.1.4. Proposition.** Soient  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  quatre points de  $\mathbb{P}(E)$ , les trois premiers étant distincts, on a la formule

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}] = \frac{\overline{c\bar{a}}}{\overline{c\bar{b}}} : \frac{\overline{d\bar{a}}}{\overline{d\bar{b}}} \in \hat{\mathbb{K}}$$

avec la convention  $\lambda/0 = \infty \in \hat{\mathbb{K}}$  pour tout  $\lambda \neq 0$ .

*Remarque* : d'après la remarque précédente la quantité  $\frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}}$  ne dépend pas des représentants  $a, b, c, d$  choisis ni de la base de  $E$  dans laquelle on le calcule.

*Démonstration.* Notons  $r = [\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}]$  et  $r' = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}}$ . Comme  $\overline{b} \neq \overline{c}$ , on en déduit que  $\overline{cb}$  est non nul de sorte que  $r$  et  $r'$  sont tous deux infinis si et seulement si  $\overline{a} = \overline{d}$  cas que l'on écarte à présent.

Comme  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$  forment un repère, on choisit des représentants  $a, b, c$  de telle sorte que  $c = a + b$  et  $(a, b)$  est une base de  $E$  dans laquelle nous travaillons désormais. On a ainsi  $d = \lambda a + \mu b$  avec  $\mu \neq 0$ . On considère l'homographie  $h : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K})$  qui définit le birapport :  $h(\overline{a}) = \infty, h(\overline{b}) = 0, h(\overline{c}) = 1$  et  $h(\overline{d}) = r$ . Elle provient de l'application linéaire  $u$  définie par  $u(xa + yb) = (x, y)$ ; on a donc  $u(d) = (\lambda, \mu)$  et  $h(\overline{d}) = r = \frac{\lambda}{\mu}$ .

En ce qui concerne  $r'$ , on a  $\overline{ca} = 1, \overline{cb} = -1, \overline{da} = \mu, \overline{db} = -\lambda$  et donc  $r' = \frac{\lambda}{\mu}$  d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : dans le cas où  $E = \mathbb{K}^2$  muni de la base canonique et  $x, y$  des éléments de la forme  $(x, 1), (y, 1)$ , on a  $\overline{xy} = y - x$ ; la proposition précédente s'écrit alors comme suit.

**3.1.5. Corollaire.** Soient  $a, b, c, d$  quatre éléments de  $\hat{\mathbb{K}}$ , les trois premiers étant distincts. Le birapport  $[a, b, c, d]$  est donné par la formule

$$[a, b, c, d] = (c - a)(d - b)/(c - b)(d - a)$$

avec les conventions de calcul usuelles sur 0 et  $\infty$ .

*Démonstration.* L'homographie  $h$  de  $\hat{\mathbb{K}}$  sur  $\hat{\mathbb{K}}$  qui amène  $a, b, c$  en  $\infty, 0, 1$  admet  $a$  pour pôle et  $b$  pour zéro. Elle est donc de la forme  $h(t) = k(t - b)/(t - a)$ . Comme  $h(c) = 1$ , on a nécessairement  $k = (c - a)/(c - b)$  d'où le résultat.  $\square$

**3.1.6. Corollaire.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts de  $D$  et  $r = [a, b, c, d] \in \mathbb{K} \subset \hat{\mathbb{K}}$ . On a les formules suivantes :

1.  $[b, a, c, d] = [a, b, d, c] = \frac{1}{r}$  ;
2.  $[a, c, b, d] = 1 - r$ .

*Démonstration.* Plutôt que d'établir ces formules à partir de l'expression précédente, considérons l'homographie  $u : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  qui à  $z$  associe  $1/z$ . Cette homographie échange  $\infty$  et 0 et fixe 1. Si  $h$  (resp.  $h'$ ) est l'homographie de  $D$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  qui envoie  $a, b, c$  (resp.  $b, a, c$ ) en  $\infty, 0, 1$ , on a

$h' = u \circ h$ . Comme par définition  $[a, b, c, d] = h(d)$  et  $[b, a, c, d] = h'(d)$  on en déduit  $[b, a, c, d] = u([a, b, c, d])$ .

En ce qui concerne le calcul de  $[a, b, d, c]$  (resp.  $[a, c, b, d]$ ), le raisonnement est analogue en considérant l'homographie  $v(z) = z/[a, b, c, d]$  (resp.  $w(z) = 1 - z$ ).  $\square$

*Remarque* : lorsque  $d = \infty$  la relation  $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$  s'écrit  $\overline{ba} = \overline{bc} + \overline{ca}$  : c'est la relation de Chasles sur les mesures algébriques.

*Remarque* : l'action des permutations sur les birapports donne une opération du groupe des permutations  $\mathfrak{S}_4$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) - \{\infty, 0, 1\}$  tel que le groupe de Klein formé des permutations (12)(34), (13)(24), (14)(23) et de l'identité, opère trivialement. Les orbites dans cette actions sont formées de six éléments :

$$\left\{ r, \frac{1}{r}, 1 - r, \frac{1}{1 - r}, \frac{r - 1}{r}, \frac{r}{r - 1} \right\}$$

sauf pour deux orbites exceptionnelles :  $\{-1, 2, \frac{1}{2}\}$  (si  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2) et  $\{-j, -j^2\}$  (si  $\mathbb{K}$  contient une racine cubique primitive de l'unité notée  $j$ ).

### 3.1.7. Corollaire. (*Birapport de quatre droites*)

Soit  $m$  un point d'un plan projectif  $\mathbb{P}(E)$  et soient  $A, B, C, D$  quatre droites du faisceau linéaire  $m^*$ . Pour  $\Delta$  une droite ne passant pas par  $m$ , le birapport  $[a, b, c, d]$  des traces de  $A, B, C, D$  sur  $\Delta$  ne dépend pas de la droite  $\Delta$  considérée.

*Démonstration.* On rappelle que  $m^*$  est muni d'une structure de droite projective ce qui permet de définir le birapport  $[A, B, C, D]$  des quatre droites. Comme l'incidence est une homographie, on en déduit alors que  $[a, b, c, d] = [A, B, C, D]$  d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : on aurait pu aussi utiliser une autre droite  $\Delta'$  et considérer la perspective  $p_m$  de centre  $m$  de  $\Delta$  sur  $\Delta'$  qui est une homographie.

Toute fraction rationnelle sur  $\mathbb{K}$  définit une application partout définie de  $\hat{\mathbb{K}}$  dans  $\hat{\mathbb{K}}$  prolongeant la fonction rationnelle usuelle. Si  $r = p/q$  est écrite sous forme réduite, on note  $\deg r = \max(\deg p, \deg q)$  le degré de  $r$ . On vérifie aisément que  $\deg r \circ s = \deg r \deg s$  et que  $\mathbb{K}(T)$  est une extension de  $\mathbb{K}(r(T))$  de degré  $\deg r$ . Ainsi on en déduit le résultat fort pratique suivant.

**3.1.8. Théorème.** Si une application rationnelle de  $\hat{\mathbb{K}}$  dans  $\hat{\mathbb{K}}$  admet une application réciproque qui est rationnelle, alors elle est homographique.

### 3.2. Homographies involutives

Comme trois points d'une droite projective forment un repère, nous avons vu qu'une homographie de la droite projective distincte de l'identité admet au plus deux points fixes. Par ailleurs en écrivant l'homographie sous la forme  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , avec  $c \neq 0$  si on choisit comme point infini un point non fixe par  $f$ , les points fixes sont donnés par la relation

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

de sorte que sur un corps algébriquement clos, on a exactement deux points fixes comptés avec multiplicité. Précisons les différentes situations.

**3.2.1. Proposition.** Soit  $f$  une homographie de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  :

- si  $f$  admet un unique point fixe, elle est conjuguée, dans  $PGL(2, \mathbb{K})$ , d'une translation  $z \mapsto z + b$  avec  $b \neq 0$  ;
- si  $f$  admet deux points fixes distincts  $a, b$ , elle est conjuguée d'une homothétie  $z \mapsto \lambda z$  avec  $\lambda \neq 0, 1$ . Dans ce cas on a  $[a, b, m, f(m)] = \lambda$  pour tout  $m$  distinct de  $a, b$  ou encore avec les conventions usuelles :

$$\frac{f(m) - b}{f(m) - a} = \lambda \frac{m - b}{m - a}.$$

*Démonstration.* Si  $f$  admet un unique point fixe  $m$ , on choisit une homographie qui envoie  $m$  sur  $\infty$ , par exemple  $h(z) = \frac{1}{z-m}$ . Alors  $g = hfh^{-1}$  a pour unique point fixe  $\infty$  de sorte que  $c = 0$  et donc  $g(z) = az+b$ . Comme  $g$  n'a que  $\infty$  comme point fixe alors  $a = 1$  et  $g$  est bien une translation.

Si  $f$  fixe  $a$  et  $b$ , on choisit  $h$  telle que  $h(a) = \infty$  et  $h(b) = 0$ , par exemple  $h(z) = \frac{z-b}{z-a}$ . Alors  $g = hfh^{-1}$  a pour points fixes  $\infty$  et  $0$  et on vérifie que  $g$  est une homothétie de rapport  $\lambda \neq 1$ . On a alors  $[a, b, m, f(m)] = [h(a), h(b), h(m), hf(m)] = [\infty, 0, z, \lambda z] = \lambda$ .  $\square$

*Remarque :* pour une application de ce résultat aux suites récurrentes homographiques, cf. l'exercice ??.

**3.2.2. Définition.** Une involution est une homographie  $h \neq 1$  telle que  $h^2 = 1$ .

**3.2.3. Proposition.** Soit  $h$  une homographie d'une droite projective  $D$  sur elle-même. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $h$  est une involution ;
- (b) si  $K$  n'est pas de caractéristique 2,  $h$  est de la forme  $\mathbb{P}(u)$  où  $u$  est une application linéaire de trace nulle ;

(c) il existe un point  $m \in D$  tel que  $h(m) \neq m$  et  $h^2(m) = m$ .

*Démonstration.* Les applications linéaires  $u$  telles que  $h = \mathbb{P}(u)$  ont des matrices proportionnels à  $M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$  où en termes d'abscisses projectives  $h(t) = (at + b)/(ct + d)$ . Ainsi  $h$  est une involution si et seulement si l'expression  $ctt' + dt' - at - b = 0$  est symétrique en  $t$  et  $t'$  soit ssi  $d = -a$  d'où l'équivalence entre (a) et (b).

Il est clair que (a) implique (c); supposons donc (c) vraie. On prend  $m, h(m)$  pour points base  $\infty, 0 : h(\infty) = 0$  et  $h(0) = \infty$ . On a alors  $a = d = 0$  ce qui s'écrit  $tt' = b/c$  relation qui est bien symétrique en  $t$  et  $t'$ .  $\square$

**3.2.4. Corollaire.** Soit  $D$  une droite projective et  $f : D \rightarrow D$  une homographie. Alors  $f$  est produit d'au plus deux involutions.

*Démonstration.* Le résultat est évident si  $f$  est l'identité. Sinon comme  $f$  a au plus deux points fixes, on choisit  $a \neq b$  non fixes par  $f$ ; en caractéristique 2 il ne reste qu'un point qui est obligatoirement fixe. Soit  $c$  un troisième point et on note  $a', b', c'$  leur image par  $f$ . Si on a  $a = b'$  et  $b = a'$  alors  $f^2(b) = f(b') = f(a) = a' = b$  et  $f(b) \neq b$  de sorte que  $f$  est une involution.

Sinon on a, disons,  $a \neq b'$  et on définit l'homographie  $i$  sur le repère  $a, b, b'$  par  $i(a) = b', i(b) = a'$  et  $i(b') = a$ . Comme  $i$  échange  $a$  et  $b'$  c'est une involution. Soit alors  $c'' = i(c)$  qui est donc distinct de  $b'$  et  $a'$ . On peut donc définir  $j$  sur le repère  $b', a', c''$  par  $j(b') = a', j(a') = b'$  et  $j(c'') = c'$ . Comme  $j$  échange  $a'$  et  $b'$ , c'est une involution et on a  $j \circ i(a) = a', j \circ i(b) = b'$  et  $j \circ i(c) = c'$  ce qui montre que  $f = j \circ i$ .  $\square$

**3.2.5. Corollaire.** Une involution  $h$  est uniquement déterminée par la donnée de deux couples  $(p, p'), (q, q')$  de points homologues non fixes.

*Démonstration.* Il existe une unique homographie qui envoie  $(p, p', q)$  sur  $(p', p, q')$  qui est donc  $h$ ; le fait que  $h$  soit une involution découle alors du point (c) de la proposition précédente.  $\square$

*Remarque :* les points fixes d'une homographie ont pour abscisses projectives les racines finies ou infinies de l'équation  $ct^2 + (d-a)t - b = 0$  de sorte que pour  $h \neq 1$ , il y en a au plus deux.

**3.2.6. Corollaire.** L'unique homographie  $h$  d'une droite projective  $D$  vers une autre  $D'$  qui envoie le repère projectif  $(P_1, P_2, P_3)$  sur un repère  $(P'_1, P'_2, P'_3)$ ,

où  $P_1 \neq P'_1$ , est une involution si et seulement si

$$[P_1, P_2, P_3, P'_1] = [P'_1, P'_2, P'_3, P_1].$$

*Démonstration.* Dans le sens direct, comme  $h$  conserve le birapport, on a

$$[P_1, P_2, P_3, P'_1] = [h(P_1), h(P_2), h(P_3), h(P'_1)] = [P'_1, P'_2, P'_3, P_1].$$

Réciproquement si  $[P_1, P_2, P_3, P'_1] = [P'_1, P'_2, P'_3, P_1]$ , alors comme  $h$  préserve le birapport on en déduit que  $P_1 = h(P'_1)$  et donc  $h$  est une homographie avec un couple de points homologues distincts, c'est donc une involution d'après la troisième propriété de la proposition III-3.2.3.  $\square$

**3.2.7. Corollaire.** Soit  $abc$  un triangle non dégénéré et  $D$  une droite ne passant pas par  $a, b, c$ ; on note  $p, q, r$  son intersection avec respectivement  $(bc)$ ,  $(ac)$  et  $(ab)$ . Étant donnés trois points distincts  $a', b', c'$  de respectivement  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$ , on note  $p', q', r'$  les points d'intersection de  $D$  avec respectivement  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$ . Alors l'unique homographie de  $D$  qui envoie  $(p, q, r)$  sur  $(p', q', r')$  est une involution si et seulement si les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes.

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que les droites sont concourantes en un point  $m$ . La projection de centre  $m$  de  $D$  sur  $(ac)$  envoie  $(p', q', r', r)$  sur  $(a, b', c, q)$ . La projection de centre  $b$  de  $(ac)$  sur  $D$  envoie alors  $(a, b', c, q)$  sur  $(r, q', p, q)$  de sorte qu'au final

$$[p', q', r', q] = [a, b', c, q] = [r, q', p, q] = [p, q, r, q']$$

et on conclut en utilisant la proposition précédente.  $\square$

**3.2.8. Corollaire.** Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

*Démonstration.* L'orthogonalité induit une homographie involutive  $tt' = -1$  sur la droite à l'infini; le résultat découle alors directement du corollaire précédent.  $\square$

**3.2.9. Théorème. (Desargues-Sturm)**

Un faisceau linéaire  $F$  de coniques du plan projectif découpe une involution sur toute droite  $D$  ne passant par aucun point base de  $F$ .

*Démonstration.* Par tout point  $m$  de  $D$  passe une unique conique  $C$  de  $F$  qui recoupe  $D$  en un point  $j(m)$ . L'abscisse projective de  $j(m)$  est fonction rationnelle de celle de  $m$ . De plus  $j(j(m)) = m$  et on conclut par III-3.1.8.  $\square$

*Remarque :* citons le cas particulier suivant où l'on considère le faisceau de conique passant par quatre points en position générale.

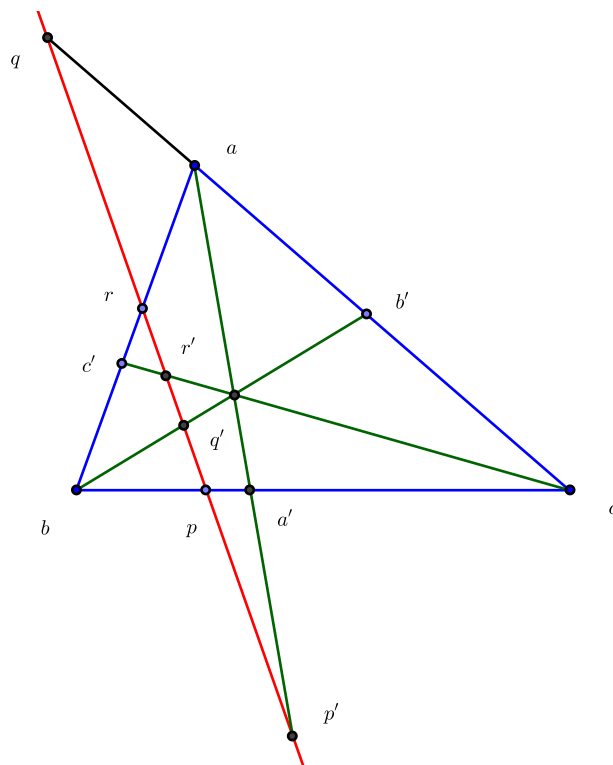


Figure 3.1

*Involution sur une droite projective*

**3.2.10. Corollaire.** Soit  $(a, b, c, d)$  un repère du plan projectif et soit  $D$  une droite ne passant par aucun des points du repère. On note  $p, q, r, p', q', r'$  les intersections de  $D$  avec les droites  $(ab)$ ,  $(ac)$ ,  $(ad)$ ,  $(cd)$ ,  $(db)$  et  $(bc)$  respectivement et on suppose  $p \neq p'$ . Alors l'involution qui échange  $p$  avec  $p'$  et  $q$  avec  $q'$  échange aussi  $r$  avec  $r'$ .

*Démonstration.* Considérons les perspectives  $p_a : D \rightarrow (cd)$  et  $p_b : (cd) \rightarrow D$  et leur composée  $h = p_b \circ p_a$  qui est une homographie de  $D$ . On note  $u = (ab) \cap (cd)$  et comme  $p_a$  transforme  $p, p', q, c$  en  $u, p', c, d$ , les images par  $h$  de  $p, p', q, r$  sont respectivement  $p, p', r', q'$  d'où l'égalité des birapports :  $[p, p', q, r] = [p, p', r', q'] = [p', p, q', r']$ . Il en résulte que l'on a  $[p, p', q, r] = [f(p), f(p'), f(q), r']$  d'où  $r' = f(r)$ .  $\square$

**3.3. Division harmonique**

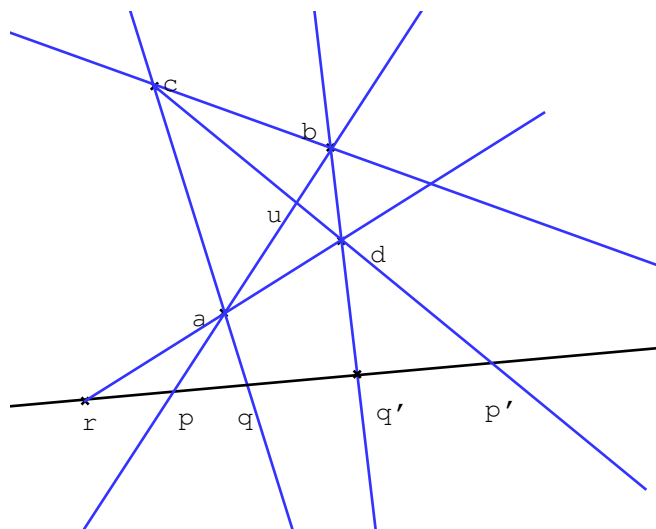


Figure 3.2  
 Desargues-Sturm dégénéré

**3.3.1. Définition.** On dit que 4 points forment *une division harmonique* si  $[a, b, c, d] = -1$ .

*Remarques :*

- si on a  $[a, b, c, d] = -1$  alors on a aussi  $[b, a, c, d] = [a, b, d, c] = [c, d, a, b] = -1$  de sorte que le fait pour  $a, b, c, d$  d'être une division harmonique est une propriété de la double paire :  $\{a, b\}, \{c, d\}$ . On dit que  $a$  et  $b$  sont *conjugués harmoniques* par rapport à  $c$  et  $d$ .
- dans  $\mathbb{P}^1(K)$  avec  $a = \infty$ , on a

$$[\infty, b, c, d] = \frac{d-b}{c-b} = -1 \Leftrightarrow c+d = 2b \quad (1)$$

autrement dit  $b$  est alors le milieu du segment  $[cd]$  : le conjugué harmonique de  $\infty$  par rapport à  $c, d$  est le milieu de  $c, d$ .

- si  $a, b, c, d$  sont tous dans la droite affine  $K$ , leur birapport vaut  $-1$  si et seulement si on a  $\frac{c-a}{c-b} = -\frac{d-a}{d-b}$  ou encore en termes de mesures algébriques

$$\frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} = -\frac{\overline{da}}{\overline{db}}.$$

On peut aussi l'écrire sous la forme moins mnémotechnique suivante :  $2(ab+cd) = (a+b)(c+d)$ .

- $[a, -a, c, d] = -1$  équivaut à  $cd = a^2$ .



- dans le plan projectif, pour  $m$  un point, quatre droites  $A, B, C, D$  de  $m^*$  sont en division harmonique si et seulement si pour toute droite  $\Delta \notin m^*$ , les traces  $a, b, c, s$  le sont sur  $\Delta$ . On parle alors de *pinceau harmonique* : un exemple classique en géométrie euclidienne est celui de deux droites et de leurs deux bissectrices, cf. l'exercice ??.

**3.3.2. Proposition.** *Soit  $f : D \rightarrow D$  une homographie admettant deux points fixes  $a, b$  distincts.*

- 1) *Si  $f$  est une involution on  $a$ , pour tout  $m \in D$  distinct de  $a$  et  $b$  :*

$$[a, b, m, f(m)] = -1$$

*autrement dit  $m$  et  $f(m)$  sont conjugués harmoniques par rapport à  $a, b$ .*

- 2) *Réciproquement s'il existe  $m \neq a, b$  tel que l'on ait  $[a, b, m, f(m)] = -1$  alors  $f$  est une involution.*

*Démonstration.* 1) Posons  $r = [a, b, m, f(m)]$  et appliquons  $f$  : on a  $r = [a, b, f(m), m] = 1/r$  de sorte que  $r = \pm 1$  et comme  $f(m) \neq m$ , on a  $r = -1$ .

- 2) Le même argument montre que l'on a  $f^2(m) = m$  et on conclut par la proposition III-3.3.2. □

**3.3.3. Corollaire.** *Soient  $a \neq b \in \mathbb{P}^1(K)$ , il existe alors une unique involution  $f$  admettant  $a$  et  $b$  comme points fixes. Cette involution est conjuguée de l'application  $z \mapsto -z$ , symétrie de centre 0.*

**3.3.4. Proposition. (Construction du quatrième harmonique)**

*Soit  $a, b, c$  trois points alignés du plan projectif ; avec les notations de la figure III-3.3, on joint  $a$  et  $b$  à un point  $m$  hors de  $D$  ; une droite par  $c$  coupe  $(ma)$  et  $(mb)$  en  $a'$  et  $b'$  ; si  $p$  est le point commun à  $(ab')$  et  $(ba')$  alors  $(mp)$  coupe  $D$  en un point  $d$  tel que  $[a, b, c, d] = -1$ .*

*Démonstration.* On prend  $a, b, m$  pour point base et on envoie  $(am)$  à l'infini ; en notant  $(-u, 0)$  les coordonnées affines de  $c$  et  $(0, v)$  celles de  $b'$ , l'équation de  $(cb')$  est  $y = (x + u)u^{-1}v$  ; celle de  $(bp)$  qui lui est parallèle est  $y = xu^{-1}v$  ; les coordonnées de  $p$  sont donc  $(u, v)$  et donc celles de  $d$  sont  $(u, 0)$  et on a  $[a, b, c, d] = [\infty, 0, -u, u] = -1$ . □

**3.3.5. Corollaire.** *Dans un quadrilatère complet, une diagonale coupe harmoniquement les deux autres, i.e. avec les notations de la figure III-3.4, les points  $a, b', p, p'$  sont en division harmonique.*

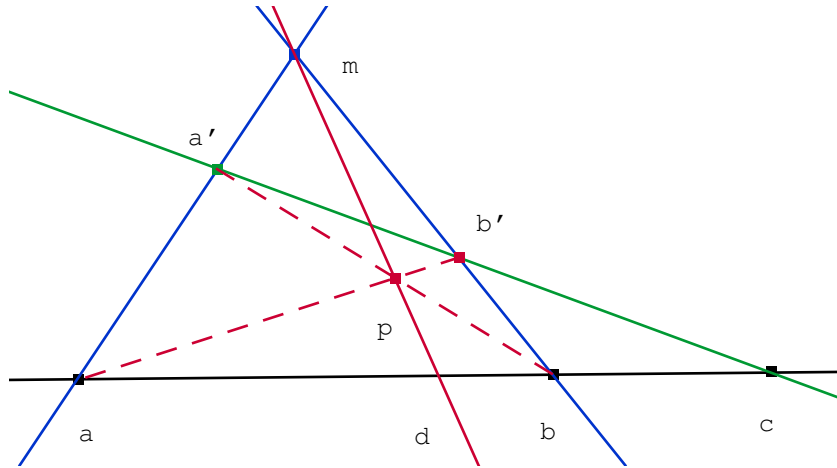


Figure 3.3  
*Construction du quatrième harmonique*

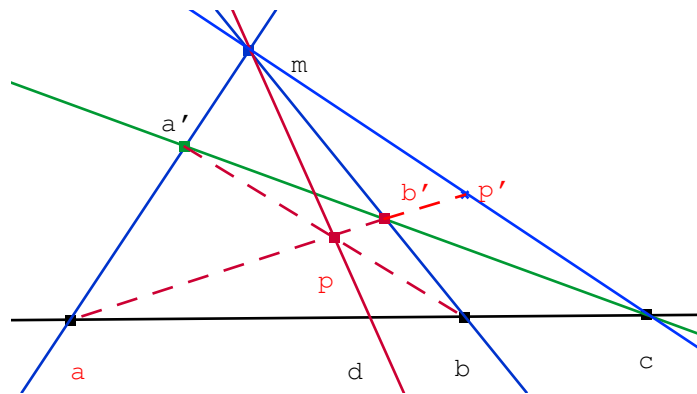


Figure 3.4  
*Division harmonique dans un quadrilatère complet*

*Démonstration.* D'après la proposition précédente, les droites  $(ma)$ ,  $(mp)$ ,  $(mb')$  et  $(mc)$  forment une division harmonique et donc leur intersection avec la droite  $(ap)$  aussi d'où le résultat.  $\square$

### 3.4. Preuves projectives de Ménélaüs et Céva

**3.4.1. Lemme.** Soient  $a, b, c, d, e$  cinq points d'une droite projective, on a alors la formule

$$[b, c, d, e] \times [c, a, d, e] \times [a, b, d, e] = 1.$$

*Démonstration.* Cela résulte de la formule qui donne le birapport

$$[b, c, d, e] \times [c, a, d, e] \times [a, b, d, e] = \frac{\overline{db}}{\overline{dc}} : \frac{\overline{eb}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{dc}}{\overline{da}} : \frac{\overline{ec}}{\overline{ea}} \times \frac{\overline{da}}{\overline{db}} : \frac{\overline{ea}}{\overline{eb}} = 1.$$

□

**3.4.2. Lemme. (dit des trois birapports)**

Soient  $a, b, c$  trois points non alignés d'un plan projectif. On considère deux droites distinctes  $D$  et  $\Delta$  ne passant pas par  $a, b, c$  et coupant respectivement  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$  en  $a', b', c'$  et  $\alpha, \beta, \gamma$ . On a alors l'égalité

$$[b, c, a', \alpha] \times [c, a, b', \beta] \times [a, b, c', \gamma] = 1.$$

Réciproquement si on a trois points  $a, b, c$  non alignés et des points  $a', \alpha$ ,  $b', \beta$  et  $c', \gamma$  situés respectivement sur  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$  tels que  $a', b', c'$  soient alignés et que le produit des birapports ci-dessus soit égal à 1 alors les points  $\alpha, \beta, \gamma$  sont alignés.

*Démonstration.* Soit  $o = D \cap \Delta$  et posons  $A = (oa)$ ,  $B = (ob)$  et  $C = (oc)$ . L'incidence entre  $o^*$  et les droites  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$  donne :

$$[b, c, a', \alpha] = [B, C, D, \Delta], \quad [c, a, b', \beta] = [C, A, D, \Delta], \quad [a, b, c', \gamma] = [A, B, D, \Delta]$$

et le résultat découle du lemme précédent.

La réciproque s'obtient en appliquant le sens direct avec  $\gamma' = (ab) \cap (\alpha\beta)$ . □

*Application à la preuve du théorème de Ménélaüs :* dans le sens direct, on applique le lemme des trois rapports avec  $c' \in D = (a'b')$  et  $\Delta$  la droite de l'infini. Le produit des trois birapports du lemme précédent s'écrit alors

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1$$

ce qui est le résultat cherché.

Réciproquement si on a cette relation, appelons  $c'' = (ab) \cap (a'b')$ ; le sens direct et l'hypothèse donnent  $[a, b, c', \gamma] = [a, b, c'', \gamma]$  où  $\gamma = (ab) \cap \Delta$  et donc  $c' = c''$  d'où le résultat.

En ce qui concerne le théorème de Ceva, nous allons utiliser le corollaire suivant de III-3.2.7.

**3.4.3. Corollaire.** Avec les notations du corollaire III-3.2.7, les droites  $(ap')$ ,  $(bq')$  et  $(cr')$  sont concourantes si et seulement si on a la relation

$$[p, q, r, r'] \times [q, r, p, p'] \times [r, p, q, q'] = -1.$$

ou encore

$$[b, a, r, c'] \times [c, b, p, a'] \times [a, c, q, b'] = -1 \tag{2}$$

*Démonstration.* Considérons l'homographie  $f$  qui envoie  $p, q, r$  sur  $p', q', r'$ . La première relation de l'énoncé s'écrit

$$\frac{\overline{r'q}}{\overline{r'p}} \times \frac{\overline{p'r}}{\overline{p'q}} \times \frac{\overline{q'p}}{\overline{q'r}} = 1$$

ce qui en multipliant en haut et en bas par  $\overline{r'r}$  conduit à

$$[r', p', q, r] = [r', q', r, p]^{-1} = [r', q', p, r] = [r, p, q', r']$$

de sorte que l'homographie qui envoie  $r', p', q$  sur  $r, p, q'$  envoie aussi  $r$  sur  $r'$ ; c'est donc une involution mais alors elle envoie aussi  $p$  sur  $p'$  et donc est égale à  $f$  et le résultat découle de III-3.2.7.

Pour la seconde relation, on montre successivement les égalités :

$$[p, q, r, r'] = [b, a, r, c'], \quad [q, r, p, p'] = [c, b, p, p'], \quad [r, p, q, q'] = [a, c, q, b']$$

en utilisant les perspectives de centre  $c, a, b$ .  $\square$

*Application à la preuve projective du théorème de Céva :* on applique le corollaire précédent en prenant pour  $D$  la droite à l'infini. La formule (III-2) s'écrit alors

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1,$$

d'où le résultat.

*Remarque :* afin de projectiver la conclusion du théorème de Céva, on choisit une droite  $D$  quelconque et on note  $p, q, r$  ses intersections avec les côtés de  $abc$ . D'après Ménélaüs on a

$$\frac{\overline{rb}}{\overline{ra}} \times \frac{\overline{pc}}{\overline{pb}} \times \frac{\overline{qa}}{\overline{qb}} = 1$$

de sorte qu'en multipliant la conclusion de Céva par cette quantité, on obtient le produit de birapport de (III-2).

## Chapitre IV

# Étude transverse des coniques

### 1. Point de vue affine

On s'intéresse ici aux coniques affines du plan ; le corps  $\mathbb{K}$  est supposé de caractéristique différente de 2.

#### 1.1. Equations barycentriques d'une conique

Soit  $(a, b, c)$  un repère affine du plan ; on considère alors le repère cartésien  $\mathcal{R} := (a, \vec{ab}, \vec{ac})$ . Rappelons alors la définition « cartésienne » d'une conique dans  $\mathcal{R}$ .

**1.1.1. Définition.** Pour  $\Sigma_c$  une matrice symétrique de dimension 2, la conique associée dans  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des points  $m$  du plan tels que  $\vec{am} = x\vec{ab} + y\vec{ac}$ , où  $x, y$  vérifient une équation qui peut s'écrire matriciellement

$$(1 \ x \ y)\Sigma_c \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

*Remarque :* la définition ci-dessus dénote en ce qu'elle fait intervenir des coordonnées cartésiennes ; son avantage est qu'elle est plus familière. Donnons en maintenant une variante barycentrique.

**1.1.2. Proposition.** Dans le repère  $(a, b, c)$ , un point  $m$  de coordonnées barycentriques homogènes  $(\alpha : \beta : \gamma)$  appartient à la conique de matrice  $\Sigma_c$

si et seulement si

$$(\alpha \ \beta \ \gamma)^t S \Sigma_c S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0,$$

où  $S$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.* Si un point  $m$  du plan affine a pour coordonnées barycentriques  $(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  alors  $\overrightarrow{am} = x\overrightarrow{ab} + y\overrightarrow{ac}$  avec

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat en découle alors directement.  $\square$

*Remarque :* ainsi une équation barycentrique d'une conique est de la forme

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta$$

que l'on note aussi matriciellement  $(\alpha \ \beta \ \gamma)\Sigma \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$ , avec  $\Sigma = \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$ .

**1.1.3. Notation.** Dans la suite nous noterons  $\psi$  la forme bilinéaire associée à la matrice  $\Sigma$  :

$$x, y \in \mathbb{K}^3 \mapsto \psi(x, y) = {}^t x \Sigma y.$$

*Remarque :* si  $A = 0$  alors le point  $a$  appartient à la conique qui est donc non vide.

*Remarque :* dans le cas réel, si  $A \neq 0$ , en réduisant par la méthode de Gauss,  $\Gamma$  est réelle non décomposée si et seulement si  $AB - F^2 > 0$  et  $\det \Sigma > 0$ .

**1.1.4. Définition.** La conique  $\Gamma$  sera dite régulière, lorsque  $\det \Sigma \neq 0$ .

*Remarque :* une conique régulière n'est pas décomposée, i.e. réunion de deux droites, en revanche elle peut être vide, cf. la cas réel ci-dessus.

### 1.2. Tangentes en un point et directions asymptotiques

Supposons désormais la conique régulière et non vide. Soient :

- $m_0$  un point de coordonnées barycentriques absolues  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ;
- $\vec{u} = x\vec{ab} + y\vec{ac}$ .

Les coordonnées barycentriques de  $m_0 + t(x\vec{ab} + y\vec{ac})$  sont  $(\alpha - t(x + y), \beta + tx, \gamma + ty)$ .

**1.2.1. Définition.** On associe à  $\vec{u}$  le triplet  $(-x - y, x, y)$  et on note :

- $F(\vec{u}) = F(-x - y, x, y)$  ;
- $\psi(m_0, \vec{u}) = (\alpha \ \beta \ \gamma) \Sigma \begin{pmatrix} -x - y \\ x \\ y \end{pmatrix}$ .

En développant  $F(\alpha - t(x + y), \beta + tx, \gamma + ty)$  selon les puissances de  $t$ , on obtient alors le lemme suivant.

**1.2.2. Lemme.** Pour  $t \in \mathbb{K}$ , on a

$$F(m) = F(m_0) + 2t\psi(m_0, \vec{u}) + t^2F(\vec{u}) = 0.$$

Ainsi la droite  $m_0 + t\vec{u}$  coupe la conique en les points correspondants aux valeurs de  $t$  racines de  $F(m) = F(m_0) + 2t\psi(m_0, \vec{u}) + t^2F(\vec{u}) = 0$ . Les différentes situations sont alors :

- $F(\vec{u}) = 0$ , on dit que  $\vec{u}$  est une *direction asymptotique* de  $\Gamma$  ; pour tout  $m_0 \in \Gamma$ , i.e.  $F(m_0) = 0$ , on a  $\psi(m_0, \vec{u}) \neq 0$  sinon la droite appartiendrait à la conique qui serait dégénérée et donc  $m_0$  est l'unique point de  $\Gamma$  sur la droite  $m_0 + \mathbb{K}\vec{u}$ .
- $F(\vec{u}) \neq 0$ , et si  $m_0 \in \Gamma$  est tel que  $\psi(m_0, \vec{u}) = 0$ , alors  $m_0$  est l'unique point de la droite  $m_0 + \mathbb{K}\vec{u}$  sur  $\Gamma$ , on l'appelle la *tangente* de  $\Gamma$  en  $m_0$ .
- $F(\vec{u}) \neq 0$  et pour  $m_0 \in \Gamma$  tel que  $\psi(m_0, \vec{u}) \neq 0$ , la droite  $m_0 + \mathbb{K}\vec{u}$  recoupe  $\Gamma$  en un deuxième point ; on dit que la droite est *sécante*.
- la droite  $m_0 + \mathbb{K}\vec{u}$  n'intersecte pas  $\Gamma$ .

**1.2.3. Définition.** Dans le cas où on a

- une direction asymptotique double, on dit que  $\Gamma$  est une *parabole* ;
- deux directions asymptotiques distinctes, on dit que  $\Gamma$  est une *hyperbole* ;
- aucune direction asymptotique, alors  $\Gamma$  est appelée une *ellipse*.

*Remarque :* dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , le nombre de directions asymptotiques est donnée par le signe du discriminant de la forme quadratique  $F(-v-w, v, w)$ .

*Remarque* : dans le cas d'une hyperbole, les directions asymptotiques vivent dans une extension de degré 2 de  $\mathbb{K}$  ; par exemple elles sont complexes quand  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

### 1.3. Diamètres

Soit  $\vec{u}$  un vecteur qui n'est pas une direction asymptotique et considérons la droite  $D$  passant par un point  $m_1$  et dirigée par  $\vec{u}$ . Les points d'intersection de  $D$  avec  $\Gamma$ , s'ils existent, sont de la forme  $m_1 + t\vec{u}$  où  $t$  est racine de

$$F(m_1) + 2t\psi(m_1, \vec{u}) + t^2F(\vec{u}) = 0.$$

Le milieu de ces deux points est

$$n_1 = m_1 - \frac{\psi(m_1, \vec{u})}{F(\vec{u})} \vec{u}$$

lequel ne dépend pas du point  $m_1$  considéré sur  $D$  puisque pour  $m'_1 = m_1 + \lambda\vec{u}$ , on a  $n'_1 = m_1 + \lambda\vec{u} - \frac{\psi(m_1 + \lambda\vec{u}, \vec{u})}{F(\vec{u})} \vec{u} = n_1$  car  $\psi(m_1 + \lambda\vec{u}, \vec{u}) = \psi(m_1, \vec{u}) + F(\vec{u})$ .

On remarque alors que  $n_1$  appartient à la droite d'équation

$$D_\Gamma(\vec{u}) : \psi(m, \vec{u}) = 0$$

qui est appelée **le diamètre de  $\Gamma$  pour la direction  $\vec{u}$** . D'après le paragraphe précédent sur la notion de tangente, on observe alors le résultat suivant.

**1.3.1. Lemme.** *Soit  $m_0$  appartenant à l'intersection du diamètre  $D_\Gamma(\vec{u})$  avec  $\Gamma$ . La tangente en  $m_0$  à  $\Gamma$  est alors de direction  $\vec{u}$ .*

Notons  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $D_\Gamma(\vec{u})$  ; il vérifie  $\psi(\vec{v}, \vec{u}) = 0$ .

- $\psi$  étant symétrique, si  $\vec{v}$  n'est pas une direction asymptotique alors  $D_\Gamma(\vec{v})$  a pour direction  $\vec{u}$  ; on dit que *les directions  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont conjuguées*.
- Si  $\vec{v}$  est une direction asymptotique alors  $\psi(\vec{v}, \vec{v}) = \psi(\vec{v}, \vec{u}) = 0$  de sorte que  $\vec{v}$  est dans le noyau de  $\psi$  lequel est alors de dimension 1. Ainsi tout vecteur  $\vec{u}$  non colinéaire à  $\vec{v}$  a un diamètre de direction  $\vec{v}$  ;  $\Gamma$  est une parabole.
- si  $\Gamma$  est une hyperbole, ses deux directions asymptotiques sont conjuguées dans l'extension de degré 2 de  $\mathbb{K}$  où elles vivent.

### 1.4. Centre



**1.4.1. Définition.** On dit que  $o$  est *un centre* de  $\Gamma$  si  $o \in D_\Gamma(\vec{u})$  pour tout vecteur  $\vec{u}$ , i.e. avec les notations précédentes  $\psi(o, \vec{u}) = 0$ .

*Remarque :* par linéarité, il suffit de le vérifier pour deux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  non colinéaires.

Rappelons qu'avec nos notations, on voit  $\vec{u}$  comme un vecteur  $\begin{pmatrix} -x - y \\ x \\ y \end{pmatrix}$

et donc pour qu'un tel centre existe il faut et il suffit que  $\Sigma o = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et donc

$$o = \lambda \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit si  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  alors la conique est une parabole et ne possède pas de centre sinon les coefficients barycentriques de son centre sont donnés par les sommes des lignes de la matrice symétrique  $\Sigma^{-1}$ .

*Remarque :* deux diamètres conjugués s'intersectent sur le centre.

*Remarque :* pour une hyperbole, les deux asymptotes s'intersectent sur le centre. On retrouve le fait qu'un point de l'hyperbole est le milieu du segment que la tangente en ce point détermine avec les asymptotes.

## 1.5. Régionnement lié à la conique

**1.5.1. Définition.** On dira qu'un point  $a$  du plan est *extérieur* à  $\Gamma$  s'il est l'intersection de deux tangentes de  $\Gamma$ ; le complémentaire,  $\Gamma$  exclue, est *l'intérieur* de la conique.

Si  $a$  est extérieur à  $\Gamma$  et si  $b, c$  sont les points de contact des deux tangentes à  $\Gamma$  issues de  $a$ , alors une équation de  $\Gamma$  est de la forme

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 - 2d\beta\gamma = 0.$$

Ses directions asymptotiques sont données par  $F(-x - y, x, y) = 0$ ,  $\vec{u} = x\vec{ab} + y\vec{ac}$ ; le discriminant réduit étant  $\Delta' = d(d - 2)$  avec  $F(a) = 1$  :

- si  $d = 0$ ,  $\Gamma$  est décomposée en la droite double  $(bc)$ ;
- si  $d = 2$ ,  $\Gamma$  est une parabole d'intérieur le lieu des points  $m$  tels que,  $\vec{u}$  n'étant pas une direction asymptotique, et donc  $F(\vec{u}) > 0$ ,  $F(m)F(\vec{u}) > 0$ ;

– si  $d(d-2) \neq 0$ ,  $\Gamma$  est une conique à centre. Avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient que le centre  $o$  de  $\Gamma$  a pour coordonnées barycentriques ( $d : 1 : 1$ ). Si  $\Gamma$  est une ellipse, son intérieur contient son centre et est donc le lieu des points  $m$  tels que  $F(m)F(o) < 0$ . Si  $\Gamma$  est une hyperbole, c'est l'extérieur qui contient son centre et est donc caractérisé par  $F(m)F(o) < 0$ .

### 1.6. Théorème de Carnot

#### 1.6.1. Théorème. (de Carnot)

Étant donnés trois couples de points  $(p, p')$ ,  $(q, q')$ ,  $(r, r')$  situés respectivement sur les côtés  $bc$ ,  $ca$ ,  $ab$  d'un triangle et distincts des sommets, il existe une unique conique contenant ces six points si et seulement si

$$\left( \frac{\overline{pc}}{\overline{pb}} \cdot \frac{\overline{p'c}}{\overline{p'b}} \right) \cdot \left( \frac{\overline{qa}}{\overline{qc}} \cdot \frac{\overline{q'a}}{\overline{q'c}} \right) \cdot \left( \frac{\overline{rb}}{\overline{ra}} \cdot \frac{\overline{r'b}}{\overline{r'a}} \right) = 1.$$

*Démonstration.* Soit une conique  $\Gamma$  d'équation dans le repère affine  $(a, b, c)$  :

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta = 0$$

et passant par les points  $p(0, \beta_1, \gamma_1)$  et  $p'(0, \beta'_1, \gamma'_1)$ . Notons que comme  $\Gamma$  ne passe pas par  $a, b$  ou  $c$ , on a  $ABC \neq 0$ . Les points  $p$  et  $p'$  sont les intersections de  $\Gamma$  avec la droite  $(bc)$  d'équation  $A = 0$  de sorte que, comme  $\gamma_1\gamma'_1 \neq 0$ ,  $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$  et  $\frac{\beta'_1}{\gamma'_1}$  sont les racines de  $BX^2 + 2DX + C$  et donc

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \frac{\beta'_1}{\gamma'_1} = \frac{C}{B} \text{ soit } \frac{\overline{pc}}{\overline{pb}} \cdot \frac{\overline{p'c}}{\overline{p'b}} = \frac{C}{B}.$$

De manière analogue on obtient

$$\frac{\overline{qa}}{\overline{qc}} \cdot \frac{\overline{q'a}}{\overline{q'c}} = \frac{A}{C} \text{ et } \frac{\overline{rb}}{\overline{ra}} \cdot \frac{\overline{r'b}}{\overline{r'a}} = \frac{B}{A}$$

ce qui montre la condition nécessaire.

Réciproquement, les cinq points  $p, p', q, q', r$  déterminent une conique : en effet l'intersection de  $\Gamma$  avec respectivement  $(bc)$  et  $(ac)$ , fournit les racines des équations

$$BX^2 + 2DX + C = 0 \text{ et } AY + 2EY + C = 0$$

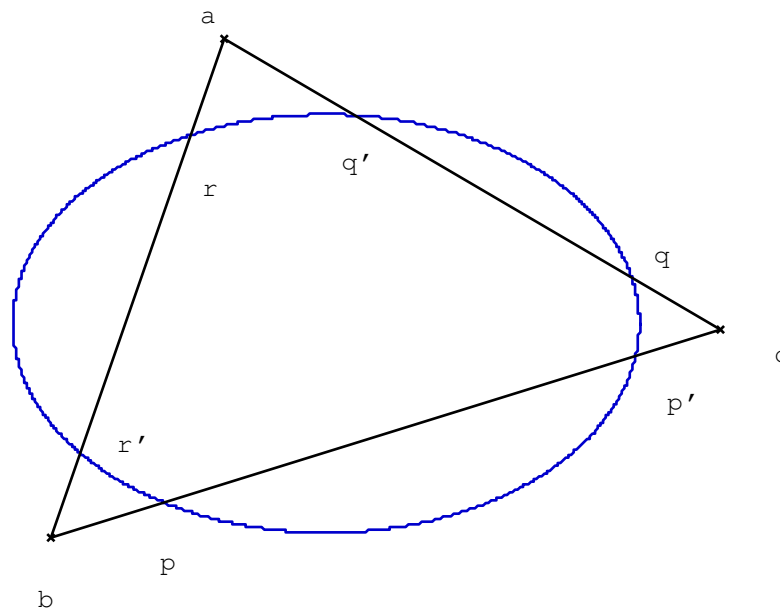


Figure 1.1  
Théorème de Carnot

ce qui fixe, à une homothétie près les coefficients  $A, B, C, D, E$  ( $C$  étant commun aux deux équations, on n'a plus qu'un seul facteur de proportionnalité). Le dernier coefficient est déterminé par  $r \in \Gamma$ . Ainsi on a montré qu'il y a exactement une conique passant par  $p, p', q, q', r$ ; celle-ci recoupe  $(ab)$  en  $r_0$  tel que, d'après le sens direct et l'hypothèse,

$$\frac{\overline{r'b}}{\overline{r'a}} = \frac{\overline{r_1b}}{\overline{r_1a}}$$

et donc  $r_1 = r'$ . □

*Remarque :* si les triplets  $(p, q, r)$  et  $(p', q', r')$  vérifient la condition de Ceva, les six points vérifient celle de Carnot, ils sont donc sur la même conique. Si ces triplets vérifient la condition de Ménélaus, les six points vérifient celle de Carnot mais la conique est décomposée en les deux droites qui portent chacun des triplets.

**1.7. Lois de groupe**

Considérons la loi interne suivante sur une conique  $\Gamma$  pointée en un point  $o \in \Gamma$  : étant donnés deux points  $a, b \in \Gamma$ , la parallèle à  $(ab)$  passant par  $o$  recoupe  $\Gamma$  en un point que l'on note  $a * b$ .

*Remarque* : si  $a = b$  la droite  $(ab)$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $a$ .

**1.7.1. Proposition.** *La loi interne  $(a, b) \in \Gamma^2 \mapsto a * b \in \Gamma$  munit  $\Gamma$  d'une loi de groupe commutative et d'élément neutre  $o$ .*

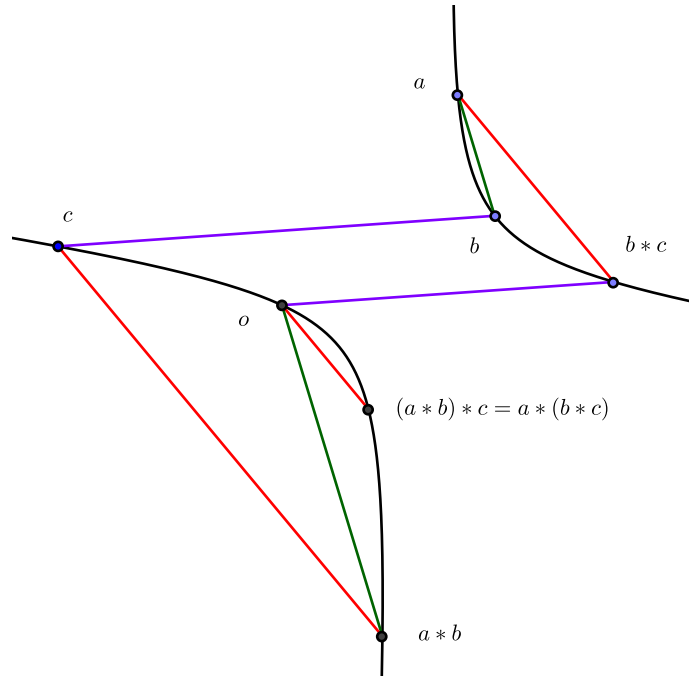


Figure 1.2

Loi de groupe sur une hyperbole

*Démonstration.* La commutativité de la loi est claire. Par définition pour tout point  $a$  on a clairement  $a * o = o * a = a$ . Notons  $T_o$  la tangente à  $\Gamma$  en  $o$ ; la parallèle à  $T_o$  et passant par un point  $a \in \Gamma$  recoupe  $\Gamma$  en un point  $a'$  tel que, par définition  $a * a' = a' * a = o$  et donc  $a'$  est l'inverse de  $a$ . Ainsi il ne reste plus qu'à vérifier l'associativité. Prenons alors trois points  $a, b, c$  sur  $\Gamma$  et il faut vérifier que les droites  $(a b * c)$  et  $(c a * b)$  sont parallèles. Prenons  $(a, b, c)$  pour repère de sorte qu'une équation de  $\Gamma$  est de la forme

$$A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta = 0.$$

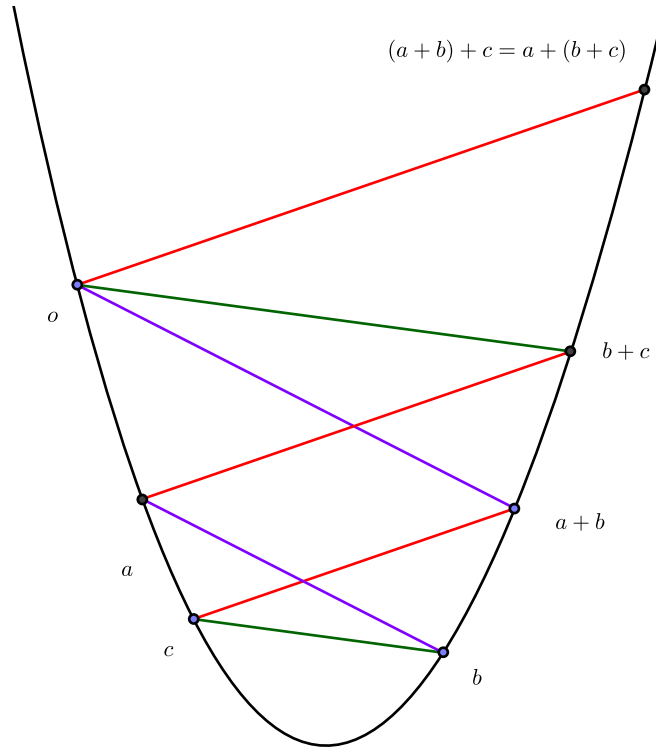


Figure 1.3

Loi de groupe sur une parabole

La droite  $(ab)$  est d'équation  $\gamma = 0$  et si on note  $(\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0)$  des coordonnées barycentriques de  $o$ , la droite  $(o a * b)$  est d'équation  $\gamma + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) = 0$  avec  $\lambda = \frac{\gamma_0}{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}$  ; autrement dit  $a * b$  a pour coordonnées barycentriques  $(\alpha_0 - \mu : \beta_0 + \mu : \gamma_0)$  pour  $\mu$  vérifiant l'équation

$$A(\beta_0 + \mu)\gamma_0 + B\gamma_0(\alpha_0 - \mu) + C(\alpha_0 - \mu)(\beta_0 + \mu) = 0.$$

On obtient alors  $\mu = \alpha_0 - \beta_0 + \frac{A-B}{C}\gamma_0$  et  $a * b$  de coordonnées barycentriques homogènes

$$(\gamma_0(B - A) + C\beta_0 : \gamma_0(A - B) + C\alpha_0 : c\gamma_0).$$

Symétriquement on obtient pour  $b * c$ ,

$$(A\alpha_0 : \alpha_0(C - B) + A\gamma_0 : \alpha_0(B - C) + A\beta_0).$$

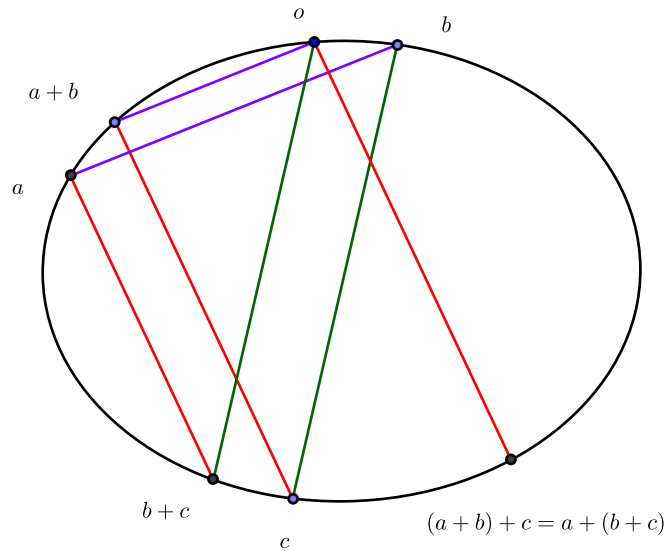


Figure 1.4  
*Loi de groupe sur une ellipse*

L'équation de la droite  $(a b * c)$  est alors donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & A\alpha_0 & x \\ 0 & \alpha_0(C - B) + A\gamma_0 & y \\ 0 & \alpha_0(B - C) + A\beta_0 & z \end{vmatrix} = 0$$

et celle de  $(c a * b)$  par

$$\begin{vmatrix} 0 & c\gamma_0(B - A) + C\beta_0 & x \\ 0 & \gamma_0(A - B) + C\alpha_0 & y \\ 1 & \gamma_0 & z \end{vmatrix} = 0.$$

D'après le corollaire I-3.1.3, il suffit alors de vérifier la nullité du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma_0(B - A) - C\alpha_0 & 1 \\ \alpha_0(C - B) - A\beta_0 & \gamma_0(B - A) + C\beta_0 & 1 \\ \alpha_0(C - B) + A\gamma_0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

lequel après un rapide calcul est égal à  $(A+C-B)(A\beta_0\gamma_0+B\gamma_0\alpha_0+C\alpha_0\beta_0)$  qui est bien nul puisque  $o$  appartient à  $\Gamma$ .  $\square$

Si  $\Gamma$  est une :

- hyperbole, alors pour  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  les directions asymptotiques et  $\omega$  le centre, la droite  $(\omega + \lambda \vec{v}) + t \vec{u}$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$  fixé et  $t \in \mathbb{K}$  variable, coupe  $\Gamma$  en un unique point ce qui donne une bijection entre  $\Gamma$  et  $\mathbb{K}^\times$ . Si on prend  $o$  le point associé à  $\lambda = 1 \in \mathbb{K}^\times$ , la loi de groupe sur  $\Gamma$  définie plus haut correspond à celle de  $(\mathbb{K}^\times, \times)$ .
- parabole avec  $\vec{u}$  la direction asymptotique double, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la droite  $(o + \lambda \vec{v}) + t \vec{u}$ , où  $\vec{v}$  est un vecteur quelconque non colinéaire à  $\vec{u}$ , coupe  $\Gamma$  en un unique point ce qui fournit une bijection entre  $\Gamma$  et  $\mathbb{K}$ ; la loi de groupe sur  $\Gamma$  correspond alors à  $(\mathbb{K}, +)$ .
- une ellipse alors pour tout vecteur  $\vec{u}$  la droite  $o + t \vec{u}$  coupe  $\Gamma$  en un unique point distinct de  $o$  ce qui fournit une bijection entre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  au sens de la définition III-1.1.1, et  $\Gamma$ . Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la loi de groupe sur  $\Gamma$  correspond via la bijection

$$\begin{cases} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & [-\pi, \pi] \\ x & \longmapsto & \arctan \frac{x}{2} \end{cases}$$

à l'application

$$(x, y) \mapsto \tan \frac{1}{2} \left( \arctan \frac{x}{2} + \arctan \frac{y}{2} \right).$$

## 2. Point de vue euclidien

### 2.1. comme lignes de niveau

Soit  $F$  un point du plan affine euclidien et  $\mathcal{D}$  une droite ne contenant pas  $F$ .

**2.1.1. Définition.** Pour tout réel  $e > 0$ , on considère la ligne de niveau

$$\mathcal{C}_{e,F,\mathcal{D}} = \{M : MF = ed(M, \mathcal{D})\}$$

où  $d(M, \mathcal{D})$  désigne la distance de  $M$  à  $\mathcal{D}$ , i.e. la longueur  $MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .

**2.1.2. Proposition.** Pour tout réel  $e > 0$ , et pour tout couple  $(F, \mathcal{D})$  formé d'un point  $F$  et d'une droite  $\mathcal{D}$  ne contenant pas  $F$ , l'ensemble  $\mathcal{C}_{e,F,\mathcal{D}}$  du plan affine est un conique au sens du §IV-1.1.

*Démonstration.* Considérons le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{j}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  et  $O$  appartient à la droite passant par  $F$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$ . Le point  $F$  est alors de coordonnées  $(x_F, 0)$  et une équation de

$\mathcal{D}$  est  $x = x_{\mathcal{D}}$ . L'égalité  $MF = eMH$  équivaut à  $MF^2 = e^2MH^2$  et s'écrit

$$(x - x_F)^2 + y^2 = e^2(x - x_{\mathcal{D}})^2,$$

qui est donc bien l'équation d'une conique au sens du §IV-1.1.  $\square$

**2.1.3. Définition.** Le point  $F$  s'appelle *un foyer* de la conique,  $\mathcal{D}$  *une directrice* et la droite  $(OF)$  orthogonale à  $\mathcal{D}$ , *son axe focal*. Le paramètre  $e$  est appelé *l'excentricité* de la conique.

*Remarque :* les directions asymptotiques sont d'après loc. cit. données par l'équation  $x^2 + y^2 = e^2x^2$ . Ainsi au sens de la définition IV-1.2.3, pour  
 -  $e = 1$  l'axe focal est une direction double et correspond donc à une parabole ; en prenant pour  $O$  le milieu de  $F$  et de son projeté orthogonal  $D$  sur  $\mathcal{D}$ , l'équation s'écrit

$$y^2 = 2px$$

où  $p = FD$  s'appelle *le paramètre* de la parabole. L'unique point sur l'axe focal s'appelle *le sommet* de la parabole.

-  $0 < e < 1$ , il n'y a pas de directions asymptotiques et ces cas correspondent donc à des ellipses ; en prenant pour  $O$  le barycentre de  $(F, 1)$  et  $(D, -e^2)$  de sorte que  $x_F = e^2x_{\mathcal{D}}$ , l'équation s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où  $a = FD \frac{e}{e^2 - 1}$  et  $-a$  sont les abscisses des points de la conique sur l'axe focal et  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ . Le foyer a alors pour abscisse  $c = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$  et la directrice a pour équation  $x = \frac{a^2}{c}$ .

*Remarque :* habituellement on paramètre l'ellipse par *son angle excentrique*  $\theta$  que l'on retrouve comme sur la figure IV-2.1 via *son grand cercle* d'équation  $x^2 + y^2 = a^2 : \theta \mapsto (a\cos\theta, b\sin\theta)$ .

-  $e > 1$ , on a deux directions asymptotiques distinctes  $y = \pm\sqrt{e^2 - 1}x$  et on est donc en présence d'hyperboles ; en prenant encore  $O$  le barycentre de  $(F, 1)$  et  $(D, -e^2)$  l'équation s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec  $a = FD \frac{e}{1 - e^2}$ ,  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ . Le foyer a pour abscisse  $c = ae = \sqrt{a^2 + b^2}$  et la directrice  $\mathcal{D}$  a pour équation  $x = \frac{a^2}{c}$ .

*Remarque :* la paramétrisation usuelle d'une telle hyperbole est donnée par les fonctions trigonométriques hyperboliques :  $t \in \mathbb{R} \mapsto (a\cosh t, b\sinh t)$ .



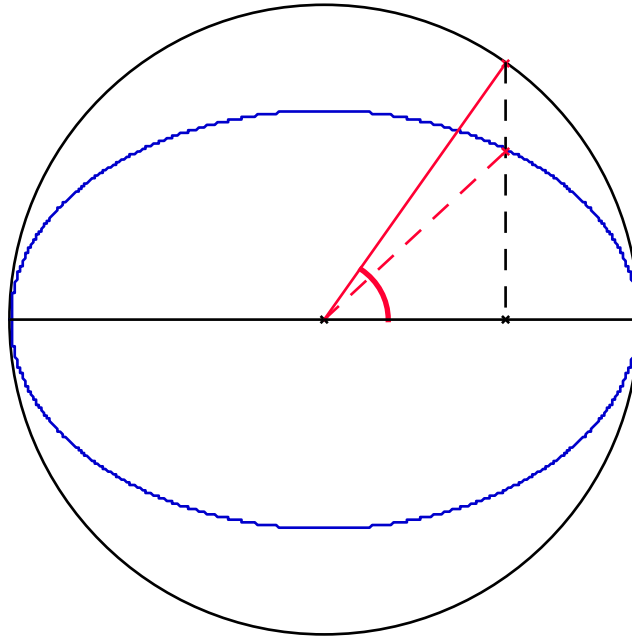


Figure 2.1

*Angle excentrique dans une ellipse*

*Remarque :* avec les notations précédentes,  $O$  est le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole ; pour celles-ci, par symétrie, on en déduit un second couple foyer/directrice, symétrique du premier par rapport au point  $O$ .

**2.1.4. Définition.** Pour une ellipse ou une hyperbole la distance  $2a$  entre les deux points de l'axe focal s'appelle *la longueur du grand axe*. La distance de  $F$  à la directrice  $\mathcal{D}$  multiplié par l'excentricité s'appelle *le paramètre* de l'ellipse ou de l'hyperbole.

**2.1.5. Proposition.** *Toute conique non dégénérée du plan affine euclidien est soit un cercle soit de la forme  $\mathcal{C}_{e,F,\mathcal{D}}$ .*

*Démonstration.* Partons donc d'une équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Un point  $\Omega$  de coordonnées  $(x_0, y_0)$  est centre de symétrie si et seulement si l'équation de la conique dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  ne comporte pas de termes du premier degré soit

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0 \end{cases}$$

Si  $a = b = 0$  et  $d \neq 0$  alors on retrouve l'équation d'une parabole de la forme  $\mathcal{C}_{1,F,\mathcal{D}}$  écrite sous la forme  $Y^2 = 2pX$  avec  $Y = y + e/c$ ,  $X = x - \frac{cf + e^2}{2dc}$  et  $p = -2d/c$ . Le cas  $b = c = 0$  et  $e \neq 0$  donne de même une parabole de la forme  $\mathcal{C}_{1,F,\mathcal{D}}$ . Si  $a = b = d = 0$  (ou  $b = c = e = 0$ ) alors la conique est une droite double. Dans les autres cas le système précédent est celui de deux droites du plan; trois cas sont alors possibles :

–  $b^2 \neq ac$ , les droites sont sécantes et la conique admet un unique centre de symétrie. Dans le repère  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$  avec

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + X \cos\theta - Y \sin\theta \\ y = y_0 + X \sin\theta + Y \cos\theta \end{cases}$$

avec  $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$  et  $\vec{OM} = X \vec{u} + Y \vec{v}$ . On choisit alors  $\theta$  tel que le coefficient de  $XY$  s'annule soit

$$2(c - a)\cos\theta\sin\theta + 2b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (c - a)\sin 2\theta + 2b\cos\theta$$

ce qui détermine  $2\theta$  modulo  $\pi$  et donc  $\theta$  modulo  $\pi/2$  sauf dans le cas  $a = c, b = 0$  où l'on retrouve l'équation d'un cercle. L'équation dans ce repère s'écrit alors  $AX^2 + CY^2 + F = 0$ ; pour  $F = 0$  on retrouve une conique soit vide soit dégénérée et sinon, selon le signe de  $AC$ , une ellipse ou une hyperbole de la forme  $\mathcal{C}_{e,F,\mathcal{D}}$ .

– ces deux droites sont parallèles confondues; par hypothèse on a  $a \neq 0$  et l'équation de la conique s'écrit

$$a\left(x + \frac{b}{a}y + \frac{d}{a}\right)^2 = \frac{d^2 - af}{a^2}$$

ce qui donne deux droites parallèles.

– ces droites sont parallèles et distinctes, la conique n'admet pas de centre de symétrie; comme  $ac \neq 0$ , en divisant l'équation par  $c$ , on se ramène à une équation de la forme  $(y + bx)^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ , par isométrie on la met sous la forme  $(y')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$  puis par changement d'origine  $Y^2 = 2pX$  et on retrouve une parabole sous la forme  $\mathcal{C}_{1,F,\mathcal{D}}$ .  $\square$

L'existence de deux couples foyer/directrice pour les coniques à centre permet d'en obtenir une autre caractérisation dite bifocale.

**2.1.6. Proposition.** Soient  $F, F'$  deux points distincts du plan.

- Pour tout réel  $a > \frac{FF'}{2}$ , l'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant  $MF + MF' = 2a$  est l'ellipse de foyers  $F$  et  $F'$  et de longueur du grand axe  $2a$ .
- Pour tout réel positif  $a < \frac{FF'}{2}$ , l'ensemble des points du plan vérifiant  $|MF - MF'| = 2a$  est l'hyperbole de foyers  $F$  et  $F'$  et de longueur du grand axe  $2a$ .

*Démonstration.* 1) L'ellipse est entièrement contenu dans la bande délimitée par ses deux directrices. Pour un point  $M$  on note  $H$  et  $H'$  ses projetés orthogonaux sur les directrices  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ . On a alors  $MF + MF' = e(MH + MH') = eHH' = 2a$  et donc l'ellipse est contenu dans la ligne de niveau  $MF + MF' = 2a$ . Réciproquement si  $MF + MF' = 2a$  alors

$$(MF - MF')(MF + MF') = MF^2 - (MF')^2 = (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2 = -4cx$$

et donc  $MF - MF' = -2ex$  et donc  $MF = a - ex$  soit  $MF^2 = (x-c)^2 + y^2 = (a - ex)^2$  soit  $x^2(1 - e^2) + y^2 = b^2$  puisque  $ec = a$  et  $a^2 - b^2 = c^2$  ce qui en divisant par  $b^2$  donne l'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

2) L'hyperbole se compose de deux branches extérieures à la bande verticale délimitée par ses deux directrices. Il en résulte que pour tout point  $M$  de l'hyperbole on a  $|MF - MF'| = e|MH - MH'| = 2q$ . L'une des branches est donc incluse dans l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $MF' - MF = 2a$  et l'autre dans celui des  $M$  tels que  $MF - MF' = 2a$ . Un calcul identique à celui de l'ellipse permet de vérifier l'inclusion réciproque.  $\square$

D'après §IV-1.5, dans le cas où la conique est une :

- parabole les points extérieurs, i.e. ceux par lesquels on peut mener deux tangentes, vérifient  $MF > MH$ , ou encore  $F(M) > 0$  où  $F$  est une équation de la parabole dont la partie homogène de degré 2 prend des valeurs strictement positives.
- ellipse (resp. hyperbole), ses points extérieurs (resp. intérieurs) correspondent à la composante connexe délimitée par la conique et ne contenant pas le centre.

*Remarque :* de la définition monofocale des coniques, on en déduit qu'une similitude  $f$  transforme :

- la parabole de directrice  $\mathcal{D}$ , de foyer  $F$  et de paramètre  $p$  en la parabole de directrice  $f(\mathcal{D})$ , de foyer  $f(F)$  et de paramètre  $\rho p$  où  $\rho$  est le rapport de similitude de  $f$ .
- l'ellipse (resp. l'hyperbole) de foyers  $F, F'$ , de directrices associées  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ , d'excentricité  $e$  et de paramètre  $p$  en l'ellipse (resp. l'hyperbole) de foyers  $f(F), f(F')$  associés aux directrices  $f(\mathcal{D}), f(\mathcal{D}')$ , d'excentricité  $e$  et de paramètre  $\rho p$  où  $\rho$  est le rapport de similitude de  $f$ .

*Remarque :* en ce qui concerne les similitudes envoyant une conique sur une autre, on renvoie le lecteur aux exercices ??, ?? et ??.

## 2.2. Propriétés angulaires

**2.2.1. Proposition.** Soit  $\mathcal{C}$  une conique propre de foyer  $F$  et de directrice  $\mathcal{D}$ . Soient  $M, N \in \mathcal{C}$  et  $P = (MN) \cap \mathcal{D}$ , alors  $(PF)$  est la bissectrice des droites  $(FM)$  et  $(FN)$ .

*Démonstration.* Avec les notations de la figure IV-2.2, on applique la loi des sinus dans les triangles  $FMP$  et  $FNP$  de sorte que

$$\frac{\sin \alpha}{PM} = \frac{\sin \widehat{FPM}}{FM}, \quad \frac{\sin(\pi - \alpha')}{PN} = \frac{\sin \widehat{FPM}}{FN}$$

avec d'après le théorème de Thalès,  $\frac{PM}{PN} = \frac{HM}{H'N} = \frac{FM}{FN}$  et donc  $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha')$  soit  $\alpha = \alpha'$ .  $\square$

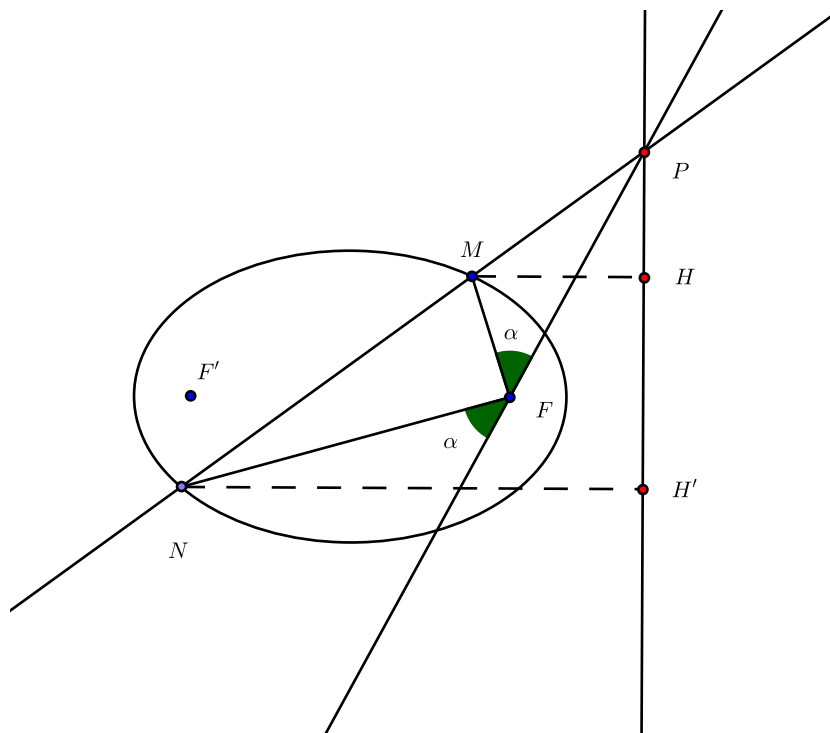


Figure 2.2

Corde d'une conique à foyer

*Remarque* : on peut ainsi construire la directrice connaissant le foyer et 3 points.

*Remarque* : en passant à la limite quand  $N$  tend vers  $M$ , on en déduit le corollaire suivant.

**2.2.2. Corollaire.** *Étant donnée une conique propre  $C$  qui n'est pas un cercle,  $F$  un foyer et  $D$  la directrice correspondante, si  $M \in C$  et  $P$  est le point d'intersection de la perpendiculaire à  $(MF)$  en  $F$  à  $D$ , alors  $PM$  est tangente à  $C$  en  $M$ .*

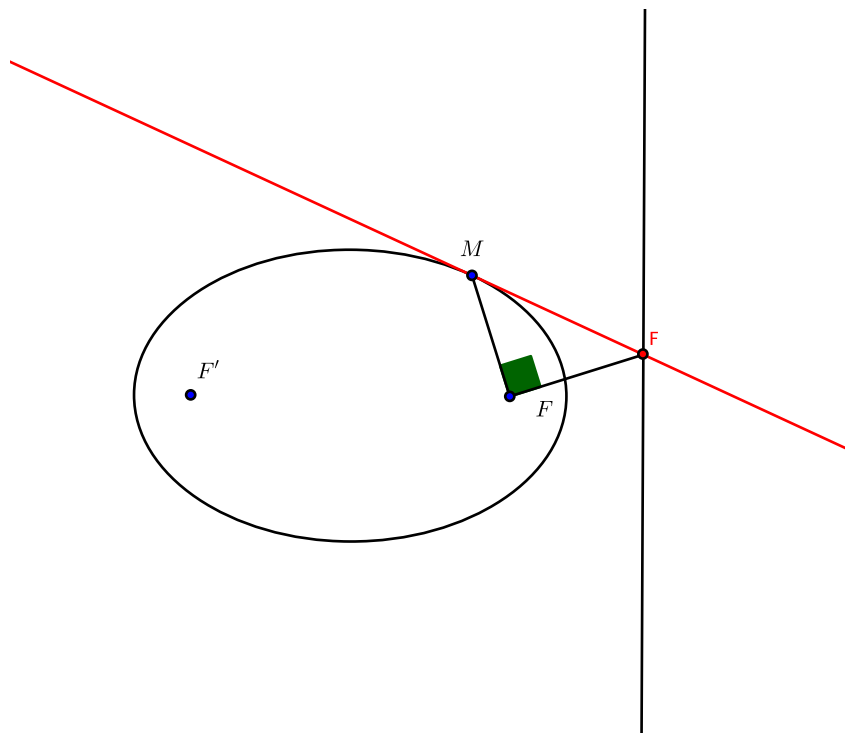


Figure 2.3

*Tangente d'une conique à foyer*

*Remarque* : on peut ainsi tracer des tangentes connaissant le foyer et la directrice.

**2.2.3. Corollaire.** *Soit  $\mathcal{P}$  une parabole et  $M \in \mathcal{P}$  de projection orthogonale  $H$  sur la directrice  $\mathcal{D}$ . La médiatrice de  $[FH]$  est alors tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{P}$*

en  $M$  et si  $M$  n'est pas le sommet de  $\mathcal{P}$  alors  $\mathcal{T}$  est la bissectrice intérieure en  $M$  du triangle  $MFH$ .

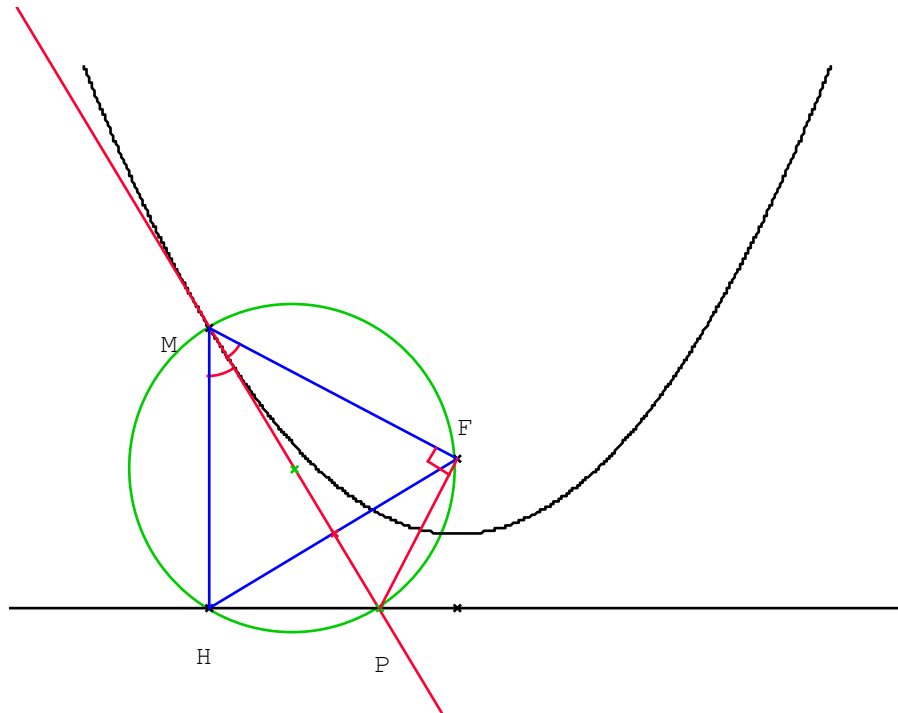


Figure 2.4

Propriété angulaire de la parabole

*Démonstration.* D'après le corollaire précédent, les points  $M, F, P, H$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[MP]$ . Par ailleurs comme  $MF = MH$ , la médiatrice de  $[FH]$  passe par  $M$  et par le centre de  $\mathcal{C}$ , c'est donc la droite  $(MP)$  qui est aussi la bissectrice en  $M$  du triangle  $MFH$ .  $\square$

**Application importante :** une autre formulation du corollaire précédent est que pour un rayon lumineux venant des  $y$  grand suivant une direction parallèle à l'axe d'un parabole  $\mathcal{P}$ , il sera réfléchi vers son foyer  $F$ . C'est suivant ce résultat que les antennes sont paraboliques ou encore que les fours solaires ont une forme de parabololoïde.

**2.2.4. Corollaire.** Les projetés orthogonaux du foyer  $F$  sur les tangentes à  $\mathcal{P}$  décrivent la tangente à  $\mathcal{P}$  en son sommet.

*Démonstration.* D'après le corollaire précédent, les symétriques orthogonaux de  $F$  par rapport aux tangentes à  $\mathcal{P}$  décrivent la directrice  $\mathcal{D}$ . Le résultat découle alors du fait que la tangente à  $\mathcal{P}$  en son sommet  $S$  s'obtient comme l'image de la directrice par l'homothétie de centre  $F$  et de rapport  $1/2$ .  $\square$

**2.2.5. Corollaire.** Soit  $\mathcal{T}$  un triangle dont les côtés sont tangents à la parabole  $\mathcal{P}$ . Le foyer  $F$  de  $\mathcal{P}$  appartient alors au cercle circonscrit à  $\mathcal{T}$ .

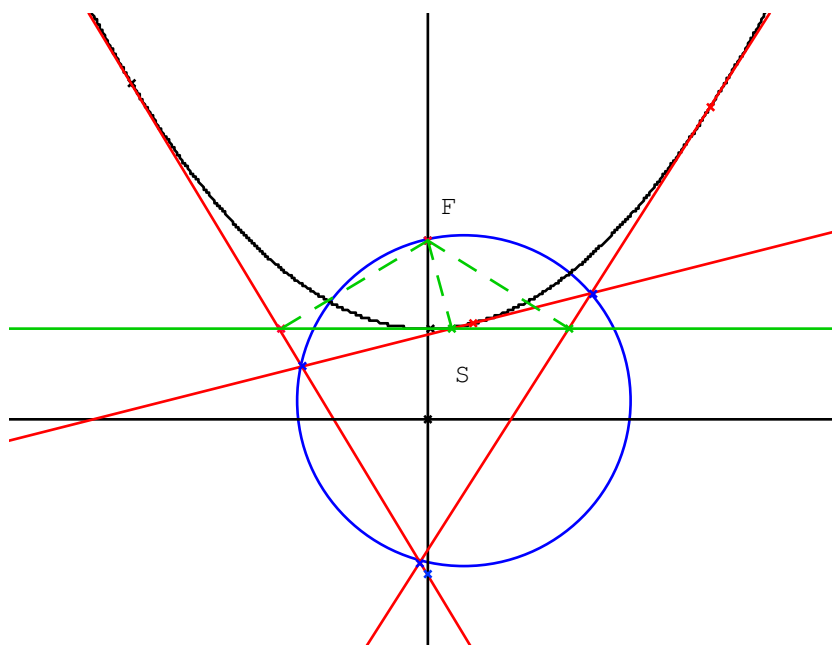


Figure 2.5

*Théorème de Simson dans une parabole*

*Démonstration.* D'après le corollaire précédent, les projetés orthogonaux de  $F$  sur les côtés de  $\mathcal{T}$  sont alignés sur la tangente à  $\mathcal{P}$  en son sommet ; le résultat découle alors du théorème de Simson.  $\square$

**2.2.6. Proposition.** Soit  $C$  une conique propre à centre de foyers  $F$  et  $F'$ . La tangente à  $C$  en  $M$  est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle en  $M$  de triangle  $MFF'$  si  $C$  est une hyperbole (resp. une ellipse).

*Démonstration.* Dans le cas d'une ellipse avec les notations de la figure IV-2.6 :  $\frac{MH}{MP} = \frac{MH'}{MP'}$  et comme  $\frac{MH}{MF} = \frac{MH'}{MF'}$ , on obtient  $\cos \alpha =$

$$\frac{MF}{MP} = \frac{MF'}{MP'} = \cos\alpha'.$$

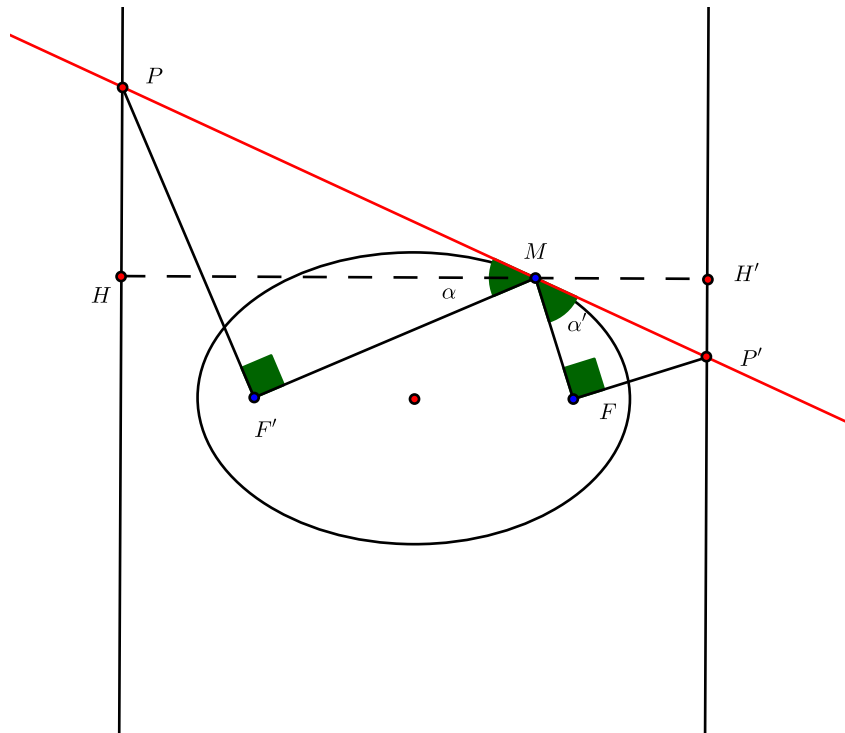


Figure 2.6

Tangente d'une conique à foyer

□

*Remarque :* dans un métro de forme elliptique deux personnes placés aux foyers  $F$  et  $F'$  peuvent converser sans forcer la voie puisque les ondes sonores issues de  $F$  seront toutes réfléchies vers  $F'$ .

**2.2.7. Corollaire.** Soient  $A, B$  deux points d'une ellipse  $\mathcal{E}$  ; si la fonction  $f(M) = MA + MB$  sur  $M \in \mathcal{E}$ , a un maximum local en  $C \in \mathcal{E}$  alors  $(CB)$  est l'image de  $(CA)$  par rapport à la réflexion selon la normale à  $\mathcal{E}$  passant par  $C$ .

*Démonstration.* Considérons la ligne de niveau  $\mathcal{E}' = \{M : MA + MB = CA + CB\}$  dans le plan ; c'est une ellipse qui par maximalité de  $f$  en  $C$  pour les points de  $\mathcal{E}$ , sera tangente à  $\mathcal{E}$  en  $C$ . Ainsi la normale à  $\mathcal{E}$  en  $C$  est aussi la normale à  $\mathcal{E}'$  en  $C$  et le résultat découle de la proposition précédente. □



**2.2.8. Définition.** Le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$  est appelé *le cercle principal* de  $\mathcal{E}$ .

**2.2.9. Lemme.** *L'ellipse  $\mathcal{E}$  est l'image de son cercle principal par l'application affine qui laisse l'axe focal  $(FF')$  stable et qui sur son orthogonal est une homothétie de rapport  $b/a$ .*

*Démonstration.* Il suffit par exemple de considérer une équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  de  $\mathcal{E}$ . □

*Application : construction point par point par la méthode de la bande de papier.* Soit une bande de papier sur laquelle on marque trois points  $P, M, Q$  tels que  $PQ = a+b$ ,  $PM = a$  et  $MQ = b$ . On déplace cette bande de papier de sorte que  $P$  (resp.  $Q$ ) reste toujours sur l'axe  $(Oy)$  (resp.  $(Ox)$ ) ; le point  $M$  décrit alors l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le repère orthonormé défini par ces axes.

En effet complétons comme sur la figure IV-2.7 la configuration par  $N$  tel que  $OPMN$  soit un parallélogramme et notons  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe  $(Ox)$ . D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{\overline{HM}}{\overline{HN}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{NO}} = -\frac{b}{a},$$

de sorte que, le point  $N$  décrivant le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ , le point  $M$  appartient à l'image de ce dernier par l'affinité du lemme précédent et décrit donc l'ellipse mentionnée.

*Remarque :* certaines propriétés affines peuvent ainsi se déduire de leur version sur le cercle principal. Par exemple, pour deux tangentes  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  en respectivement  $M, M' \in \mathcal{E}$  et s'intersectant en  $Q$ , la médiane en  $Q$  du triangle  $MM'Q$  est la droite  $(OQ)$  : c'est évident pour le cercle et la propriété étant affine elle est conservée par l'affinité du lemme précédent.

Au sens de la définition II-2.3.13, la directrice  $\mathcal{D}$  d'une ellipse ou d'une parabole, est la polaire du foyer  $F$  par rapport au cercle principal. En effet si  $H$  désigne le projeté orthogonal de  $F$  sur  $\mathcal{D}$  on a  $\overline{OF} \cdot \overline{OH} = c \cdot \frac{a^2}{c} = a^2$  et le résultat découle du fait que  $\mathcal{D}$  est orthogonale à  $(OF)$ . La polarité associée à une conique est défini en IV-3.5.1 : dans le cas d'une ellipse (resp. d'une hyperbole) d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (resp.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ) sa définition est la suivante.

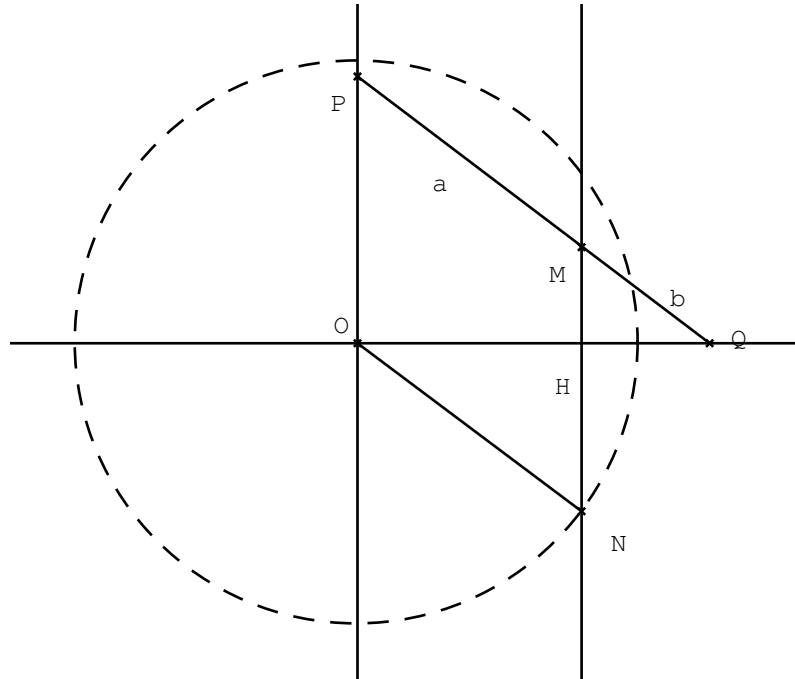


Figure 2.7

Construction point par point de l'ellipse par la méthode de la bande de papier

**2.2.10. Définition.** Deux point  $M = (\alpha, \beta)$  et  $M' = (\alpha', \beta')$  distincts de  $O$  sont dits *conjugués* par rapport à une ellipse  $\mathcal{E}$  (resp. une hyperbole  $\mathcal{H}$ ) d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (resp.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ) si et seulement si

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} = 1 \quad \text{resp.} \quad \frac{\alpha\alpha'}{a^2} - \frac{\beta\beta'}{b^2} = 1.$$

L'ensemble  $\mathcal{P}_M$  des conjugués d'un point  $M$  s'appelle *la polaire* de  $M$ .

*Remarque :* en termes intrinsèques, l'ellipse/hyperbole correspond à l'ensemble des zéros d'une forme quadratique non dégénérée de partie polaire  $\varphi$ ; deux points  $M$  et  $M'$  sont alors conjugués si et seulement si  $\varphi(M, M') = 0$ .

**2.2.11. Lemme.** Pour  $M$  un point du plan distinct du centre  $O$  de  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ), sa polaire  $\mathcal{P}_M$  est une droite ne contenant pas  $O$ . On a par ailleurs les propriétés suivantes :

- (i) si  $M \in \mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) alors  $\mathcal{P}_M$  est la tangente à  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) en  $M$  ;
- (ii) trois points alignés ont leurs polaires concourantes ;
- (iii) toute droite ne passant pas par  $O$  est la polaire d'un point  $M$  appelé son pôle ;
- (iv) pour  $\mathcal{D}$  une droite ne passant pas par  $O$  et  $M \in \mathcal{D}$  ; la polaire de  $M$  contient le pôle de  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* On traite le cas d'une ellipse, celui de l'hyperbole étant strictement similaire.

(i-ii) Par définition la polaire de  $M = (\alpha, \beta)$  est l'ensemble des points du plan de coordonnées  $(x, y)$  tels que

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1$$

ce qui est bien l'équation d'une droite et même celle de la tangente à  $\mathcal{E}$  en  $M$  dans le cas où  $M \in \mathcal{E}$ .

(iii) Les points de coordonnées  $(\alpha_i, \beta_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$  sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui est équivalent à l'annulation de  $\begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{a^2} & \frac{\alpha_2}{a^2} & \frac{\alpha_3}{a^2} \\ \frac{\beta_1}{b^2} & \frac{\beta_2}{b^2} & \frac{\beta_3}{b^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$  et donc, d'après

le point précédent, à la concourance des polaires associées.

(iv) Toute droite ne passant pas par  $O$  a une équation de la forme  $ux + vy - 1 = 0$  et est la polaire du point de coordonnées  $(a^2u, b^2v)$ .

(v) Soit  $ux + vy - 1 = 0$  l'équation d'une droite ne passant pas par  $O$  et soit  $(\alpha, \beta)$  tel que  $u\alpha + v\beta = 1$ . Le pôle de cette droite est d'après le point précédent de coordonnées  $(a^2u, b^2v)$  et la polaire du point la droite d'équation  $\frac{\alpha}{a^2}x + \frac{\beta}{b^2}y = 1$  et on vérifie bien que  $\frac{\alpha}{a^2}a^2u + \frac{\beta}{b^2}b^2v - 1 = 0$  d'où le résultat.  $\square$

**2.2.12. Corollaire.** La polaire de  $F$  est la directrice  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}'$  une droite passant par  $F$  et recoupant l'ellipse en deux points  $M, N$ , d'après ce qui précède l'intersection des tangentes en  $M$  et  $N$  appartient à la directrice et est égale à  $(MN)^\perp$ . Autrement dit toute droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $F$  est telle que  $(\mathcal{D}')^\perp$  appartient à la directrice, d'où le résultat.  $\square$

**2.2.13. Définition.** Pour une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $F$ , la droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $F$  et par le pôle de  $\mathcal{D}$  s'appelle la conjuguée de  $\mathcal{D}$ .

*Remarque :* d'après le corollaire IV-2.2.2, l'angle orienté entre une droite passant par  $F$  et sa conjuguée est égal à  $\pi/2$ .

**2.2.14. Corollaire.** Soit  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) une ellipse (resp. une hyperbole) de foyers  $F, F'$ , de centre  $O$  et de grand axe  $2a$ . L'ensemble des projetés orthogonaux de  $F$  sur les tangentes de  $\mathcal{E}$  (resp. de  $\mathcal{H}$  et ses asymptotes) est son cercle principal.

*Démonstration.* D'après IV-2.2.6, les droites  $(MF)$  et  $(MF')$  sont images l'une de l'autre par la réflexion par rapport à la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{E}$  en  $M$ . Dans le cas de l'ellipse l'image  $G$  de  $F$  par la réflexion par rapport à  $\mathcal{T}$  est alors telle que  $F', M, G$  sont alignés dans cet ordre de sorte que  $G$  décrit le cercle de centre  $F'$  et de rayon  $MF + MF' = 2a$ . Ainsi les projetés orthogonaux de  $F$  sur les tangentes décrivent l'image de ce cercle par l'homothétie de centre  $F$  et de rapport  $1/2$ , soit le cercle principal.

Dans le cas d'une hyperbole  $M, G, F'$  sont alignés dans cet ordre et on conclut comme précédemment en utilisant que  $|MF - MF'| = 2a$ .  $\square$

*Remarque :* si on considère les symétriques de  $F$  par rapport aux tangentes d'une ellipse (resp. une hyperbole), ils appartiennent au cercle de centre  $F'$  et de rayon  $2a$  qu'on appelle le cercle directeur de centre  $F'$ .

**2.2.15. Proposition.** Si  $C$  est une ellipse de foyers  $F, F'$  ; pour un point  $M$  extérieur à  $C$  soient  $T, T' \in C$  les points de contact des deux tangentes à  $C$  passant par  $M$  alors  $(\widehat{FT}, \widehat{FM}) = (\widehat{FM}, \widehat{FT'}) \pmod{2\pi}$ .

*Démonstration.* On utilise les notations de la figure IV-2.8 où  $P$  est l'intersection de  $(TT')$  avec la directrice et  $N$  est le point de l'ellipse dont la tangente passe par  $P$ . D'après IV-2.2.1,  $(FP)$  est la bissectrice extérieure en  $M$  du triangle  $MTT'$  et d'après IV-2.2.2, le triangle  $FPN$  est rectangle en  $F$ . Comme la polaire de  $M$  est la droite  $(TT')$  qui passe par  $P$ , ainsi que la polaire de  $N$  et celle de  $F$  qui sont respectivement  $(NP)$  et la directrice, on en déduit que  $F, M, N$  sont alignés et donc que  $(FM)$  est la bissectrice intérieure en  $F$  de  $FTT'$ , d'où le résultat.  $\square$

**2.2.16. Théorème. (Le second petit théorème de Poncelet)**

Soit  $\mathcal{E}$  une ellipse (ou une hyperbole) de foyers  $F_1$  et  $F_2$ . Par  $P$  un point extérieur à  $\mathcal{E}$ , on mène deux tangentes à  $\mathcal{E}$  la coupant en  $M_1$  et  $M_2$ . Alors les angles  $\widehat{M_1PM_2}$  et  $\widehat{F_1PF_2}$  ont les mêmes bissectrices.

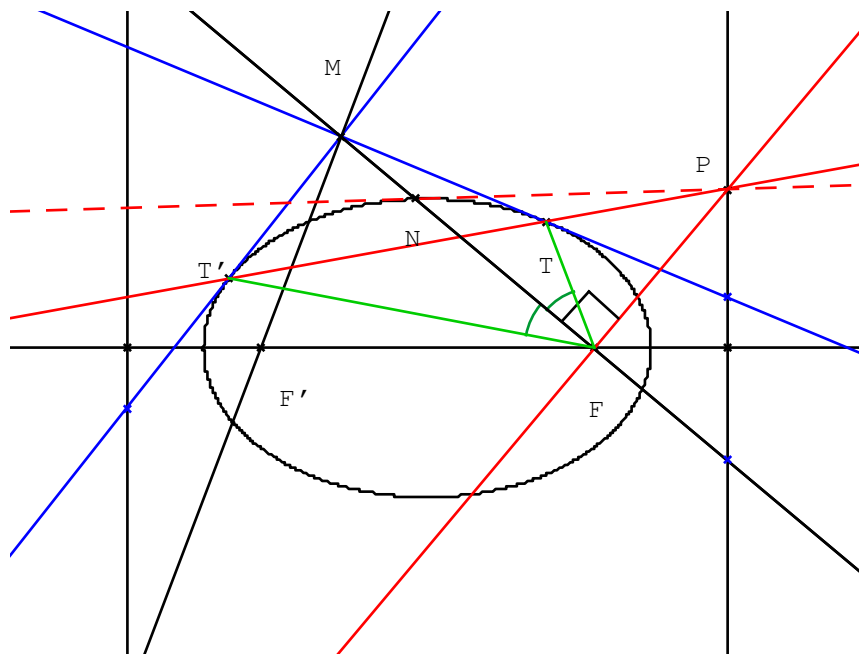


Figure 2.8

Angles partagés par une sécante

*Démonstration.* Traitons le cas d'une ellipse comme sur la figure IV-2.9; on note  $F'_1$  (resp.  $F'_2$ ) l'image de  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) par la réflexion d'axe  $(PM_1)$  (resp.  $(PM_2)$ ). Comme  $(PM_1)$  est une bissectrice de  $\widehat{F_1M_1F_2}$  on en déduit que les points  $F'_1, M_1, F_2$  sont colinéaires avec  $F'_1F_2 = M_1F_1 + M_1F_2$  qui est la longueur du grand axe de  $\mathcal{E}$ . De même  $F_1, M_2, F'_2$  sont alignés avec  $F_1F'_2 = F'_1F_2$  et les triangles  $F'_1PF_2$  et  $F_1PF'_2$  ont les côtés de même longueur et sont donc semblables et donc en particulier  $\widehat{F'_1PF_2} = \widehat{F_1PF'_2}$  soit

$$\widehat{F'_1PF_1} = \widehat{F'_1PF_2} - \widehat{F_1PF_2} = \widehat{F_2PF_1} - \widehat{F_1PF_2} = \widehat{F_2PF_2}$$

d'où le résultat.  $\square$

### 2.3. Ellipses inscrites dans un triangle

Soit  $\Gamma$  une ellipse tangente aux côtés d'un triangle  $ABC$ , cas limite du théorème de Carnot cf. IV-1.6.1; l'équation de  $\Gamma$  dans le repère barycentrique de  $\Gamma$  étant de la forme

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\beta\gamma + 2e\gamma\alpha + 2f\alpha\beta = 0$$

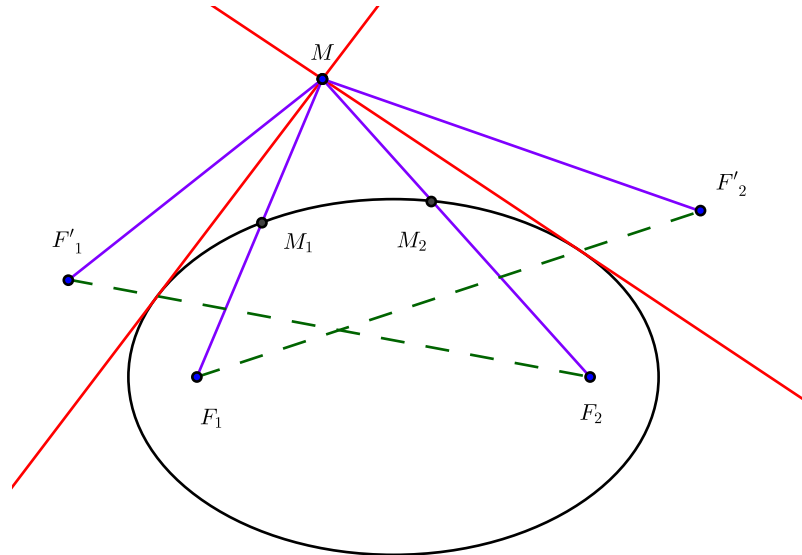


Figure 2.9  
*Le second petit théorème de Poncelet*

les équations

$$a\alpha^2 + 2f\alpha\beta + b\beta^2 = 0, \quad b\beta^2 + 2d\beta\gamma + c\gamma^2 = 0, \quad c\gamma^2 + 2e\gamma\alpha + a\alpha^2 = 0$$

ont des racines doubles d'où

$$f^2 = ab, \quad d^2 = bc, \quad e^2 = ca.$$

Ainsi  $a, b, c$  sont de même signes et non nuls, quitte à multiplier l'équation de  $\Gamma$  par  $-1$ , on les suppose tous positifs et on pose

$$f = \epsilon_3\sqrt{ab}, \quad d = \epsilon_1\sqrt{bc}, \quad e = \epsilon_2\sqrt{ca}, \quad \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{1, -1\}.$$

L'équation de  $\Gamma$  s'écrit alors

$$(\sqrt{a}\alpha + \epsilon_3\sqrt{b}\beta + \epsilon_2\sqrt{c}\gamma)^2 + 2\sqrt{bc}(\epsilon_1 - \epsilon_2\epsilon_3)\beta\gamma = 0$$

de sorte que  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -1$  sinon  $\Gamma$  serait décomposée. Notons que pour  $\epsilon_3 = -1$ , la racine double  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = -\frac{f}{a} = -\epsilon_3\sqrt{\frac{b}{a}}$  associé au point de contact de  $\Gamma$  sur  $(AB)$  appartient au segment  $[AB]$  et est à l'extérieur de celui-ci si  $\epsilon_3 = 1$ .

Ainsi la conique est inscrite dans le triangle si et seulement si  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$ , les cas où un seul des  $\epsilon_i$  étant négatifs correspondant à des coniques

exinscrites.

**2.3.1. Proposition.** *On note  $A', B', C'$  les points de contact d'une conique inscrite dans  $ABC$ . Les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  concourent au point  $\Omega$  de coordonnées barycentriques  $\left(\frac{\epsilon_1}{\sqrt{a}}, \frac{\epsilon_2}{\sqrt{b}}, \frac{\epsilon_3}{\sqrt{c}}\right)$ .*

*Démonstration.* Les coordonnées barycentriques de  $A', B'$  et  $C'$  sont respectivement

$$(0, -\epsilon_1\sqrt{c}, \sqrt{b}), \quad (\sqrt{c}, 0, -\epsilon_2\sqrt{a}), \quad (-\epsilon_3\sqrt{b}, \sqrt{a}, 0)$$

de sorte que

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{\sqrt{b}}{\epsilon_1\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\epsilon_2\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\epsilon_3\sqrt{b}} = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -1$$

et les droites sont concourantes d'après le théorème de Ceva.  $\square$

*Remarque :* le point  $\Omega$  de la proposition précédente est l'analogie du point de Gergonne du cercle inscrit.

*Remarque :* pour déterminer la nature de  $\Gamma$ , on regarde les directions asymptotiques données par  $F(-v-w, v, w) = 0$  :

$$(a+b-2\epsilon_3\sqrt{ab})v^2 + 2(\epsilon_1\sqrt{bc} - \epsilon_2\sqrt{ca} + a)vw + (a+c-2\epsilon_2\sqrt{ca})v^2 = 0$$

de discriminant réduit  $\Delta' = 4\sqrt{abc}(\epsilon_1\sqrt{a} + \epsilon_2\sqrt{b} + \epsilon_3\sqrt{c})$  de sorte que pour  $\epsilon_1\sqrt{a} + \epsilon_2\sqrt{b} + \epsilon_3\sqrt{c} > 0$  (resp.  $= 0$ ),  $\Gamma$  est une hyperbole, (resp. une parabole) et une ellipse dans le cas strictement négatif.

**2.3.2. Proposition.** *Dans le cas où  $\Gamma$  n'est pas une parabole, i.e.  $\epsilon_1\sqrt{a} + \epsilon_2\sqrt{b} + \epsilon_3\sqrt{c} \neq 0$ , le centre de  $\Gamma$  est  $O$  de coordonnées barycentriques  $(\epsilon_2\sqrt{b} + \epsilon_3\sqrt{c}, \epsilon_1\sqrt{a} + \epsilon_3\sqrt{c}, \epsilon_1\sqrt{a} + \epsilon_2\sqrt{b})$ .*

*Démonstration.* La matrice de  $F$  étant

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & \epsilon_3\sqrt{ab} & \epsilon_2\sqrt{ca} \\ \epsilon_3\sqrt{ab} & b & \epsilon_1\sqrt{bc} \\ \epsilon_2\sqrt{ca} & \epsilon_1\sqrt{bc} & c \end{pmatrix}$$

de déterminant  $(2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 - 2)abc = -4abc \neq 0$ . On calcule

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_3\sqrt{c} & \epsilon_2\sqrt{b} \\ \epsilon_3\sqrt{c} & 0 & \epsilon_1\sqrt{a} \\ \epsilon_2\sqrt{b} & \epsilon_1\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que d'après §IV-1.1, le centre  $O$  a pour coordonnées barycentriques  $(\epsilon_2\sqrt{b} + \epsilon_3\sqrt{c}, \epsilon_1\sqrt{a} + \epsilon_3\sqrt{c}, \epsilon_1\sqrt{a} + \epsilon_2\sqrt{b})$ .  $\square$

**2.3.3. Définition.** Dans le cas  $a = b = c$ , les points  $O$  et  $\Omega$  coïncident avec le centre gravité  $G$  du triangle; les points de contact  $A', B', C'$  sont alors les milieux des côtés de  $ABC$ . Cette ellipse s'appelle *l'ellipse de Steiner*.

*Remarque :* on peut montrer l'existence de l'ellipse de Steiner directement en partant du cercle inscrit du triangle équilatéral et en appliquant à la figure une homographie qui envoie le triangle équilatéral sur le triangle  $ABC$  de départ.

*Remarque :* le point de Gergonne  $\Omega$  de coordonnées barycentriques

$$\left( \frac{\epsilon_1}{\sqrt{a}}, \frac{\epsilon_2}{\sqrt{b}}, \frac{\epsilon_3}{\sqrt{c}} \right)$$

définit complètement la conique  $\Gamma$ .

*Remarque :* une ellipse de Steiner possède au plus un triangle associé contenu dans un cercle donné.

**2.3.4. Théorème. (de Marden)**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré 3; les racines de  $P'$  sont les foyers de l'ellipse de Steiner du triangle formé par les racines de  $P$ .

*Démonstration.* Notons que pour  $Q(z) = P(z - z_0)$  on a  $Q'(z) = P'(z - z_0)$  de sorte que l'on peut placer l'origine en n'importe quel point. De même pour  $Q(z) = P(re^{i\theta}z)$  on a  $Q'(z) = re^{i\theta}P'(re^{i\theta}z)$  on peut appliquer une similitude à la figure sans changer l'énoncé. Enfin comme toute transformation affine est la composée d'une similitude avec une affinité de la forme  $(x, y) \mapsto (x, y \cos \alpha)$ , on peut supposer que les racines  $A, B, C$  de  $P$  sont les images des points d'affixes  $1, j, j^2$  par

$$z \mapsto \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2} \cos \alpha = z \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \bar{z} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Les demi-axes  $a, b$  de l'ellipse considérée sont alors égaux à  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{\cos \alpha}{2}$ ; la distance entre les foyers  $F_1, F_2$  est  $\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sin \alpha}{2}$ . L'homothétie de rapport

$$\left( \frac{\sin \alpha}{2} \right)^{-1} = \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}$$

transforme alors  $F_1$  et  $F_2$  en  $\pm 1$ . La composition de cette homothétie avec l'affinité précédente est la transformation  $z \mapsto z \cot \frac{\alpha}{2} + \bar{z} \tan \frac{\alpha}{2}$  de sorte qu'en posant  $a = \cot \frac{\alpha}{2}$  le polynôme de racines  $A, B, C$  est

$$P(z) = \left( z - a - \frac{1}{a} \right) \left( z - aj - \frac{1}{aj} \right) \left( z - aj^2 - \frac{1}{aj^2} \right)$$



et on vérifie que les racines de  $P'(z) = 3z^2 + 3j + 3j^2 = 3x^2 - 3$  sont bien  $\pm 1$ .  $\square$

**2.3.5. Proposition.** *Étant donné un triangle  $ABC$ , l'ellipse inscrite dans  $ABC$  d'aire maximale est l'ellipse de Steiner; son aire est égal à  $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$  fois celle de l'aire de  $ABC$ .*

**2.3.6. Lemme.** *Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de rayon  $r$ ; les triangles d'aire minimale circonscrits à  $\mathcal{C}$  sont équilatéraux.*

*Démonstration.* Notons  $S$  l'aire du triangle considéré,  $a, b, c$  les longueurs des côtés et  $p$  le demi-périmètre. La relation  $S = pr$  nous indique que minimiser  $S$  revient à minimiser  $p$ . La formule de Héron  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$  donne

$$\frac{r^2}{p^2} = \left(1 - \frac{a}{p}\right)\left(1 - \frac{b}{p}\right)\left(1 - \frac{c}{p}\right).$$

On note que  $\left(1 - \frac{a}{p}\right) + \left(1 - \frac{b}{p}\right) + \left(1 - \frac{c}{p}\right) = 1$  de sorte que leur produit est maximal quand on a  $\left(1 - \frac{a}{p}\right) = \left(1 - \frac{b}{p}\right) = \left(1 - \frac{c}{p}\right)$  soit  $a = b = c$ , d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration de la proposition* On considère  $ABC$  avec son ellipse  $\Gamma$  inscrite et soit une affinité qui transforme  $\Gamma$  en un cercle; le rapport de l'aire du triangle sur celle de l'ellipse est inchangé. Si  $\Gamma$  est l'ellipse de Steiner alors son image est un cercle inscrit en un triangle  $A'B'C'$  avec point de contact en les milieux des côtés, ce qui est caractéristique du triangle équilatéral. Le rapport de l'aire de l'ellipse sur celui du triangle est alors  $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ . Si l'ellipse considérée n'est pas celle de Steiner, le triangle  $A'B'C'$  n'est alors plus équilatéral et le rapport des aires est, d'après le lemme précédent, strictement supérieur à  $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ .  $\square$

**2.3.7. Définition.** *Un produit de Blaschke de degré  $n$  est une fonction méromorphe de la forme*

$$b(z) = \beta \prod_{i=1}^n \frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z}$$

où  $|\beta| = 1$  et  $|a_i| \leq 1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

On notera que  $b$  envoie la boule unité  $\mathbb{B}$  sur elle-même, préserve sa frontière  $\mathbb{S}$  et son complémentaire.

**2.3.8. Lemme.** Soit  $\lambda \in \mathbb{S}$  alors  $\lambda$  admet exactement  $n$  antécédents distincts, lesquels appartiennent à  $\mathbb{S}$ .

*Démonstration.* Il suffit juste de vérifier que les antécédents sont distincts deux à deux, ou encore que  $b'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{S}$ . Pour cela on calcule via la dérivée logarithmique

$$\left| \frac{b'(z)}{zb(z)} \right| = \sum_{i=1}^n \frac{1 - |a_i|^2}{|z - a_i|^2} \neq 0.$$

□

**2.3.9. Définition.** Soient  $a_1, a_2$  deux nombres complexes distincts de norme  $< 1$ . L'ellipse de Blaschke associée est définie par

$$E_{a_1, a_2} : |z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \bar{a}_1 a_2|.$$

**2.3.10. Théorème. (2002)**

Soient  $a_1, a_2$  deux nombres complexes distincts de norme  $< 1$  et

$$b(z) = z \left( \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \right) \left( \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} \right)$$

le produit de Blaschke associé. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{S}$ , on note  $z_1, z_2, z_3$  les trois points distincts de  $\mathbb{S}$  tels que  $b(z_1) = b(z_2)b(z_3) = \lambda$ . L'ellipse de Blaschke  $E_{a_1, a_2}$  est alors inscrite dans le triangle défini par  $z_1, z_2, z_3$  aux points de contact

$$\zeta_1 = \frac{m_2 z_3 + m_3 z_1}{m_2 + m_3}, \quad \zeta_2 = \frac{m_1 z_3 + m_3 z_1}{m_1 + m_3}, \quad \zeta_3 = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$

où les réels  $m_1, m_2, m_3$  sont les résidus en respectivement  $z_1, z_2, z_3$  de la fraction rationnelle

$$F(z) = \frac{b(z)/z}{(b(z) - \lambda)} = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \frac{m_3}{z - z_3}.$$

*Remarque :* en outre tout point de  $E$  peut s'obtenir comme un point de contact avec une droite  $z_1 z_2$  comme dans le théorème ci-dessus. On obtient ainsi un cas particulier du théorème de Poncelet entre le cercle unité et une ellipse de Blaschke. On peut montrer que toute ellipse de 3-Poncelet pour le cercle unité est nécessairement une ellipse de Blaschke.

*Démonstration.* On renvoie le lecteur à l'exercice ??.

□

## 2.4. Théorème de Habets

Un résultat relativement récent puisque découvert en 1998 : étant donné un triangle  $ABC$  déterminant un repère barycentrique du plan, on note

$U, V, W$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ . Pour  $P$  un point du plan autre que  $A, B, C$ , on note  $E, F, G$  les milieux respectifs des segments  $[PA]$ ,  $[PB]$  et  $[PC]$ . On note  $(p_1, p_2, p_3)$  les coordonnées barycentriques de  $P$  dans le repère  $(A, B, C)$ . Les coordonnées barycentriques des points  $U, V, W, E, F, G$  sont :

- $U : (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ;
- $V : (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ;
- $W : (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ;
- $E : (\frac{p_1+1}{2}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_3}{2})$ ;
- $F : (\frac{p_1}{2}, \frac{p_2+1}{2}, \frac{p_3}{2})$ ;
- $G : (\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_3+1}{2})$ .

On note  $R, S, T$  les points respectivement obtenus comme les intersections  $R = (AP) \cap (BC)$ ,  $S = (BP) \cap (AC)$  et  $T = (CP) \cap (AB)$ . L'équation de  $(BC)$  est  $x = 0$ . On écrit  $R = (1-t)P + tA$  avec  $t$  tel que  $x = 0$  ce qui donne  $t = \frac{p_1}{p_1-1}$  ce qui donne  $R : (0, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1})$  et de manière symétrique  $S : (\frac{p_1}{1-p_2}, 0, \frac{p_3}{1-p_2})$  et  $T : (\frac{p_1}{1-p_3}, \frac{p_2}{1-p_3}, 0)$ .

**2.4.1. Théorème.** *Les points  $U, V, W, E, F, G, R, S, T$  appartiennent à une même conique dont une équation est*

$$p_2 p_3 X^2 + p_1 p_3 Y^2 + p_1 p_2 Z^2 + p_3(p_3-1)XY + p_2(p_2-1)XZ + p_1(p_1-1)YZ = 0.$$

*Démonstration.* Soit

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ$$

l'équation générale d'une conique. L'intersection de la conique avec la droite  $(BC)$  est  $\{I, R\}$  de sorte que, cf. le §IV-1.1,  $bY^2 + cZ^2 + fYZ = b(Y - Z)(Y - \frac{p_2}{p_3}Z)$  ce qui donne  $c = b\frac{p_2}{p_3}$  et  $f = -b(1 + \frac{p_2}{p_3})$ .

De même on obtient en utilisant  $J, S$ ,  $c = a\frac{p_1}{p_3}$  et  $e = -a(1 + \frac{p_1}{p_3})$ , puis en utilisant  $K, T$ ,  $b = a\frac{p_1}{p_2}$  et  $d = -a(1 + \frac{p_1}{p_2})$ . En prenant par exemple  $a = p_2 p_3$ , on obtient l'équation donnée en utilisant  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . On vérifie alors aisément qu'elle contient les points  $E, F, G$ .  $\square$

En outre,

- si  $P$  est sur une des droites  $(BC)$ , i.e.  $p_1 = 0$ , l'équation devient  $-Xp_2(p_2-1)(X - Y - Z) = 0$  ce qui donne la droite  $(BC)$  et  $2X - 1 = 0$  (car  $X + Y + Z = 1$ ) soit la droite  $(VW)$ . Ainsi si  $P$  appartient à l'une des

trois droites définies par le triangle  $ABC$ , alors la conique est dégénérée en deux droites parallèles : celle des trois droites ci-dessus qui contient  $P$  et celle qui passe par les milieux des deux autres côté

- Si  $P$  est sur la parallèle à un des côtés de  $ABC$  passant par le sommet opposé, alors la conique dégénérée est formée de deux droites concourantes dont une passe par les milieux des côtés issus dudit sommet opposé. En effet pour  $p_1 = 1$ , on obtient  $-p_2(X - Y - Z)(p_2X - Y - Z) = 0$  ce qui donne la droite  $(VW)$  d'équation  $2X = 1$  et celle d'équation  $(p_2X - Y + Z) = 0$  qui intersecte  $(VW)$  en le point  $(\frac{1}{2}, \frac{1+p_2}{4}, \frac{1+p_3}{4})$ .

- Pour étudier les cas  $p_1p_2p_3 \neq 0$  et  $p_1, p_2, p_3 \neq 1$ , il est plus agréable de passer dans le repère  $(U, V, W)$ , le changement de coordonnées étant donné par les équations suivantes :

$$A = V + W - U, \quad B = W + U - V, \quad C = U + V - W$$

la nouvelle équation de la conique étant alors

$$\alpha Y'Z' + \beta Z'X' + \gamma X'Y', \quad \alpha = p_1(p_2 + p_3), \quad \beta = p_2(p_1 + p_3), \quad \gamma = p_3(p_1 + p_2).$$

La matrice associée est alors

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est  $2abc = 2p_1p_2p_3(p_1 + p_2)(p_2 + p_3)(p_3 + p_1)$ . D'après le §IV-1.1, les directions asymptotiques de la conique sont données par

$$F'(-v - w, v, w) = -cv^2 + (a - b - c)vw - bw^2$$

dont le discriminant est  $\Delta = (a - b - c)^2 - 4bc = -4p_1p_2p_3$  de sorte, qu'en excluant les cas de décomposition, on obtient une ellipse dans le cas où  $P$  est intérieur au triangle ou à un secteur angulaire de l'un des sommets ne contenant pas le côté opposé et sinon on obtient une hyperbole. Autrement dit si  $P$  admet 0 ou 2 coordonnées barycentriques négatives, la conique est une ellipse.

*Remarque :* si  $P$  est le centre de gravité de  $ABC$  alors l'ellipse est tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux ; cette ellipse est connue sous le nom d'ellipse de Steiner.

*Remarque :* si  $P$  est l'orthocentre de  $ABC$  alors la conique est le cercle d'Euler.

**2.4.2. Proposition.** *Les coordonnées barycentriques dans le repère  $(U, V, W)$  du centre de la conique de Habets sont  $(\frac{1-p_1}{2} : \frac{1-p_2}{2} : \frac{1-p_3}{2})$ .*

*Démonstration.* Avec les notations précédentes, on calcule

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{pmatrix}.$$

D'après le §IV-1.1, les coordonnées barycentriques de  $O$  sont  $(a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c))$  ce qui donne le résultat en utilisant les définitions de  $a, b, c$  plus haut.  $\square$

**2.4.3. Proposition.** *Les points  $U$  et  $E$  (resp.  $V$  et  $F$ , resp.  $W$  et  $G$ ) sont diamétralement opposés sur  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Dans le repère barycentrique  $(U, V, W)$ , on a  $E = (-p_1 : 1 - p_2 : 1 - p_3)$  de sorte que  $O = \frac{U + E}{2}$  et de même  $O = \frac{V + F}{2} = \frac{W + G}{2}$ .  $\square$

**2.4.4. Proposition.** *Les points  $O, P$  et le centre de gravité  $G_0$  de  $ABC$  sont alignés dans le même rapport quel que soit le choix de  $P$ .*

*Démonstration.* Dans le repère barycentrique  $(U, V, W)$ , le centre de gravité  $G_0$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3})$  et  $P = (1 - 2p_1 : 1 - 2p_2 : 1 - 2p_3)$  et donc  $O = \frac{G_0 + P}{4}$ .  $\square$

### 3. Point de vue projectif

L'étude des coniques remonte à l'Antiquité avec Archimède et Appolonius et sera d'actualité jusqu'au XX-ième siècle avec, pour les mathématiciens les plus marquants, Descartes, Pascal, Desargues, Newton au XVII-ième, puis Poncelet, Plücker, Chasles, Frégier au XIX-ième. Jusqu'au milieu du XX-ième siècle, les coniques tiennent une place quasi monopolistique dans les manuels de mathématiques et on ne pourra que s'étonner de leur quasi disparition dans le secondaire et même le supérieur depuis ces dernières décennies.

#### 3.1. Généralités

Soient  $K$  un corps de caractéristique différente de 2,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathbb{P}(E)$  le plan projectif associé. On note  $Q$  l'espace vectoriel des formes quadratiques sur  $E$  lequel est isomorphe à celui des matrices  $3 \times 3$  symétriques et donc de dimension 6.

**3.1.1. Définition.** On appelle *conique de*  $\mathbb{P}(E)$ , un élément  $\bar{q}$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}(Q)$ , i.e. une forme quadratique non nulle définie à un scalaire multiplicatif près. La conique est dite *propre* si  $q$  est non dégénérée, *impropre* sinon.

Si  $\bar{q}$  est une conique de  $\mathbb{P}(E)$ , on appelle conique duale la conique  $\bar{q}^*$  de  $\mathbb{P}(E^*)$ .

*Remarque :* on dit que  $q$  est une équation de la conique  $\bar{q} \in \mathbb{P}(Q)$ . Dans la suite on ne marquera pas la distinction entre la classe  $\bar{q}$  de  $q$  dans  $\mathbb{P}(Q)$  et son équation  $q$ .

**3.1.2. Définition.** On dit qu'un point  $m \in \mathbb{P}(E)$  est un point de la conique  $\bar{q}$  si  $q(m) = 0$ . On note  $V(q) = \{m \in \mathbb{P}(E) : q(m) = 0\}$ .

*Remarque :* la nullité de  $q(m)$  ne dépend pas de l'équation  $q$  de la conique ni du représentant de  $m$  dans  $E$  choisi pour calculer  $q(m)$ . La conique est dite non vide si  $V(q)$  l'est.

*Remarque :* justifions un instant la pertinence géométrique de notre définition :

- une conique qui n'a pas de point sur un corps donné en aura toujours dans une extension convenable.
- le théorème ?? dit des zéros de Hilbert permet d'affirmer que si  $K$  est algébriquement clos et si  $V(q) = V(q')$  alors  $q$  et  $q'$  sont proportionnelles.

### 3.2. Comme ligne de niveau

Définir une conique en termes d'équation n'est pas vraiment géométrique ; la proposition suivante en fournit une définition géométrique comme ligne de niveau.

**3.2.1. Proposition.** Soient 4 points de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  tels que trois quelconques ne sont jamais alignés. Pour  $k \in \mathbb{K}$  l'ensemble

$$\left\{ M \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : [(MA), (MB), (MC), (MD)] = k \right\}$$

est une conique passant par  $A, B, C$  et  $D$ .

*Démonstration.* Les points  $A, B, C, D$  forment un repère avec

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

Pour  $M = (x_0 : y_0 : z_0)$ , une équation de  $(AM)$  est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & X \\ 0 & y_0 & Y \\ 0 & z_0 & Z \end{vmatrix} = 0$$

soit  $y_0Z - z - 0Y = 0$ . De même une équation de  $(BM)$  (resp.  $(CM)$ ) est  $x_0Z - z_0X = 0$  (resp.  $x_0Y - y_0X = 0$ ) tandis que celle de  $(DM)$  est

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & X \\ 1 & y_0 & Y \\ 1 & z_0 & Z \end{vmatrix} = 0$$

soit  $(x_0 - z_0)(Y - Z) - (y_0 - z_0)(X - Z) = 0$ . En notant  $L_{UV}$  une équation de la droite  $(UV)$ , on a

$$\begin{cases} L_{MC} = -x_0L_{MA} + y_0L_{MB} \\ L_{MD} = -(x_0 - z_0)L_{MA} + (y_0 - z_0)L_{MB} \end{cases}$$

de sorte que d'après III-3.1.4, on a

$$\begin{aligned} k &= [(MA), (MB), (MC), (MD)] = \frac{\begin{vmatrix} -x_0 & 1 \\ y_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -x_0 & 0 \\ y_0 & 1 \end{vmatrix}} / \frac{\begin{vmatrix} z_0 - x_0 & 1 \\ y_0 - z_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_0 - x_0 & 0 \\ y_0 - z_0 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{y_0(z_0 - x_0)}{x_0(z_0 - y_0)} \end{aligned}$$

de sorte que le lieu cherché est celui donné par l'équation

$$y_0(z_0 - x_0) - kx_0(z_0 - y_0) = 0$$

qui est bien une conique passant par  $A, B, C, D$ . □

### 3.3. Intersection d'une conique et d'une droite

Commençons par une version simplissime du théorème de Bézout.

**3.3.1. Lemme.** *Soit  $\Gamma$  une conique propre et  $D$  une droite, alors  $\Gamma \cap D$  est de cardinal inférieur ou égal à 2.*

*Démonstration.* Soient  $a, b$  deux points distincts de  $D$  et  $m = \lambda a + \mu b$  un point quelconque de  $D$ . Il s'agit alors de résoudre  $q(\lambda a + \mu b) = 0$  soit en développant :

$$\lambda^2 q(a) + 2\lambda\mu\varphi(a, b) + \mu^2 q(b) = 0$$

où  $\varphi$  est le produit scalaire associé à  $q$ . Si on avait  $q(a) = q(b) = \varphi(a, b) = 0$  alors  $D$  serait contenu dans  $\Gamma$  et  $q$  serait dégénérée (le plan vectoriel  $p^{-1}(D)$  serait totalement isotrope), ce qui n'est pas. Sinon  $D$  n'est pas contenue dans  $\Gamma$  et quitte à changer  $a$ , on suppose  $q(a) \neq 0$ . Comme  $a \notin \Gamma$ , on peut fixer  $\mu = 1$  et l'équation se réduit alors à un équation du second degré en  $\lambda$ . □

**3.3.2. Définition.** On dit que  $D$  est *extérieure* à  $\Gamma$  si  $\Gamma \cap D$  est vide, tangente si l'intersection est réduite à un point et *sécante* sinon.

*Remarque :* dans le cas impropre  $D \subset \Gamma$  sera dite tangente à  $\Gamma$ .

**3.3.3. Proposition.** Soit  $q$  une conique et  $D$  une droite de  $\mathbb{P}(E)$  image du plan vectoriel  $F$  de  $E$ . Soit  $a, b$  une base de  $F$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $D$  est tangente à  $q$  ;
- 2)  $F$  est isotrope pour  $q$ , i.e.  $q|_F$  est dégénérée ;
- 3) on a  $q(a)q(b) = \varphi(a, b)^2$  ;
- 4) le discriminant de  $q|_F$  est nul.

*Démonstration.* Avec les notations du lemme précédent,  $D$  est une tangente si et seulement si le discriminant de l'équation du second degré en  $\lambda$  est nul, i.e.  $4(\varphi(a, b)^2 - q(a)q(b)) = 4\Delta(q|_F)$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque :* en utilisant la dualité  $D$  est tangente à  $q$  si et seulement si  $D \in \mathbb{P}(E^*)$  appartient à  $V(q^*)$ . La conique duale est aussi appelée la conique tangentielle.

*Remarque :*  $D$  est sécante à  $\Gamma$  si et seulement si le discriminant de  $q|_F$  est l'opposé d'un carré non nul de  $K$ .

*Remarque :* il y a une unique tangente à  $q$  passant par un de ses points ; il s'agit de l'ensemble des points  $m$  tels que  $\varphi(a, m) = 0$ , i.e. c'est l'image du sous-espace  $a^\perp$  orthogonal à  $a$  dans  $E$  ou encore la polaire de  $a$  au sens de la définition IV-3.5.1. En particulier toute droite passant par un point de la conique autre que la tangente, recoupe la conique en un deuxième point.

**3.3.4. Proposition.** Soit  $\bar{q}$  une conique propre non vide et  $\Gamma = V(q)$ . Pour  $a \in \mathbb{P}(E)$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ , il y a 0 ou 2 tangentes à  $\Gamma$  passant par  $a$ . Les points de contact des tangentes sont les points d'intersection de  $\Gamma$  et de la droite d'équation  $\varphi(a, m) = 0$ , i.e. de la polaire de  $a$  au sens de la définition IV-3.5.1.

*Démonstration.* D'après les calculs du lemme précédent, pour  $m \in \Gamma$ , la droite  $(am)$  est tangente à  $\Gamma$  si et seulement si  $\varphi(a, m) - q(a)q(m) = 0$  ce qui donne  $\varphi(a, m) = 0$ . L'ensemble des points  $m \in \mathbb{P}(E)$  vérifiant  $\varphi(a, m) = 0$  est l'image de  $a^\perp$  orthogonal de  $a$  dans  $E$ . Comme  $q$  est non dégénérée,  $a^\perp$  est un plan et son image notée encore  $a^\perp$  dans  $\mathbb{P}(E)$  est une droite. Il y a au plus deux points d'intersection entre  $a^\perp$  et  $\Gamma$  et s'il n'y en avait qu'un  $a^\perp$  serait une tangente en un point  $b$  à  $\Gamma$  et alors  $a^\perp = b^\perp$  et donc  $a = (a^\perp)^\perp = (b^\perp)^\perp = b$  ce qui n'est pas car  $a \notin \Gamma$  par hypothèse.  $\square$



**3.3.5. Définition.** Un point de  $\mathbb{P}(E)$  est dit *extérieur* (resp. *intérieur*) à  $\Gamma$  si on peut y mener deux (resp. aucune) tangentes à  $\Gamma$ .

*Remarque :* dans le cas réel, les points intérieurs à une ellipse sont ceux de la composante connexe bornée déterminée par cette ellipse et les points extérieurs ceux de la composante connexe non bornée.

**3.3.6. Corollaire.** Si  $q$  est une conique non vide alors l'ensemble  $\Gamma$  de ses points est de cardinal supérieur ou égal à 4.

*Démonstration.* Soit  $a \in \Gamma$ ; comme  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2 son cardinal est  $\geq 3$  et donc le cardinal de la droite projective duale  $a^*$  des droites passant par  $a$  est  $\geq 4$ . Parmi ces droites, une seule est tangente à  $\Gamma$ , les autres recoupent donc  $\Gamma$  en au moins trois points distincts de  $a$ .  $\square$

### 3.4. Classification projective

**3.4.1. Définition.** Le groupe  $PGL(E)$  des homographies de  $\mathbb{P}(E)$  opère sur l'ensemble  $\mathbb{P}(Q)$  des coniques de la façon suivante : pour  $\bar{u} \in PGL(E)$  et  $\bar{q} \in \mathbb{P}(Q)$ , on pose  $\bar{u}.\bar{q} := \bar{q} \circ u^{-1}$ .

*Remarque :* avec cette formule, on vérifie alors que  $V(\bar{u}.\bar{q}) = \bar{u}(V(\bar{q}))$ .

**3.4.2. Définition.** On dit que deux coniques  $q$  et  $q'$  sont *projectivement équivalentes* si elles sont dans la même orbite pour l'action de  $PGL(E)$  sur  $\mathbb{P}(Q)$ .

*Remarque :* si  $q$  et  $q'$  sont projectivement équivalentes alors il existe une homographie  $u$  telle que  $u(V(q)) = V(q')$ . En revanche la réciproque est fautive : par exemple pour  $K = \mathbb{Q}$  les formes  $X^2 + y^2 + T^2$  et  $X^2 + Y^2 + 2T^2$  ne sont pas équivalentes à un scalaire près (puisque leurs discriminants 1 et 2 ne sont pas égaux dans  $\mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}^{\times 2}$ ) alors qu'elles sont toutes deux vides. Le théorème de Sylvester de classification des formes quadratiques montre que cette difficulté ne se produit pas sur  $\mathbb{R}$  et moins encore sur  $\mathbb{C}$ .

**3.4.3. Proposition.** Deux coniques impropres  $q$  et  $q'$  sont projectivement équivalentes si et seulement si elles vérifient l'une des conditions suivantes :

- $q$  et  $q'$  sont toutes deux de rang 1 ;
- $q$  et  $q'$  sont de rang deux et les formes induites sur  $E / \text{Ker } q$  et  $E / \text{Ker } q'$  ont même discriminant  $\Delta$  dans  $\mathbb{K}^\times / \mathbb{K}^{\times 2}$ .

Dans le premier cas, la forme est équivalente à un scalaire près à  $q = X^2$  et  $V(q)$  est la droite double  $X = 0$ .

Dans le second cas,  $q$  est équivalente à un scalaire près à  $X^2 - \alpha Y^2$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}^\times$  :

- si  $\alpha$  est un carré dans  $\mathbb{K}$ ,  $V(q)$  est la réunion de deux droites distinctes ;
- si  $\alpha$  n'est pas un carré dans  $\mathbb{K}$ ,  $V(q)$  est réduite à un point double  $(0, 0, 1)$ .

*Démonstration.* 1) Si  $q$  est de rang 1, son noyau est de dimension 2 et, en prenant pour base de  $E$ , une base  $(e_1, e_2, e_3)$  avec  $e_2, e_3 \in \text{Ker } q$ , on voit que  $q$  est de la forme  $\lambda X^2$ .

2) Si le noyau est de dimension 1, on prend une base  $(e_1, e_2, e_3)$  orthogonale pour  $q$  avec  $\text{Ker } q = \langle e_3 \rangle$  et on a alors  $q = \lambda X^2 + \mu Y^2$  avec  $\lambda\mu \neq 0$ . À un scalaire près, on a  $q = X^2 - \alpha Y^2$  et  $q, q'$  sont équivalentes si et seulement si elles le sont comme formes en les seules variables  $X, Y$ , i.e. si les formes qu'elles induisent sur  $E/\text{Ker } q$  et  $E/\text{Ker } q'$  le sont. Il faut pour cela qu'elles aient même discriminant dans  $\mathbb{K}^\times/\mathbb{K}^{\times 2}$  ce qui signifie  $\alpha' = \lambda^2\alpha$  et cela suffit car on passe alors de  $a$  à  $q'$  en changeant  $e_2$  en  $\lambda e_2$ .

Du point de vue de  $V(q)$ , il y a deux cas à distinguer :

- si  $\alpha = \beta^2$  est un carré, le changement de base  $e'_2 = e_2/\beta$  montre que  $q$  est équivalente à  $X^2 - Y^2$  et  $V(q)$  est formé de l'image des deux droites  $X = \pm Y$ .
- si  $\alpha$  n'est pas un carré, il est clair que  $V(q)$  est réduite au point  $(0, 0, 1)$ . □

#### 3.4.4. Proposition.

- 1) Soit  $q$  une conique propre non vide et  $\Gamma = V(q)$ . Si  $a, b, d$  sont des points distincts de  $\Gamma$  et si  $c$  est l'intersection des tangentes à  $\Gamma$  en  $a$  et  $b$ , les quatre points  $a, b, c, d$  forment un repère de  $\mathbb{P}(E)$ .
- 2) Réciproquement si  $a, b, c, d$  est un repère de  $\mathbb{P}(E)$ , il existe une unique conique propre  $q$  passant par  $a, b, d$  et telle que les tangentes à  $\Gamma$  en  $a$  et  $b$  se coupent en  $c$ . Dans le repère  $a, b, c, d$ , on a  $q = Y^2 - XT$  à un scalaire près.
- 3) Soit  $q$  une conique propre non vide et  $\Gamma = V(q)$ . Il existe une base de  $E$  dans laquelle  $q$  a pour expression  $Y^2 - XT$  à un scalaire près.

*Démonstration.* 1) Les tangentes n'étant pas des sécantes lesquelles n'intersectent  $\Gamma$  en deux points, on en déduit que trois points parmi  $a, b, c, d$  ne sont pas alignés, i.e.  $a, b, c, d$  forment un repère de  $\mathbb{P}(E)$ .

2) On peut choisir une base de  $E$  dans laquelle des représentants des points  $a, b, c, d$  sont donnés par  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (1, 0, 0)$ ,  $c = (0, 1, 0)$  et  $d = (1, 1, 1)$ . Si on écrit que la conique

$$q = uX^2 + vY^2 + wT^2 + 2u'YT + 2v'TX + 2w'XY$$

passé par  $a, b, d$  et est tangente aux droites d'équations  $X = 0$  et  $T = 0$ , on trouve  $q = v(Y^2 - XT)$ .

3) On choisit  $a, b, d$  distincts dans  $\Gamma$  ; les tangentes à  $\Gamma$  en  $a$  et  $b$  se coupent en  $c$ . D'après 1), les points  $a, b, c, d$  forment un repère et la conclusion provient directement de 2).  $\square$

*Remarque* : on voit que pour les coniques propres non vides, la donnée de  $\Gamma = V(q)$  équivaut à celle de  $q$ .

**3.4.5. Théorème.** *Le groupe  $PGL(E)$  opère transitivement sur l'ensemble des coniques propres non vides.*

*Démonstration.* Deux coniques propres non vides  $q$  et  $q'$  admettent la même équation  $Y^2 - XT$  à un scalaire près, dans deux repères convenables. L'homographie qui fait passer d'un repère à l'autre envoie la première conique sur la deuxième d'où le résultat.  $\square$

**3.4.6. Définition.** Soit  $\Gamma$  une conique propre non vide de  $\mathbb{P}(E)$ ,  $D$  une droite de  $\mathbb{P}(E)$  choisie comme droite de l'infini et soit  $U = \mathbb{P}(E) - D$  le plan affine associé. On pose  $\Gamma_0 = \Gamma \cap U$  et on dit que  $\Gamma_0$  est une conique affine de  $U$ .

- si  $|\Gamma \cap D| = 2$ , on dit que  $\Gamma_0$  est *une hyperbole* ;
- $|\Gamma \cap D| = 1$ , on dit que  $\Gamma_0$  est *une parabole* ;
- $|\Gamma \cap D| = 0$ , on dit que  $\Gamma_0$  est *une ellipse*.

*Exemple* : considérons le cas de la conique propre non vide  $\Gamma$  donnée par l'équation  $Y^2 - XT = 0$ . Si on prend  $T = 0$  comme droite à l'infini,  $U$  est associé à l'ensemble des points  $(x, y, 1)$  et la trace de  $\Gamma$  y a pour équation  $x = y^2$ , soit une parabole.

Si on prend  $Y = 0$ , la trace de  $\Gamma$  y a pour équation  $xt = 1$ , soit une hyperbole.

Enfin si on prend  $X + T = 0$  comme droite à l'infini et qu'on effectue le changement de variable  $T' = X + T$ ,  $X' = X$ ,  $Y' = Y$ , la trace de  $\Gamma$  y a pour équation  $(x')^2 + (y')^2 - x' = 0$  soit une ellipse.

### 3.5. Pôles et polaires

On utilise le produit scalaire associé à une conique  $q$  pour définir des orthogonaux dans  $E$  et  $\mathbb{P}(E)$ .

**3.5.1. Définition.** Soit  $q$  une conique et soient  $a, b \in \mathbb{P}(E)$ . On dit que  $a, b$  sont *conjugués* pour  $q$  si on a  $\varphi(a, b) = 0$  où  $\varphi$  désigne la forme polaire de  $q$ . Si  $m$  n'est pas un point double de  $q$ , l'ensemble des conjugués de  $m$  est une droite appelée *polaire* de  $m$  par rapport à  $q$  et on la note  $m^\perp$ . Dualelement si  $D$  est une droite qui ne contient pas de point double de  $q$ , il existe un

unique point conjugué de tous les points de  $D$  qu'on appelle *le pôle* de  $D$  et que l'on note  $D^\perp$ .

*Remarque* : si  $a \in b^\perp$  alors  $b \in a^\perp$ .

*Remarque* :  $a \in a^\perp$  si et seulement si  $a \in \Gamma$  et alors  $a^\perp$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $a$ .

**3.5.2. Proposition.** *Soit  $q$  une conique propre ; l'application qui à un point associe sa polaire est une homographie de  $\mathbb{P}(E)$  dans  $\mathbb{P}(E^*)$ .*

*Démonstration.* Soit l'application linéaire  $\phi : E \rightarrow E^*$  qui à  $a \in E$  associe la forme  $\phi_a : x \mapsto \varphi(a, x)$ . L'application associée sur les espaces projectifs est par définition une homographie, d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : l'homographie réciproque est l'application qui à une droite associe son pôle.

*Remarque* : trois points sont alignés si et seulement si leurs polaires sont concourantes.

**3.5.3. Proposition.** *Soit  $q$  une conique et  $D$  une droite projective image du plan vectoriel  $F$  de  $E$ . On suppose que  $D$  n'est pas une tangente à  $q$ . L'application qui à un point  $m$  de  $D$  associe l'unique point de  $D$  conjugué par rapport à  $q$  est une involution de  $D$ .*

*Démonstration.* Comme  $D$  n'est pas tangente,  $m$  n'est pas un point double, de sorte que  $m^\perp$  est une droite distincte de  $D$  ; l'intersection  $D \cap m^\perp$  est donc réduite à un point  $m'$ . On a vu dans la preuve de la proposition précédente que  $m \mapsto m^\perp$  est une homographie ; l'incidence  $m^\perp \mapsto m'$  est aussi une homographie et donc  $m \mapsto m'$  est une homographie qui est clairement involutive.  $\square$

**3.5.4. Corollaire.** *Soit  $q$  un conique et soient  $a, b \in \mathbb{P}(E)$  deux points distincts non situés sur  $\Gamma = V(q)$ . On suppose que  $(ab)$  coupe  $\Gamma$  en  $u$  et  $v$  alors  $a$  et  $b$  sont conjugués par rapport à  $q$  si et seulement si on a  $[a, b, u, v] = -1$ , i.e.  $a, b, u, v$  forment une division harmonique.*

*Démonstration.* Dans l'involution précédente, les points  $u$  et  $v$  sont fixes et le résultat découle de la proposition III-3.3.2.  $\square$

*Remarque* : si  $q$  est un conique dégénérée avec  $\Gamma$  réunion de deux droites  $D_1, D_2$ , alors pour  $d \notin D_1 \cup D_2$ , la polaire de  $d$  par rapport à  $\Gamma$  est celle de  $d$  par rapports aux droites  $D_1, D_2$  au sens de III-1.7.8.

**3.5.5. Proposition.** Soit  $m$  un point extérieur à  $\Gamma$  et  $a, b$  les points de contact des deux tangentes issues de  $m$ . La polaire de  $m$  par rapport à  $\Gamma$  est la droite  $(ab)$ .

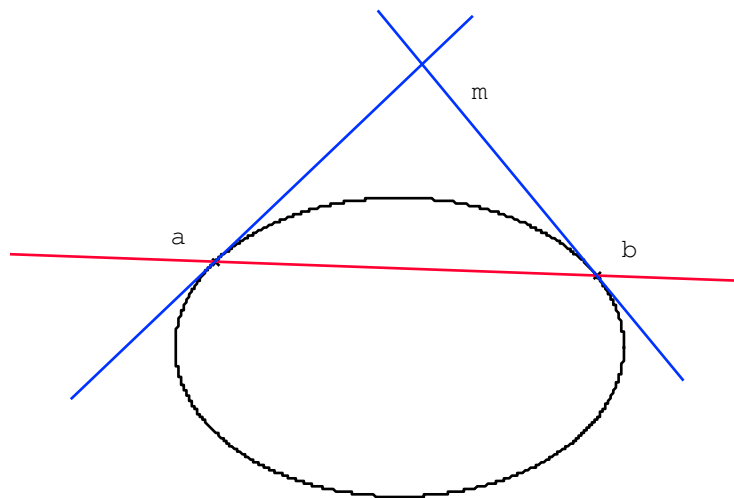


Figure 3.1

Construction de la polaire de  $m$  par des tangentes

*Démonstration.* On a  $m \in a^\perp \cap b^\perp$  et donc  $a, b \in m^\perp$ . □

**3.5.6. Proposition.** Soit  $q$  une conique propre non vide et soit  $\Gamma = V(q)$ . Soit  $d \notin \Gamma$  à partir duquel on mène deux sécantes  $A$  et  $B$  à  $\Gamma$  en respectivement  $a, a'$  et  $b, b'$ . Soit  $o$  (resp.  $u$ ) le point d'intersection des droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  (resp.  $(ab')$  et  $(a'b)$ ). Alors la polaire de  $d$  par rapport à  $q$  est la droite  $(ou)$ .

*Démonstration.* D'après le cas dégénéré, la polaire de  $d$  par aux droites  $(oa)$  et  $(oa')$  est la droite  $(ou)$ . Il en résulte que  $[d, a'', a, a'] = [d, b'', b, b'] = -1$  où  $a''$  et  $b''$  sont les intersections de  $(ou)$  avec respectivement  $(aa')$  et  $(bb')$ . Il s'ensuit que  $a''$  et  $b''$  sont sur la polaire de  $d$  par rapport à  $\Gamma$  et donc  $d^\perp = (a''b'') = (ou)$ . □

**3.5.7. Définition.** On appelle *triangle autopolaire* par rapport à  $q$ , un triangle  $abc$  tels que les points  $a, b, c$  soient deux à deux conjugués par rapport à  $q$ .

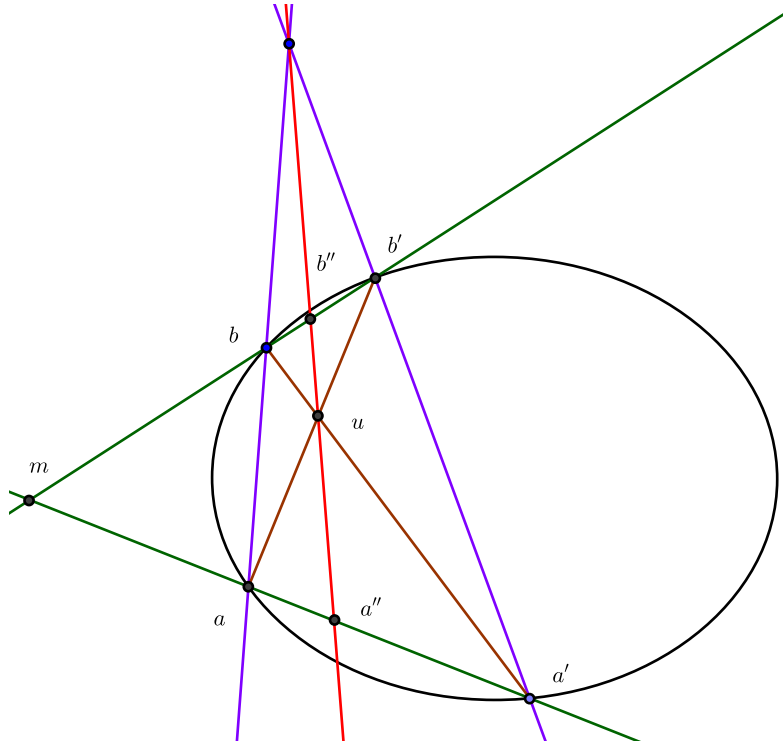


Figure 3.2

Construction de la polaire de  $m$  par des sécantes

*Remarque :* un triangle autopolaire est l'image d'une base orthogonale.

**3.5.8. Définition.** Soit  $q$  une conique propre non vide,  $\Gamma = V(q)$ . Pour  $D_\infty$  une droite projective, on note  $\Gamma_0$  la conique affine associée, i.e.  $\Gamma_0 = \Gamma \cap U$  avec  $U = \mathbb{P}(E) - D_\infty$ . Si  $\Gamma_0$  n'est pas une parabole, le pôle  $o$  de  $D_\infty$  est un point du plan affine  $U$  appelé *le centre* de  $\Gamma_0$ . Les droites passant par  $o$  sont appelées *diamètres* de  $\Gamma_0$ . Si  $D, D'$  sont deux diamètres, on dit qu'ils sont conjugués si leurs points à l'infini le sont.

*Remarque :* le pôle de  $D_\infty$  n'est pas sur cette droite sinon elle serait tangente et la conique serait une parabole.

**3.5.9. Proposition.** Avec les notations précédentes, le point  $o$  est centre de symétrie de  $\Gamma_0$ , i.e. il existe une involution  $\sigma_o$  qui fixe  $o$  et les points de  $D_\infty$  et qui laisse stable  $\Gamma_0$  définie comme suit :  $a \in \Gamma_0$ , la droite  $(oa)$  recoupe  $\Gamma_0$  en  $\sigma_o(a)$  et  $o$  est le milieu de  $[a, \sigma_o(a)]$ .

*Remarque :* on dit que  $\Gamma_0$  est une conique à centre.

*Démonstration.* L'involution  $\sigma_o$  est l'homographie associée à la symétrie vectorielle dont les espaces propres orthogonaux sont le plan  $E^+$  dont l'image est  $D_\infty$  et la droite  $E^-$  qui s'envoie sur  $o$ . Le fait que  $o$  soit le milieu de  $[a\sigma_o(a)]$  découle du fait que  $[o_\infty, o, a, \sigma_o(a)] = -1$  et que  $o_\infty = D_\infty \cap (oa)$  soit à l'infini.  $\square$

**3.5.10. Proposition.** *Les diamètres de  $\Gamma_0$  sont axes de symétries affines de  $\Gamma_0$  de direction le diamètre conjugué.*

*Démonstration.* Soit  $D$  un diamètre qui coupe  $D_\infty$  en  $d$  et soit  $\delta$  le pôle de  $D$  qui est un point de  $D_\infty$  car  $o \in D$ . Si  $\Delta$  est une droite de direction  $\delta$ , elle coupe  $\Gamma$  en  $a, b$  dont le milieu est sur  $D$  car  $[a, b, m, \delta] = -1$ .  $\square$

**3.5.11. Proposition.** *Soit  $P$  une parabole,  $o$  son point à l'infini et soient  $a, b$  deux points de  $P$ . Les tangentes à  $P$  en  $a$  et  $b$  se coupent en  $c$ . Soit  $\Delta = (co)$ , i.e. en termes affines, la parallèle à l'axe de  $P$  passant par  $c$ . Elle coupe  $P$  en  $m$  et  $(ab)$  en  $n$ . On a alors les propriétés suivantes :*

- 1)  $m$  est le milieu de  $[cn]$  ;
- 2)  $n$  est le milieu de  $[ab]$  ;
- 3) la tangente à  $P$  en  $m$  est parallèle à  $(ab)$ .

*Démonstration.* 1) La polaire de  $c$  est  $(ab)$  et c'est le lieu des conjugués harmoniques de  $c$  par rapport à  $P$ . Comme la sécante  $(cm)$  coupe  $P$  en  $o$ , on a  $[c, n, m, o] = -1$  ce qui signifie que  $m$  est le milieu de  $[cn]$  puisque  $o$  est à l'infini.

2) Soit  $l$  le point à l'infini de  $(ab)$ . Montrons que la polaire de  $l$  est  $(nc)$  : comme  $l$  est sur  $c^\perp$ , les points  $l$  et  $c$  sont conjugués et  $c \in l^\perp$ . Comme la droite de l'infini est tangente à  $P$  en  $o$ , ce dernier est aussi sur la polaire, d'où l'affirmation. On en déduit alors que  $[a, b, n, l] = -1$  ce qui montre que  $n$  est le milieu de  $[ab]$ .

3) La construction de la polaire de  $l$  montre que les deux tangentes issues de  $l$  sont  $(lo)$  et  $(lm)$  de sorte que la tangente en  $m$  passe par  $l$ , i.e. est parallèle à  $(ab)$ .  $\square$

### 3.6. La conique vue comme une droite projective

Soient  $\Gamma$  une conique propre non vide du plan projectif et  $a$  un point de  $\Gamma$ . À chaque droite  $D$  du faisceau  $a^*$  de droites issues de  $a$ , on fait correspondre le second point où  $D$  coupe  $\Gamma$  que l'on note  $\pi_a(D)$ . Lorsque  $D$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $a$ ,  $\pi_a(D)$  est le point  $a$ .

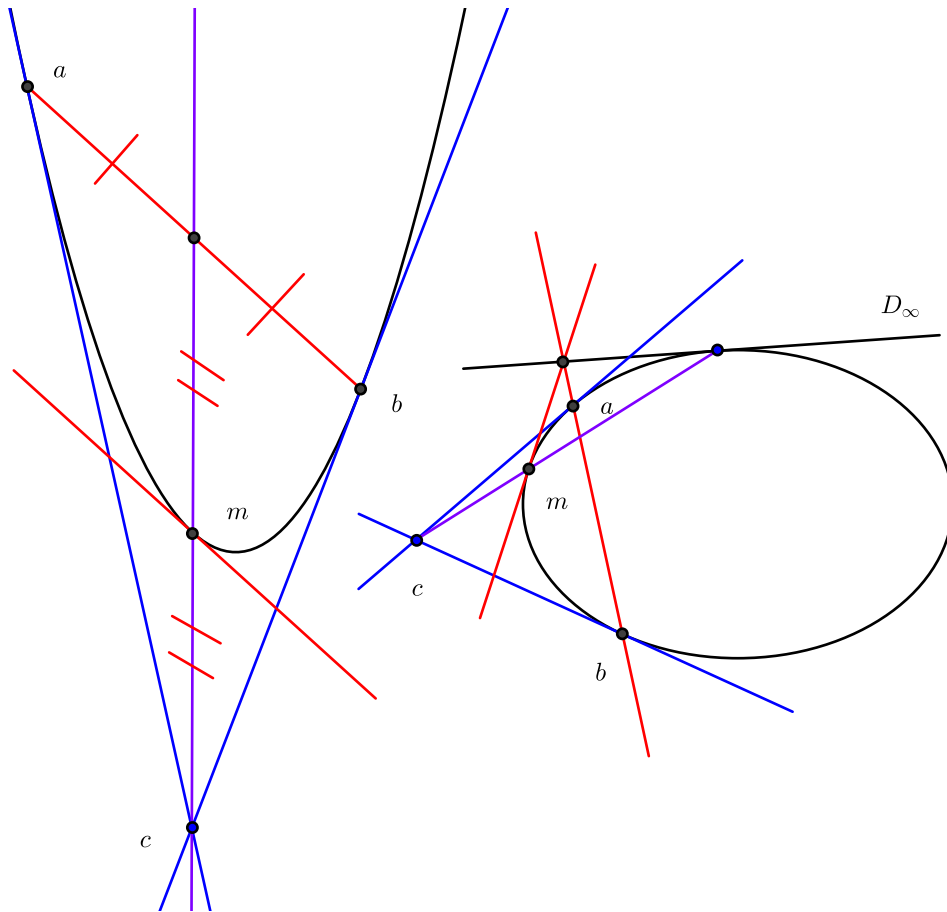


Figure 3.3

Propriétés d'Archimède sur les paraboles

**3.6.1. Proposition.** *L'application  $\pi_a$  est une bijection de  $a^*$  sur  $\Gamma$  et muni  $\Gamma$  d'une structure de droite projective. Si  $b$  est un autre point de  $\Gamma$  alors  $\pi_b^{-1} \circ \pi_a$  est une homographie de  $a^*$  sur  $b^*$ .*

*Remarque :* ainsi la structure de droite projective sur  $\Gamma$  est intrinsèque et ne dépend pas du point  $a$  choisi.

*Démonstration.* On se donne un repère projectif tel que  $a = (1 : 0 : 0)$ ,  $b = (0 : 1 : 0)$  avec  $c = (0 : 0 : 1)$  appartenant à  $\Gamma$ . L'équation de la conique est alors de la forme

$$\alpha_1 xy + \alpha_2 xz + \alpha_3 yz = 0.$$



Une droite de  $a^*$  d'équation  $y - \alpha t = 0$  avec  $\alpha \in \mathbb{P}^1(K)$  recoupe  $\Gamma$  en un point  $(u : v : w)$  tel que

$$\frac{u}{w} = -\frac{\alpha_3 \alpha}{\alpha_1 \alpha + \alpha_2}, \quad \frac{v}{w} = \alpha$$

autrement dit les coordonnées de  $\pi_a(D)$  sont des fonctions rationnelles de la pente  $\alpha$  de  $D$ .

De même la droite de  $b^*$  d'équation  $z - \alpha' y = 0$  passe par  $(u : v : w)$  si et seulement si on a

$$\frac{v}{w} = -\frac{\alpha_2 \alpha'}{\alpha_1 \alpha' + \alpha_3}, \quad \frac{u}{w} = \alpha'$$

ce qui donne  $\alpha' = -\frac{\alpha_3 \alpha}{\alpha_1 \alpha + \alpha_2}$  ce qui est bien une homographie.  $\square$

*Remarque :* on aurait pu utiliser plus directement le théorème III-3.1.8.

**3.6.2. Corollaire.** *Soient  $a, b, c, d \in \Gamma$  et  $m \in \Gamma$ , alors le birapport des droites  $(ma)$ ,  $(mb)$ ,  $(mc)$ ,  $(md)$  dans  $m^*$  est indépendant du point  $m$ ; on l'appelle birapport des quatre points de  $\Gamma$  et on le note  $[a, b, c, d]$ .*

**3.6.3. Corollaire.** *Le groupe  $G$  des bijections de  $\Gamma$  qui conservent le birapport est isomorphe au groupe  $PGL(2, K)$  des homographies d'une droite projective.*

*Démonstration.* On choisit  $m \in \Gamma$ ; l'application  $g \mapsto \pi_m^{-1} g \pi_m$  est une injection de  $G$  sur le groupe des bijections de  $m^*$  qui conservent le birapport, i.e.  $PGL(2, K)$ . Réciproquement on a une injection  $f \mapsto \pi_m f \pi_m^{-1}$  de  $PGL(2, K)$  dans  $G$  inverse de l'injection précédente, d'où le résultat.  $\square$

**3.6.4. Corollaire.** *Soit  $\Gamma$  une conique propre non vide et soient  $A, B, C, D$  quatre tangentes à  $\Gamma$ . Pour  $M$  une tangente à  $\Gamma$ , on note  $a, b, c, d$  ses intersections respectives avec  $M$ , alors le birapport  $[m_a, m_b, m_c, m_d]$  est indépendant du choix de  $M$  et est égal au birapport  $[a, b, c, d]$  des points de contact de  $A, B, C, D$  avec  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* On applique ce qui précède à la conique duale  $q^*$ , ce qui permet de définir le birapport des quatre tangentes à l'aide d'un point  $M \in \Gamma^*$ . En ce qui concerne l'égalité avec  $[a, b, c, d]$ , il suffit de noter que l'application  $\Gamma \rightarrow \Gamma^*$  qui à  $a \in \Gamma$  associe sa tangente, est la restriction à  $\Gamma$  de l'homographie  $a \mapsto a^\perp$ .  $\square$

**3.6.5. Définition.** Le corollaire précédent permet de définir le birapport de quatre tangentes à  $\Gamma$ .

**3.6.6. Théorème. (de Pascal)**

Soit  $\Gamma$  une conique propre non vide et soient  $a, b, c, a', b', c'$  six points distincts de  $\Gamma$ . On appelle respectivement  $u, v, w$  les points d'intersection  $(bc') \cap (b'c)$ ,  $(ca') \cap (c'a)$  et  $(ab') \cap (a'b)$ . Alors  $u, v, w$  sont alignés.

*Remarque :* il s'agit du théorème de Pappus dans lequel on remplace la conique dégénérée de deux droites par une conique propre.

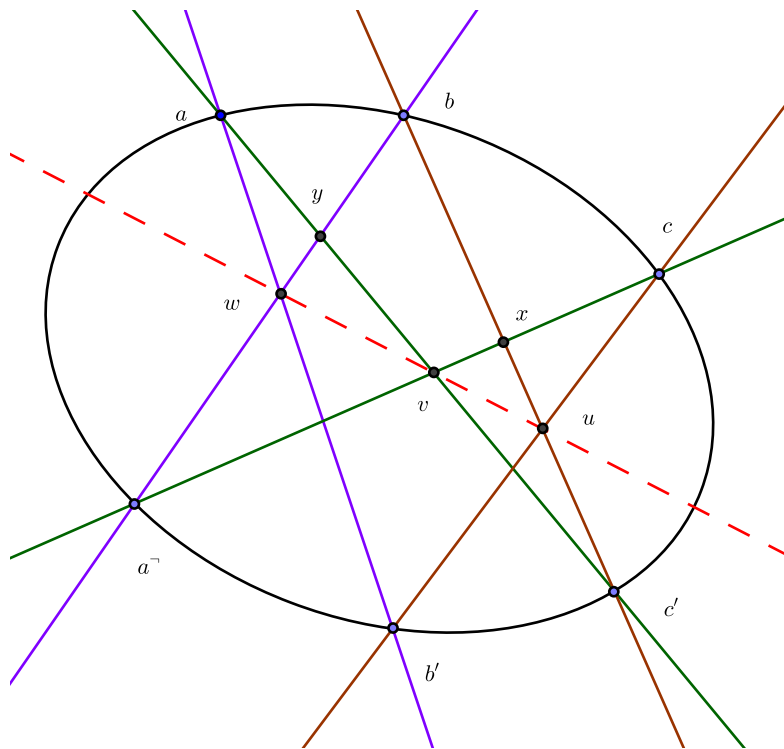


Figure 3.4  
Le théorème de Pascal

*Démonstration.* Appelons  $x$  (resp.  $y$ ) le point d'intersection de  $(a'c) \cap (bc')$  (resp.  $(a'b) \cap (ac')$ ). On considère la perspective  $p_v$  de centre  $v$  de  $(bc')$  sur  $(a'b)$  : elle envoie  $b, x, c'$  sur  $b, a', y$ . Les points  $u, v, w$  sont alignés si cette perspective envoie aussi  $u$  sur  $w$ . Pour voir cela il suffit de montrer l'égalité de birapports  $[b, c', x, u] = [b, y, a', w]$ . Mais par incidence on a  $[b, c', x, u] = [(cd), (cc'), (cx), (cu)]$  et par définition du birapport sur  $\Gamma$ , ce birapport est encore égal à  $[b, c', a', b']$  ou encore à  $[(ab), (ac'), (aa'), (ab')]$  c'est à dire en coupant ces droites par  $(a'b)$  à  $[b, y, a', w]$ .  $\square$

*Remarque :* le théorème de Pascal vaut encore si deux ou plus des points de l'hexagone sont confondus à condition de remplacer la droite que les joint par la tangente.

**3.6.7. Théorème. (de Frégier)**

Soient  $\Gamma$  une conique irréductible et  $f$  un point du plan non situé sur  $\Gamma$  ; l'application  $j$  qui à tout point  $m$  de  $\Gamma$  fait correspondre celui où  $(fm)$  recoupe  $\Gamma$  est une involution sur  $\Gamma$ . Réciproquement toute involution sur  $\Gamma$  est de cette forme.

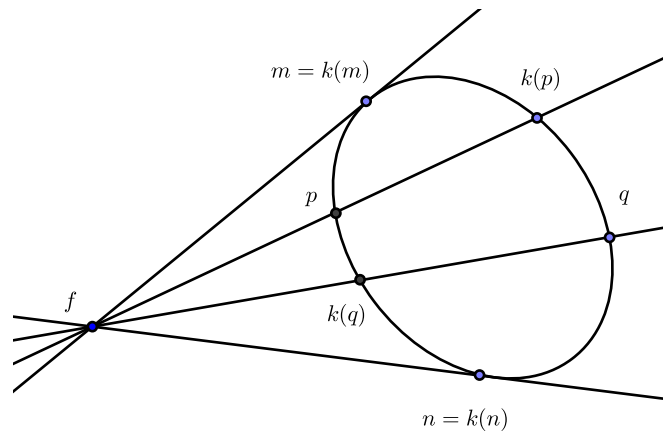


Figure 3.5  
Involutions et points de Frégier

*Démonstration.* Dans le sens direct il suffit de remarquer que  $j$  est une application rationnelle avec  $j^2 = 1$  et d'invoquer III-3.1.8. Réciproquement si  $k$  est une involution sur  $\Gamma$ , on prend deux points  $p, q$  non homologues sur  $\Gamma$  et on pose  $f = (pk(p)) \cap (qk(q))$ . L'involution définie par le point  $f$  a deux couples de points homologues en commun avec  $k$  et coïncide donc avec  $k$ . □

**3.6.8. Définition.** Le point  $f$  du théorème précédent s'appelle *le point de Frégier* de l'involution  $j$ .

**3.6.9. Proposition.** Soient  $\Gamma$  une conique irréductible,  $D$  une droite,  $u, v$  ses points communs avec  $\Gamma$  et  $a, b, a', b'$  des points de  $\Gamma$ . Il existe alors une homographie  $h$  sur  $\Gamma$  de points fixes  $u$  et  $v$  telle que  $h(a) = a'$  et  $h(b) = b'$  si et seulement si  $(ab')$  et  $(ba')$  se coupent sur  $D$ .

*Démonstration.* Pour tout point  $m$  de  $\Gamma$ , notons  $p = (ma') \cap D$  et  $m' = (ap) \cap \Gamma$ . On considère alors l'application  $h$  définie par  $m' = h(m)$ ; elle est

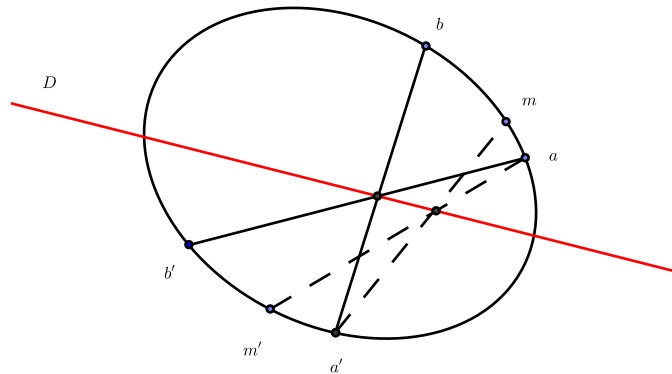


Figure 3.6  
Axe d'une homographie

rationnelle et admet une application réciproque qui l'est aussi de sorte que d'après III-3.1.8, c'est une homographie. On a  $h(a) = a'$  et  $m$  est fixe par  $h$  si et seulement s'il est commun à  $\Gamma$  et  $D$ . Si  $(ab')$  et  $(ba')$  se coupent sur  $D$ , on a évidemment  $h(b) = b'$ . La réciproque est vraie car une homographie est déterminée par ses valeurs en  $u, v$  et  $a$ .  $\square$

En utilisant la proposition précédente, on obtient une nouvelle preuve du théorème de Pascal que nous énonçons à présent sous une forme distincte de Pappus.

**3.6.10. Théorème. (de Pascal)**

On considère 6 points, 1, 2, 3, 4, 5, 6 d'une conique irréductible  $\Gamma$ . Alors les points  $i = (12) \cap (45)$ ,  $j = (23) \cap (56)$  et  $k = (34) \cap (61)$  sont alignés.

*Démonstration.* Soient  $u$  et  $v$  les points communs à  $\Gamma$  et à  $D = (ij)$ ; d'après la proposition précédente, soit  $h$  l'homographie sur  $\Gamma$  de points fixes  $u$  et  $v$ , telle que  $h(2) = 5$ . Alors  $h(1) = 4$  et  $h(3) = 6$ . En utilisant la proposition dans l'autre sens, on voit que  $(16)$  et  $(34)$  se coupent sur  $D$  et donc  $i, j, k$  sont alignés.  $\square$

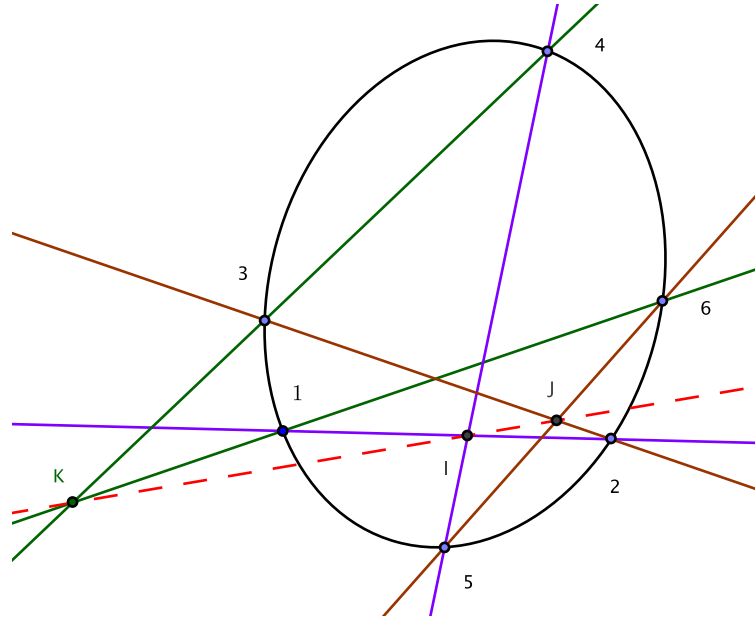


Figure 3.7

*Le théorème de Pascal via l'axe d'une homographie*

### 3.7. Groupe d'une conique

Le groupe  $PGL(E)$  des homographies du plan opère sur l'espace  $\mathbb{P}(Q)$  des coniques. On a vu que les coniques propres non vides forment une seule orbite. Par ailleurs on sait que le stabilisateur d'une conique propre non vide  $q$ , i.e. les applications linéaires  $u \in GL(E)$  qui transforment la forme  $q$  en une forme proportionnelle  $q \circ u^{-1} = \lambda q$ , est le groupe des similitudes de  $q$  noté  $GO(q)$  et donc en projectif le stabilisateur de  $q$  est  $PGO(q)$ . Ce groupe est appelé le groupe de la conique  $q$  lequel est aussi isomorphe à  $PO(q)$ .

*Remarque :* dans le cas des coniques propres non vides, on a vu que  $\Gamma$  détermine  $q$  de sorte que  $PGO(q)$  est aussi le sous-groupe de  $PGL(E)$  qui conserve  $\Gamma$ . Notons enfin que comme  $-\text{Id}_E$  n'est pas dans  $O^+(E)$  alors  $PO(q)$  est isomorphe à  $O^+(E)$  et donc au groupe de la conique.

**3.7.1. Proposition.** *Soient  $\Gamma = V(q)$  une conique propre non vide et  $u \in PO(q)$ . La restriction de  $u$  à  $\Gamma$  est une bijection de  $\Gamma$  qui conserve le birapport.*

*Démonstration.* Soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts de  $\Gamma$  et  $m$  un point quelconque de  $\Gamma$ . Par définition on a  $[a, b, c, d] = [(ma), (mb), (mc), (md)]$ .

Soient  $a', b', c', d'$  les images de  $a, b, c, d$  par  $u$ ; comme  $u \in PO(q)$ , ces points appartiennent à  $\Gamma$  et comme  $u$  induit une homographie  $m^*$  sur  $(m')^*$ , on a  $[(ma), (mb), (mc), (md)] = [(m'a'), (m'b'), (m'c'), (m'd')] = [a', b', c', d']$  d'où le résultat.  $\square$

**3.7.2. Théorème.** *L'application  $\Phi$  qui à  $u \in PO(q)$  associe sa restriction à  $\Gamma$  induit un isomorphisme de  $PO(q)$  sur le groupe  $PGL(2, K)$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition précédente  $\Phi$  est un morphisme de  $PO(q)$  sur le groupe  $G$  des bijections de  $\Gamma$  qui conservent le birapport lequel est isomorphe à  $PGL(2, K)$ . Ce morphisme est injectif car la conique contient au moins quatre points distincts qui forment un repère. Il est surjectif car un élément de  $G$  est déterminé par l'image de trois points de  $\Gamma$  et que  $PO(q)$  est triplement transitif sur  $\Gamma$ . En effet pour  $a, b, d$  (resp.  $a', b', d'$ ) des points distincts de  $\Gamma$ , on note  $c$  (resp.  $c'$ ) le point d'intersection des tangentes à  $\Gamma$  en  $a$  et  $b$  (resp.  $a'$  et  $b'$ ). Or  $(a, b, c, d)$  et  $(a', b', c', d')$  sont des repères et il existe donc une homographie  $u$  qui envoie respectivement  $a, b, c, d$  sur  $a', b', c', d'$  et l'image de  $\Gamma$  par  $u$  est une conique  $\Gamma'$  passant par  $a', b', d'$  et tangente à  $(c'a')$  et  $(c'b')$  en  $a'$  et  $b'$ , c'est donc  $\Gamma$  et donc  $u \in PO(q)$ .  $\square$

*Remarque :* on peut ainsi considérer les éléments de  $PO(q)$  comme des bijections de  $\Gamma$ . En particulier tout élément de  $PO(q)$  est produit d'au plus deux involutions, résultat classique de théorie des groupes.

**3.7.3. Proposition.** *Soit  $V(q)$  une conique propre non vide et soit  $\sigma_D \in O(q)$  le renversement d'axe la droite vectorielle  $D$ . Alors l'involution  $\bar{\sigma}_D \in PO(q)$  a pour point de Frégier le point  $d = p(D)$  et pour axe la droite  $p(D^\perp)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de prouver la première assertion. Or si  $x$  est un vecteur isotrope, le vecteur  $x + \sigma_D(x)$  est invariant par  $\sigma_D$ , donc est dans  $D$ . Projectivement cela signifie que  $\bar{x}$ ,  $\overline{\sigma_D(x)}$  et  $d$  sont alignés. Appliquant cela à deux paires de vecteurs isotropes échangés par  $\sigma_D$ , on voit que  $d$  est le point de Frégier de  $\bar{\sigma}_D$ .  $\square$

### 3.8. Retour sur les homographies d'une droite sur une autre

Les perspectives entre deux droites projectives ont souvent été utilisées dans les preuves des énoncés précédents. Pour les homographies qui ne sont pas des perspectives, la définition du birapport sur une conique permet de donner une représentation commode et efficace de celles-ci.

**3.8.1. Proposition. (Homographie associée à deux tangentes d'une conique)**

Soit  $\Gamma$  une conique propre non vide et soient  $D, D'$  deux tangentes à  $\Gamma$  en des points  $p$  et  $p'$  distincts et se coupant en  $e$ . On considère l'application  $f : D \rightarrow D$  définie comme suit :

- si  $m \in D$  est distincts de  $p$  et  $e$ , on lui associe le point d'intersection de  $D'$  avec la deuxième tangente à  $\Gamma$  passant par  $m$  ;
- si  $m = p$  on lui associe  $e$  ;
- si  $m = e$  on lui associe  $p'$ .

Alors  $f$  est une homographie que l'on notera sous la forme  $f_{D,D',\Gamma}$ .

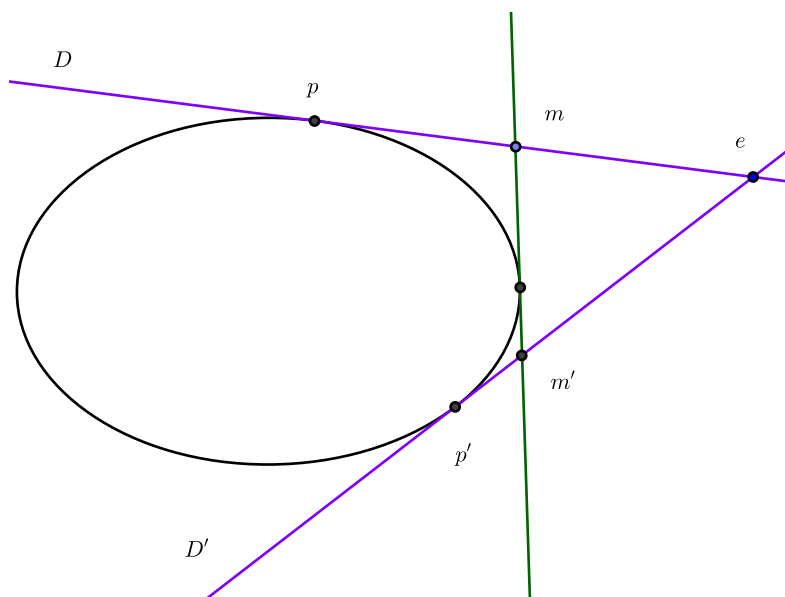


Figure 3.8

Homographie associée à deux tangentes à une conique

*Démonstration.* L'application polaire  $m \mapsto m^\perp =: \Delta$  de  $\mathbb{P}(E)$  dans  $\mathbb{P}(E^*)$  est une homographie ; on la restreint à  $D$  ce qui fournit une homographie de  $D$  sur  $p^*$ . Dans cette homographie le point  $p$  donne  $D$  et le point  $e$  donne  $(pp')$ . On considère ensuite l'application de  $p^*$  sur  $\Gamma$  qui associe à  $\Delta$  le point d'intersection  $q$  de  $\Delta$  et  $\Gamma$  distinct de  $p$  sauf si  $\Delta = D$  auquel cas on lui associe  $p$ . On note que l'image de  $(pp')$  est  $p'$ . Cette transformation conserve le birapport, par définition du birapport sur la conique. On associe ensuite au point  $q$  de  $\Gamma$  sa tangente  $q^\perp = (mq)$ . Cette application conserve le birapport et son image est  $\Gamma^*$ , conique duale de  $\Gamma$ , le point  $p$  donnant  $D$  et le point  $p'$ ,  $D'$ . Enfin on associe à une tangente  $T$  son point

d'intersection avec  $D'$  (ou  $p'$  si  $T = D'$ ). Par définition du birapport de quatre tangentes, cette application conserve le birapport et la composée de toutes ces applications n'est autre que  $f$  qui conserve donc le birapport et est donc une homographie.  $\square$

*Remarque :* on peut aussi procéder par un calcul en utilisant un repère adaptée et utiliser le théorème III-3.1.8.

Nous allons montrer que toutes les homographies sont soit des perspectives soit du type précédent.

**3.8.2. Lemme.** *Soient  $D, D'$  deux droites distinctes se coupant en  $e$  et soient  $p, a \in D$  et  $p', a' \in D'$  des points distincts et distincts de  $e$ . Il existe alors une unique conique  $\Gamma$  propre qui est tangente à  $D$  en  $p$ , à  $D'$  en  $p'$  et à  $(aa')$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $p = (1, 0, 0)$ ,  $p' = (0, 1, 0)$  et  $e = (0, 0, 1)$  de sorte que  $D$  et  $D'$  sont respectivement d'équations  $Y = 0$  et  $X = 0$ . La droite  $(aa')$  admet alors pour équation  $uX + vY + wT = 0$  avec  $u, v, w$  non nuls et on vérifie que l'unique conique convenable a pour équation  $4uvXY - w^2T^2 = 0$ .  $\square$

**3.8.3. Proposition.** *Soient  $D, D'$  deux droites distinctes de  $\mathbb{P}(E)$  et soit  $f : D \rightarrow D'$  une homographie. Alors  $f$  est soit une perspective soit une application  $f_{D, D', \Gamma}$  du type précédent.*

*Démonstration.* Supposons que  $f$  n'est pas une perspective; on appelle  $e = D \cap D'$  de sorte que d'après ??,  $f(e) \neq e$  et on pose  $f(e) = p'$ ,  $f^{-1}(e) = p$ . Soit  $a \in D$  distinct de  $e$  et  $p$  et posons  $a' = f(a)$  qui est donc nécessairement distinct de  $e$  et  $p'$ . D'après le lemme précédent, il existe une conique propre  $\Gamma$  tangente à  $D$  en  $p$ , à  $D'$  en  $p'$  et à  $(aa')$ . L'homographie  $f_{D, D', \Gamma}$  coïncide avec  $f$  en  $e, p, a$ , elle lui est donc égale.  $\square$

Terminons ce paragraphe par l'énoncé suivant entre deux droites projectives de  $\mathbb{P}(E^*)$ .

**3.8.4. Théorème.** *Soient dans le plan projectif,  $a^*$  et  $b^*$  les faisceaux de droites de points bases  $a$  et  $b$  et soit une homographie de  $a^*$  sur  $b^*$ . Lorsque  $D$  parcourt  $a^*$ , le point  $D \cap h(D)$  parcourt une conique  $\Gamma$  qui passe par  $a$  et  $b$ . Si  $h((ab)) = (ba)$ , alors  $\Gamma$  est décomposée en  $(ab)$  et une autre droite, sinon  $\Gamma$  est irréductible.*

*Démonstration.* Si  $\Gamma$  est une conique passant par  $a$  et  $b$  d'équation  $pz^2 + qxy + ryz + sxz = 0$  alors l'homographie qui lui est associée est  $t' =$



$-(rt + p)/(qt + s)$ . Comme toute homographie est de cette forme avec  $pq - rs \neq 0$ , le résultat en découle. La conique ne peut être décomposée en une droite par  $a$  et une droite par  $b$  sinon  $pq - rs = 0$ . Elle ne peut donc être décomposée qu'en  $(ab)$  d'équation  $z = 0$  et une autre droite ce qui veut dire  $q = 0$ . Alors  $\infty$  est stable par l'homographie ce qui signifie que  $(ab)$  est fixe.  $\square$

### 3.9. Le théorème de Newton

**3.9.1. Proposition.** *Soient  $D, D'$  deux droites distinctes du plan projectif et soit  $f : D \rightarrow D'$  une homographie. Pour  $a, b, c, d \in D$ , on note  $a', b', c', d'$  leurs images respectives par  $f$ . On note  $\alpha, \beta, \gamma$  les intersections de  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  avec  $(dd')$  et on considère les points  $i, j, k$  de  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  vérifiant  $[a, a', \alpha, i] = [b, b', \beta, j] = [c, c', \gamma, k] = r$  où  $r \in \mathbb{P}^1(K)$ . Alors les points  $i, j, k$  sont alignés.*

*Démonstration.* Si  $f$  est une perspective alors  $\alpha, \beta, \gamma$  sont confondus et  $i, j, k$  sont alignés sur  $(ei)$  où  $e$  désigne  $D \cap D'$ . Sinon on écrit  $f = f_{D, D', \Gamma}$ . Pour  $m \in D$  d'image  $m' \in D'$ , soit  $\mu$  le point d'intersection  $(mm') \cap (dd')$ . Soit  $\Delta$  la tangente à  $\Gamma$  définie par  $[D, D', (dd'), \Delta] = r$ ; d'après la définition du birapport de quatre tangentes, le lieu quand  $m$  varie sur  $D$  du point  $i$  de  $(mm')$  défini par  $[m, m', \mu, i] = r$  est la droite  $\Delta$  et le résultat en découle.  $\square$

*Remarque :* en prenant  $(dd')$  comme droite à l'infini et  $r = -1$ , on en déduit la version affine suivante.

**3.9.2. Corollaire.** *Soient  $D, D'$  deux droites distinctes du plan affine et  $a, b, c \in D$ ,  $(a', b', c') \in D'$ . On suppose qu'on a la relation  $\frac{\overline{a'c'}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{ab}}$ , alors que les milieux  $i, j, k$  de  $[aa']$ ,  $[bb']$  et  $[cc']$  sont alignés.*

### 3.9.3. Théorème. (de Newton)

*Soit  $a, b, c, d$  un repère de  $\mathbb{P}(E)$  et soient  $e$  et  $f$  les intersections de  $(ab) \cap (cd)$  et  $(ad) \cap (bc)$ . Soit  $\Omega$  une droite et  $p, q, r$  les intersections de  $\Omega$  avec  $(ca)$ ,  $(bd)$  et  $(ef)$ . On appelle  $i, j, k$  les conjugués harmoniques de  $p, q, r$  par rapport à  $\{c, a\}$ ,  $\{b, d\}$  et  $\{e, f\}$ . Alors  $i, j, k$  sont alignés.*

*Remarque :* la variante affine usuelle s'obtient en prenant pour  $\Omega$  la droite de l'infini. En notant que les points  $a, b, c, d, e, f$  jouent le même rôle, on voit que le théorème résulte du suivant.

**3.9.4. Théorème.** Soit  $(a, b, c, d)$  un repère de  $\mathbb{P}(E)$  et soit  $\Gamma$  une conique propre tangente à  $(ab)$ ,  $(bc)$ ,  $(cd)$  et  $(da)$ . Soit  $\Omega$  une droite et  $o$  son pôle par rapport à  $\Gamma$ . On appelle  $p$  et  $q$  les intersections de  $(ac)$  et  $(bd)$  avec  $\Omega$  et  $i, j$  les conjugués harmonique de  $p, q$  par rapport à  $c, a$  et  $b, d$ . Alors les points  $o, i, j$  sont alignés.

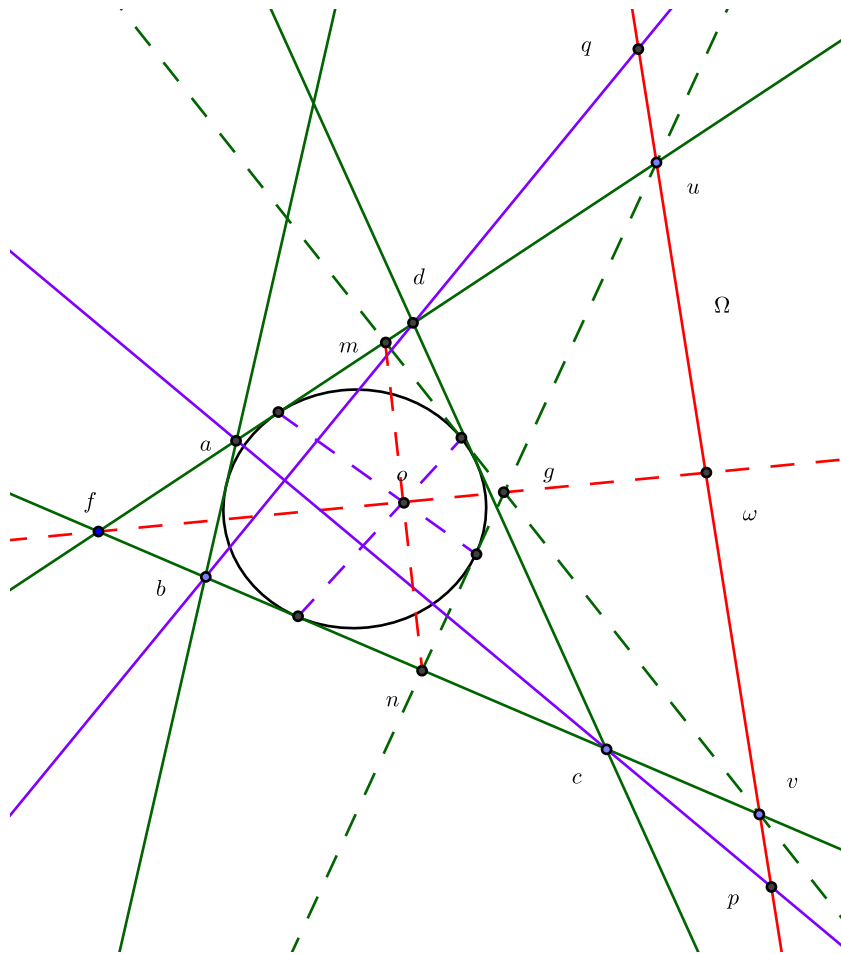


Figure 3.9  
Le théorème de Newton

*Démonstration.* Avec les notations de la figure IV-3.9, soit  $f = (ad) \cap (bc)$ ,  $\omega = \Omega \cap (of)$  et  $g$  le point de  $(ow)$  défini par  $[o, \omega, f, g] = -1$ . On note  $u$  (resp.  $v$ ) l'intersection de  $\Omega$  et  $(ad)$  (resp.  $(bc)$ ). On note encore  $m = (ad) \cap (gv)$  et  $n = (bc) \cap (gu)$ .

**3.9.5. Lemme.** *Les droites  $(gu)$  et  $(gv)$  sont tangentes à  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* On considère l'involution  $\tau$  de point de Frégier  $o$  et d'axe  $\Omega$  vue comme une involution du plan tout entier. Elle laisse stable  $\Gamma$  globalement, fixe  $o$  et les points de  $\Omega$ . En particulier on a  $\tau(u) = u$ . La droite  $(o\omega)$  est stable par  $\tau$  et comme on a  $[o, \omega, f, g] = -1$ , on a  $\tau(f) = g$ . Comme  $(fu)$  est tangente à  $\Gamma$ , il en est de même de son image  $(gu)$  par  $\tau$ . Le raisonnement est identique pour  $(gv)$ .  $\square$

*Remarque :*  $\tau$  échange aussi  $m$  et  $n$  ce qui montre qu'ils sont alignés avec  $o$ , car les droites passant par  $o$  sont stables par  $\tau$ . Si  $s$  est l'intersection de  $\Omega$  et de  $(mn)$ , on a  $[m, n, o, s] = -1$ .

Considérons  $\phi = f_{(ad), (bc), \Gamma}$ ; on a  $\phi(d) = c$ ,  $\phi(a) = b$  et en vertu du lemme précédent,  $\phi(u) = n$  et  $\phi(m) = v$ . On considère ensuite l'involution  $\sigma$  de  $(bc)$  qui échange  $b$  et  $c$  et envoie  $v$  sur  $n$ . Elle envoie aussi  $n$  sur  $v$  et la composée  $\sigma\phi$  envoie  $a$  sur  $c$ ,  $d$  sur  $b$ ,  $m$  sur  $n$  et  $u$  sur  $v$ . On conclut en utilisant la proposition IV-3.9.1 appliqué à la droite  $(uv) = \Omega$ . Elle coupe respectivement  $(ac)$  en  $p$ ,  $(bd)$  en  $q$  et  $(mn)$  en  $s$ . Les conjugués harmoniques de ces points par rapport à  $\{a, c\}$ ,  $\{b, d\}$  et  $\{m, n\}$  étant respectivement  $i, j, o$ , d'où le résultat.

### 3.10. Sur les coniques passant par 5 points

Nous avons vu qu'une conique du plan projectif est déterminé par 5 de ses points  $A_1, \dots, A_5$  en position générale. Dans le théorème de Pascal, le cas  $A_6 = A_5$ , permet de tracer la droite tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A_5$ . Posons  $M = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$  et considérons une droite variable  $\mathcal{D}$  passant par  $M$ ; on note  $A_{23}$  et  $A_{34}$  les intersection des  $(A_2A_3)$  et  $(A_3A_4)$  avec  $\mathcal{D}$  de sorte que  $(A_1A_{34}) \cap (A_5A_{23})$  appartient à la conique d'après la réciproque du théorème de Pascal. En faisant pivoter  $\mathcal{D}$  autour de  $M$ , le point ainsi construit décrit l'ellipse passant par  $A_1, \dots, A_5$ .

Montrons ensuite comment tracer sur cette conique  $\mathcal{C}$ , à la règle et au compas :

- (i) l'intersection d'une droite  $\mathcal{D}$  avec  $\mathcal{C}$ ;
- (ii) le centre et les axes;
- (iii) les foyers et directrices.

(i) Considérons tout d'abord le cas où  $\mathcal{D}$  passe par  $A_1$ ; on trace la droite  $\Delta$  passant par  $M$  et  $\mathcal{D} \cap (A_3A_4)$ . Le deuxième point de  $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$  s'obtient alors comme l'intersection de  $\mathcal{D}$  avec la droite passant par  $A_5$  et  $\Delta \cap (A_2A_3)$ .

*Dans le cas général* soit  $\mathcal{D} = (MN)$ ; on rappelle que la conique induit une homographie involutive sur  $\mathcal{D}$ , cf. la proposition IV-3.5.3. La construction géométrique de l'image  $M'$  de  $M \in \mathcal{D}$  est donnée à la figure IV-3.11.

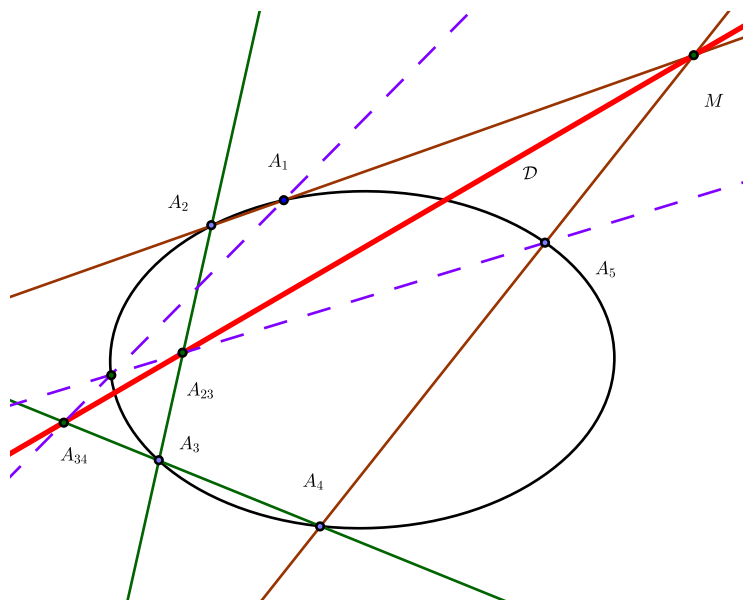


Figure 3.10

Construction points par points sur une conique

L'intersection de  $\mathcal{D} = (MN)$  avec  $\mathcal{C}$  seront alors les points fixes de cette involution sur  $\mathcal{D}$ ; pour la construire l'idée est de séparer les droites  $MM'$  et  $NN'$  confondues avec  $\mathcal{D}$ , via une inversion quelconque disons de centre  $O$  qui envoie  $\mathcal{D}$  sur un cercle  $\Gamma$  passant par  $O$  et de centre  $I$ . L'involution se lit alors sur  $\Gamma$  qui est une conique. D'après le théorème de Frégier, on note  $\Omega$  le point de Frégier de cette involution que l'on obtient à partir de deux points  $M, N$  et de leurs images  $M', N'$  comme  $\Omega = (MM') \cap (NN')$ . Les points  $B_1, B_2$  de  $\Gamma$  invariants par l'homographie induite par  $\mathcal{C}$ , sont ceux tels que  $(\Omega B_i)$  est tangente à  $\Gamma$  qui se construisent en prenant l'intersection de  $\Gamma$  avec le cercle de diamètre  $\Omega I$ ; cf. la figure IV-3.12. On renvoie aussi le lecteur à l'exercice ??.

(ii) Rappelons que le centre d'une conique projective est l'image de la droite infinie par la dualité induite par la conique; la symétrie centrale par rapport au centre conserve alors globalement la conique. Un diamètre est par définition une corde passant par le centre. Ainsi pour trouver le centre il suffit de savoir tracer des diamètres; l'idée est que dans le cas d'un cercle la médiatrice d'une corde passe par le centre. Ainsi pour deux cordes parallèles, leur médiatrice commune passe par l'intersection des côtés et des diagonales. Cette construction est conservée par affinité d'où la construction des diamètres donnée à la figure IV-3.13.

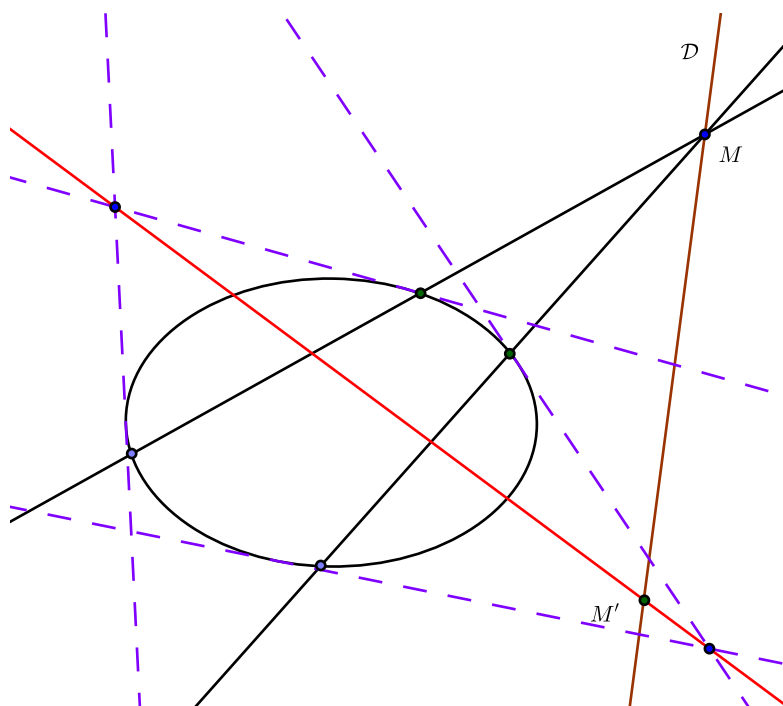


Figure 3.11

Dualité sur une droite induite par une conique

*Remarque* : selon la même idée, on peut aussi utiliser que si deux tangentes en  $A$  et  $B$  se coupent en  $M$  alors la droite qui passe par  $M$  et le milieu de  $[A, B]$  est un diamètre. On dira que le diamètre ainsi construit est *conjugué* à la droite  $D$ .

En ce qui concerne les axes, rappelons qu'un axe d'une conique *euclydienne* est une droite telle que la réflexion orthogonale par rapport à celle-ci, conserve globalement la conique. Autrement dit si  $M$  est un point de l'axe et de la conique, la tangente en  $M$  à la conique doit être orthogonale au rayon  $OM$  où  $O$  désigne le centre de la conique ; cette propriété caractérise l'intersection des axes avec la conique. Généralisant ce qui précède, on dit que *deux diamètres*  $[A, A']$  et  $[B, B']$  sont *conjugués* si les tangentes à  $C$  en  $A$  et  $B$  sont orthogonales.

*Remarque* : pour construire une paire de diamètre conjugué, on se donne deux droites  $D_1$  et  $D_2$  orthogonale, et on construit selon le procédé ci-dessus, les diamètres  $[A_1, B_1]$  et  $[A_2, B_2]$  conjugué respectivement à  $D_1$  et  $D_2$ . Par définition, ceux-ci sont des diamètres conjugué.

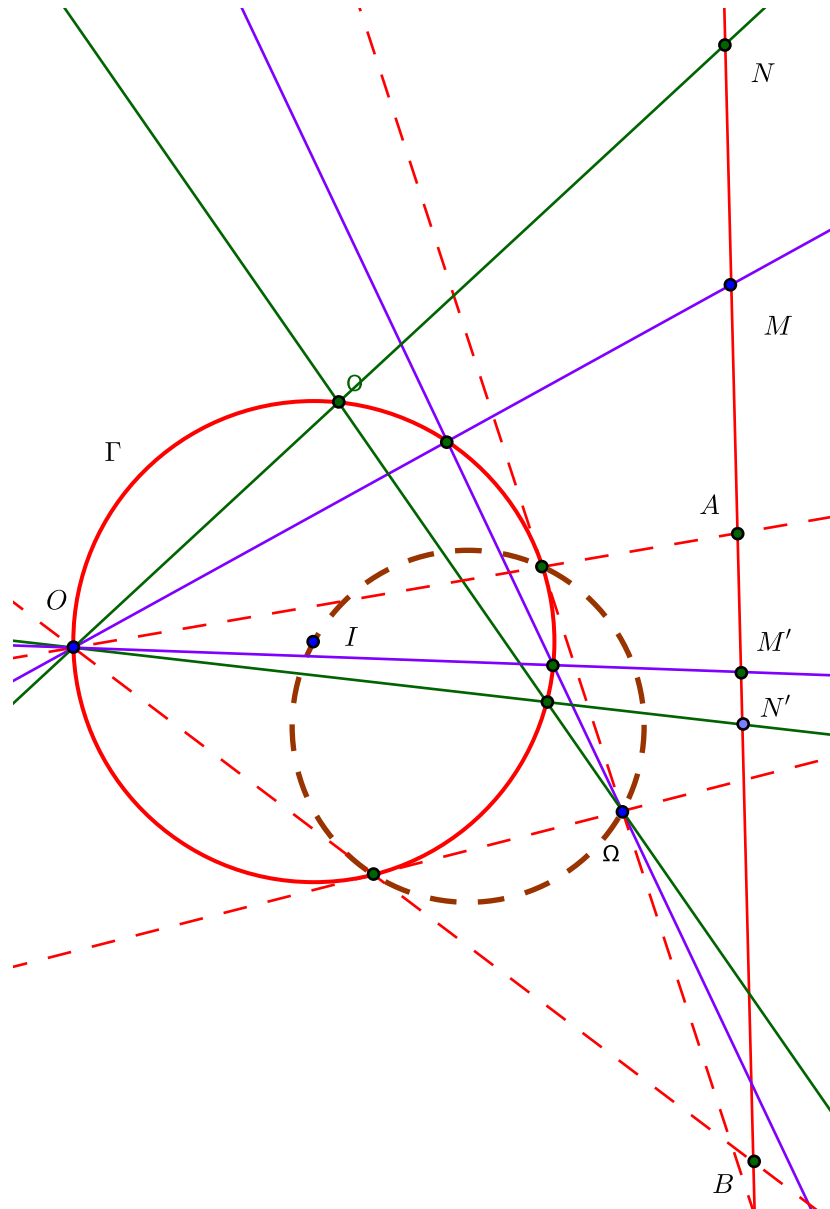


Figure 3.12  
 Construction de l'intersection d'une droite et d'une conique

La conjugaison des diamètres définit une homographie involutive sur les droites passant par  $O$ , donc sur son image par une inversion de centre

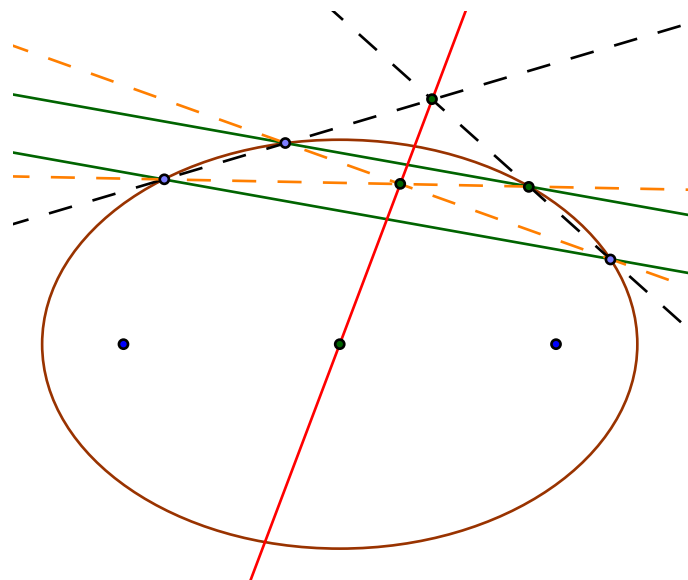


Figure 3.13

*Construction d'un diamètre d'une conique euclidienne*

$O$ , i.e. un cercle  $\Gamma$  de centre  $I$  et passant par  $O$  : on note  $\Omega$  le point de Fréger correspondant que l'on obtient à partir d'un couple de points et leurs images. Il s'agit alors de trouver les points qui avec leur images forment un triangle rectangle en  $O$  : ce sont les points d'intersection de  $\Omega I$  avec  $\Gamma$ , cf. la figure IV-3.14.

(iii) Connaissant les axes et leurs intersections avec la conique, il est aisé de placer les foyers et directrices : on a  $OF = \sqrt{a^2 - b^2}$  avec  $a = OA$  (resp.  $b = OB$ ) où  $A$  et  $B$  sont des points de la conique sur les petit et grand axes. Ainsi les foyers sont les points d'intersection du cercle centré en  $B$  et de rayon  $OA$ . En ce qui concerne les directrices ce sont les droites orthogonales au grand axe et passant par les points  $M$  du grand axe tels que  $OM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$  que l'on construit aussi aisément.

### 3.11. Perspective et photographie

Soit dans l'espace projectif  $H$  le plan projectif représentant la surface terrestre (ou du moins une des ses parties que l'on suppose plan) et soit un appareil photographique donc l'objectif est placé en un point  $m_1 \notin H$  ; la « plaque photographique » est représenté par un plan projectif  $H_1$ . L'appareil photo réalise alors une perspective  $g_1$  de centre  $m_1$  de  $H$  sur  $H_1$ .

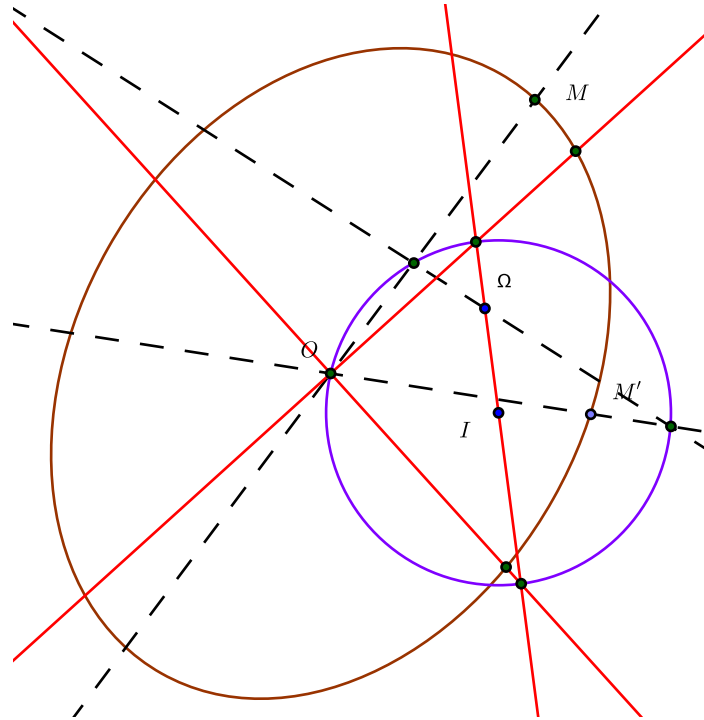


Figure 3.14

Construction des axes d'une conique euclidienne

Supposons qu'en fait le photographe se trouve dans un avion et qu'il prenne deux photos d'un point  $m_1$  et  $m_2$ ; on note  $H_1$  et  $H_2$  les plans projectifs associés. L'application  $g := g_2 \circ g_1^{-1} : H_1 \rightarrow H_2$  est alors une homographie. Si on repère 4 points non alignés de  $H$  (monuments, arbres...) qui forment donc un repère projectif de  $H$ , leurs images respectives dans  $H_1$  et  $H_2$  caractérisent l'homographie  $g$  de sorte que l'on peut « recoller » les deux photographies.

*Remarque :* la terre n'étant pas plate, une telle reconstruction est en fait plus complexe.

Considérons à présent le problème suivant qui peut avoir son utilité pour un apprenti détective en possession d'une photographie d'une ville depuis le domicile du coupable.

**3.11.1. Corollaire. (Position du photographe)**

*À partir d'une photo panoramique et du plan d'une ville, il est possible de déterminer le lieu d'où la photographie a été prise.*



*Démonstration.* On choisit sur la photo 5 lieux caractéristiques dans l'arrière plan, par exemple des bâtiments public, aisément repérables sur le plan de la ville que l'on désigne par les points  $a, b, c, d, e$  sur la carte ; sur la photo ces points sont devenus  $a', b', c', d', e'$ . Si on suppose que la ville est plane, l'appareil photo réalise une perspective entre le plan qui contient les bâtiments et la plaque photosensible, le centre de la perspective étant l'objectif situé en un point  $o$ .

Sur la photographie, puisqu'on a considéré des points à l'arrière plan,  $a', b', c', d'$  sont alignés sur la ligne d'horizon ce qui permet de calculer les birapports

$$\rho_1 = [a', b', c', d'] \text{ et } \rho_2 = [a', b', c', e'],$$

à partir des distances entre ces points. Comme les homographies conservent le birapport, on a donc

$$[(oa), (ob), (oc), (od)] = \rho_1 \text{ et } [(oa), (ob), (oc), (oe)] = \rho_2.$$

D'après la proposition IV-3.2.1  $O$  appartient à l'intersection des coniques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  passant respectivement par  $a, b, c, d$  et  $a, b, c, e$  et définie comme ligne de niveau des birapports

$$[(ma), (mb), (mc), (md)] = \rho_1 \text{ et } [(ma), (mb), (mc), (me)] = \rho_2.$$

Les coniques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ayant  $a, b, c$  en commun, le point  $o$  est donc leur quatrième point d'intersection.  $\square$

Algèbre et géométries

Boyer Pascal

12 septembre 2012 [8:55] Fichier:chap10 chapitre:IV

# Bibliographie

- [1] M. Alessandri. *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*. Dunod, 1999.
- [2] J.-M. Arnaudies. *Les 5 polyèdres réguliers de  $\mathbb{R}^3$  et leurs groupes*. CDU-SEDES, 1969.
- [3] J.-M. Arnaudies and J. Bertin. *Groupes, algèbres et géométrie tome 1*. Ellipses, 1993.
- [4] J.-M. Arnaudies and J. Bertin. *Groupes, algèbres et géométrie tome 2*. Ellipses, 1993.
- [5] J.-M. Arnaudies and J. Bertin. *Groupes, algèbres et géométrie tome 3*. Ellipses, 2000.
- [6] M. Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [7] Y. Benoist. *Pavages du plan. X-UPS*, 2001.
- [8] M. Berger. *Géométrie 1*. Nathan, 1990.
- [9] M. Berger. *Géométrie 2*. Nathan, 1990.
- [10] M. Berger. *Geometry Revealed*. Springer, 2009.
- [11] L. Bonaverio. Sur le nombre de sommets des polytopes entiers. *Images des Mathématiques*, pages 33–40, 2004.
- [12] Bouvier and Richard. *Groupes observation, théorie, pratique*. Hermann, 1976.
- [13] P. Boyer and J.-J. Risler. *Algèbre pour la licence 3*. Dunod, 2006.
- [14] J.-C. Carrega. *Théorie des corps la règle et le compas*. Hermann, 1981.
- [15] P. Cartier. Les arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie élémentaire. *Séminaire N. Bourbaki*, exp. 561 :1–22, 1980-1981.
- [16] A. Chenciner. *Courbes algébriques planes*. Paris 7, 1979.
- [17] A. Connes. A new proof of morley's theorem. <http://www.alainconnes.org/docs/morley.pdf>.
- [18] H. S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. Wiley Classics Library. 1989.
- [19] H. S. M. Coxeter. *The Beauty of Geometry : Twelve Essays*. Dover Books on Mathematis. 1999.
- [20] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer. *Geometry Revisited*. Mathematical Association of America Textbooks, 1967.

- [21] R. Deheuvels. *Formes quadratiques et groupes classiques*. Puf, 1981.
- [22] J.-D. Eiden. *Géométrie analytique classique*. Calvage & Mounet.
- [23] R. Goblot. *Algèbre commutative*. Masson, 1996.
- [24] A. Hraskó. Poncelet-type problems, an elementary approach. *Elemente der Mathematik*, 55 :45–62, 2000.
- [25] D. Hughes and F. Piper. *Projectives planes*, volume 6 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1972.
- [26] B. Ingrao. *Etude des coniques - Propriétés projectives, affines et métriques*. Calvage & Mounet, 2009.
- [27] Friedelmeyer J.-P. Puzzles et équidécomposabilité des polygones plans. *Bulletin de l'APMEP.*, 487 :223–234, 2010.
- [28] J. Lelong-Ferrand. *Les fondements de la géométrie*. Puf, 1985.
- [29] R. Mneimné. *Éléments de géométrie - Actions de groupes*. Cassini, 1997.
- [30] Neuman. *Groups and geometry*. Oxford University Press, 1994.
- [31] D. Perrin. *Géométrie projective plane et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes*. [http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livre\\_de\\_geometrie\\_projective.html](http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livre_de_geometrie_projective.html).
- [32] D. Perrin. *Géométrie algébrique - une introduction*. Paris : Inter Éditions CNRS, 1995.
- [33] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1998.
- [34] M. Reid. *Undergraduate commutative algebra*. London mathematical society, students text 29, 1995.
- [35] I.Kh. Sabitov. The volume of a polyhedron as a function of its metric. *Fundam. Prokl. Mat.*, 2(4) :1235–1246, 1996.
- [36] P. Samuel. *Géométrie projective*. Puf, 1986.
- [37] J.-M. Schlenker. La conjecture des soufflets, d'après I Sabitov. *Astérisque*, 294 :77–95, 2004.
- [38] I. Stewart. *Galois theory*. Chapan and Hall, 1975.
- [39] F. E. Su. The banach-tarski paradox. <http://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/banachtarski.pdf>.
- [40] S. Tabachnikov. *Geometry and Billiards*, volume 30 of *Student Mathematical Library*. 2005.
- [41] P. Tauvel. *Géométrie pour l'agrégation interne*. Masson, 1992.

# Notations

$\mathbb{K}$	corps commutatif	1
$\mathbb{R}$	corps des nombres réels	1
$a, b, c, d \dots$	points de l'espace affine	2
$\alpha, \beta, \gamma \dots$	scalaires de $\mathbb{K}$	2
$\vec{u}, \vec{v}, \dots$	vecteurs d'un espace vectoriel	2
$\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \dots$	des espaces affines	2
$a + \vec{u}$	action de $\vec{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$	2
$E = \vec{\mathcal{E}}, F = \vec{\mathcal{F}}, \dots$	espaces vectoriels	2
$b - a = \vec{ab}$	lien affine vectoriel	2
$GA(\mathcal{E})$	groupe affine	7
$GA_a(\mathcal{E})$	sous-groupe des bijections affines fixant le point $a$	7
$T(\mathcal{E})$	groupe des translations affines	7
$HT(\mathcal{E})$	groupe des homothéties-translations affines	7
$(a, \alpha)$	point pondéré	13
$(\alpha + \beta)g = \alpha a + \beta b$	barycentre	14
$(ab)$	droite passant par $a$ et $b$	15
$(\alpha:\beta:\gamma)$	coordonnées barycentriques homogènes	17
$\mathcal{D}$	une droite affine	24
$a'$	point de $(bc)$	24
$a_p, b_p, c_p$	traces d'un point $p$ sur les côtés d'un triangle	26
$A, B, C \dots$	points de l'espace affine euclidien	37
$a, b, c \dots$	distances	37
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	angles euclidiens	37
$O(E)$	groupe orthogonal de $E$	37
$Is(\mathcal{E})$	groupe des isométries affines	38
$GO^+(E)$	groupes des similitudes positives	39
$Sim(\mathcal{E})$	groupe des similitudes affines	39
$d(A, B)$	distance affine	40
$\mathfrak{S}(O, r)$	sphère de centre $O$ et de rayon $r$	40
$\mathcal{B}(O, r)$	boule de centre $O$ et de rayon $r$	40
$\mathfrak{S}$	une sphère	41
$p(A, \mathfrak{S})$	puissance de $A$ par rapport à $\mathfrak{S}$	41
$(\vec{AB}, \vec{AC})$	angle orienté de vecteurs	44
$\widehat{BAC}$	angle orienté de droites	44
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$	angles non orientés de droites	44
$\mathcal{C}$	cercle du plan affine	46
$a, b, c$	longueur des côtés d'un triangle	61
$p$	demi-périmètre	61

$S$	aire du triangle $ABC$	61
$R$	rayon du cercle circonscrit	61
$r$	rayon du cercle inscrit	64
$G$	isobarycentre	79
$O$	centre du cercle circonscrit	79
$H$	orthocentre	79
$\mathcal{C}_E$	cercle d'Euler	79
$\Omega$	centre du cercle d'Euler	79
$\mathbb{P}(E)$	espace projectif	91
$PGL(E)$	groupe projectif	94
$m^*$	faisceau des droites passant par $m$	99
$\hat{\mathbb{K}}$	droite projective	116
$[a, b, c, d]$	birapport	117
$\overline{xy}$	distance	117
$\Gamma$	une conique	131
$F, F'$	foyers d'une conique euclidienne	140
$e$	excentricité d'une conique euclidienne	140
$m^\perp$	polaire de $m$	167
$D^\perp$	pôle de $D$	168