

Boyer Pascal

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIES

Boyer Pascal

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIES

Boyer Pascal

Introduction

Le thème de ce cours est de faire de la géométrie du point de vue de l'algèbre. Expliquons cette problématique dans le cas de la géométrie plane. Il y a essentiellement deux façons de parler de géométrie.

- La première, la plus ancienne, est celle d'Euclide corrigée par Hilbert, et est définie axiomatiquement ; les axiomes partent de la définition du plan comme un ensemble de points muni de parties remarquables, les droites, avec des axiomes d'incidence et d'ordre. Il faut ensuite quelque chose qui assure l'homogénéité du plan (cas d'égalité, existence de symétries, transitivité sur les drapeaux...). Ces axiomatiques jusque là sont aussi valables pour les géométries non euclidiennes, ce n'est que lorsqu'on introduit l'axiome des parallèles (le fameux postulat d'Euclide) qu'elles se séparent.

- La seconde est celle qui passe par l'algèbre linéaire sur le corps des réels (ou un autre). Elle permet de définir à la fois les espaces affines, euclidiens ou non, les espaces projectifs, la géométrie euclidienne et les autres.

Evidemment c'est cette deuxième approche que nous allons suivre, notamment parce qu'elle place les nombres au coeur de la géométrie et plus pragmatiquement parce que pour un public au fait de l'algèbre linéaire, elle est beaucoup plus simple à manipuler.

Depuis le programme d'Erlangen, la géométrie est intimement liée à la théorie des groupes. Le programme d'Erlangen est la thèse de Felix Klein, soutenue en 1872 dans cette ville et arrive après l'explosion des géométries survenue dans la première moitié du dix-neuvième siècle avec la création de la géométrie projective développée par Poncelet, Plücker et d'autres, des géométries non euclidiennes avec Bolyai et Lobatchevski... Le principe unificateur, adopté par Klein, est qu'une géométrie consiste pour l'essentiel en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X , autrement dit d'un groupe opérant sur X . Les éléments de G sont les transformations permises dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie. Il s'agit par exemple des isométries affines pour la géométrie euclidienne plane, ou des transformations affines pour la géométrie affine, ou encore des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent X est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble \mathcal{D} de parties remarquables (les droites, les cercles) et les transformations de G conservent globalement \mathcal{D} . Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives...) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe.

Par exemple le théorème de Pappus qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement est un théorème projectif, tandis que Thalès qui utilise des parallèles est un résultat affine et Pythagore qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire en quelque sorte que chaque théorème appartient à une géométrie particulière dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et où il se démontre avec le plus de facilité. L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, frère jumeau de Pappus, illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord avec un cercle et se démontre dans le cadre euclidien en utilisant le théorème de l'angle inscrit. Cependant il s'énonce en toute généralité pour une conique et devient alors un théorème projectif ; dans ce cadre il se prouve très facilement via le birapport. Moralement c'est une fois débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles, qu'on peut dégager les ingrédients essentiels pour le prouver.

On peut aussi prendre l'exemple précédent dans l'autre sens ; c'est à dire appliquer une homographie pour transformer la conique en un cercle et le prouver dans le cadre de la géométrie euclidienne via le théorème de l'angle inscrit. Cela fait apparaître une technique très féconde qui consiste à appliquer des transformations de la géométrie considérée pour se

ramener à une situation plus simple (par exemple transformer un triangle quelconque en un triangle équilatéral, une conique en un cercle...) puis utiliser les outils d'une autre géométrie à cette nouvelle configuration.

La mise en oeuvre de cette technique repose essentiellement sur une des idées développées par Klein : toutes les géométries peuvent être obtenues à partir de la géométrie projective et d'une donnée supplémentaire. Le cas le plus simple est celui de la géométrie affine que l'on récupère comme complémentaire d'une droite choisie arbitrairement et qualifiée de droite à l'infini. Quand on est dans le plan affine, la géométrie euclidienne s'obtient en se donnant une forme quadratique définie positive sur le plan vectoriel associé ou encore en se donnant deux points imaginaires à l'infini : les fameux points cycliques.

Invariants d'une géométrie : comme une géométrie au sens du programme d'Erlangen est un groupe G opérant sur un ensemble, on s'intéresse à l'action de G sur certains ensemble construits à partir de X comme par exemple l'ensemble de ses points, de ses droites, de ses drapeaux ou de uplets de points, droites et drapeaux. On s'intéresse alors à la transitivité de cette action afin de transformer des figures en d'autres plus simples : ainsi l'action du groupe affine en dimension 2 est transitive sur les triangles du plan affine. Quand cette action n'est pas transitive, on essaie de paramétrer l'ensemble des orbites X/G .

Rappelons que deux points $x, x' \in X$ sont dans la même orbite sous G et on écrit $x \sim_G x'$, s'il existe $g \in G$ tel que $x' = g.x$ et la stratégie habituelle pour décrire X/G est la suivante :

- repérer des **invariants** de X sous G , autrement dit on construit une application $\Phi : X \rightarrow Y$ avec pour Y un espace « numérique », par exemple du type \mathbb{R}^n de sorte que deux éléments de la même orbite ont la même image par Φ .
- On veut que Φ soit un **système complet d'invariants**, ce qui signifie qu'on a l'équivalence

$$x \sim_G x' \Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(x'),$$

autrement dit deux éléments sont dans la même orbite si et seulement si leurs invariants, repérés par Φ , sont les mêmes.

— Il reste enfin à préciser l'image de Φ , i.e. déterminer quels sont les invariants possibles. Pour étudier X/G , on regarde sa dimension en tant que variété algébrique ; intuitivement la dimension d'un objet géométrique est le nombre de paramètres dont il dépend. En général la formule $\dim X/G = \dim X - \dim G$ est correcte et permet de savoir par avance le nombre d'invariants recherchés. Ainsi dans le cas où X est l'ensemble des triangles du plan euclidien, qui est donc de dimension 6, et G le groupe des isométries, de dimension 3, on a $\dim X/G = 3$ et on a donc besoin de trois paramètres pour décrire ce quotient qui vont être soit les longueurs des côtés soit les angles aux sommets et on retrouvera les cas d'isométries des triangles.

Relations entre les invariants : théorèmes : dans le cas où l'on construit un espace d'invariants Y de dimension $> \dim X - \dim G$, l'application de paramétrage Φ ne peut être injective, autrement dit les invariants ne sont pas indépendants et il y a des relations entre eux. Ainsi en géométrie euclidienne les longueurs des côtés d'un triangle et ses angles définissent 6 paramètres liés entre eux par les relations :

- les trois formules d'Al-Kashi,
- les deux égalités de la loi des sinus
- et le fait que la somme des angles est égale à π .

Comme on a trop de relations, celles-ci sont aussi liées ; il y a donc des relations entre les relations. Le coeur de la **théorie des invariants** consiste à formuler tout théorème de la géométrie en termes de relations entre des invariants et de donner une méthode systématique

pour construire tous ses invariants et les relations entre eux. On pourrait ainsi dire que la théorie des invariants marque la mort de la géométrie « élémentaire », la réduisant à trouver parmi l'infinité des théorèmes qu'elle peut formuler à volonté, ceux dont l'énoncé géométrique serait suffisamment simple et élégant.

Dans ce cours nous n'aborderons pas la théorie des invariants proprement dite ; nous nous limiterons à certaines descriptions des quotients X/G dans le cadre de la géométrie affine jusqu'à la géométrie hyperbolique en passant par les géométries euclidienne, inversive et sphérique. Nous chercherons plus particulièrement à mettre l'accent sur la technique dite de changement de géométrie : plus une géométrie est pauvre plus elle aura des transformations et moins elle aura d'invariants et de relations. Ainsi partant d'un problème géométrique, la première étape sera de le considérer dans une géométrie pauvre afin de lui appliquer une transformation le transportant dans une situation particulière plus simple quand on le regardera dans une autre géométrie plus riche ; celle-ci avec ses nombreux invariants et relations nous donnera plus d'outils pour attaquer le problème et le résoudre.

Le lecteur trouvera ainsi certains énoncés classiques qui reviendront comme des fils rouges et dont on donnera de multiples preuves selon qu'on les considère dans telle ou telle géométrie.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	5
I. Géométrie Affine	13
I.1. Généralités.....	13
I.1.1. Définition d'un espace affine.....	13
I.1.2. Applications affines.....	16
I.1.3. Le groupe affine.....	18
I.1.4. Rapport de proportionnalité et théorème de Thalès.....	19
I.1.5. Théorème de Ménélaüs.....	22
I.2. Coordonnées barycentriques.....	23
I.2.1. Barycentre d'une famille de points pondérés.....	23
I.2.2. relativement à un repère affine.....	25
I.2.3. Cas de la dimension 1 et 2.....	27
I.3. Barycentres dans le plan affine.....	28
I.3.1. Équations barycentriques de droites.....	28
I.3.2. Autour du triangle pédal.....	30
I.3.3. Théorème de Pappus.....	32
II. Géométrie affine euclidienne	35
II.1. Le groupe des isométries affines.....	35
II.1.1. Produit scalaire.....	36
II.1.2. Le groupe orthogonal.....	37
II.1.3. Groupe des similitudes.....	38
II.1.4. Isométries affines.....	38
II.1.5. Groupe des similitudes.....	39
II.2. Généralités.....	39
II.2.1. Sphères.....	39
II.2.2. Orthogonalité.....	40
II.2.3. Angles d'un plan vectoriel orienté.....	42
II.3. En dimension 2.....	44
II.3.1. Théorème de l'angle au centre.....	44
II.3.2. Axe radical et autres lignes de niveau.....	44
II.3.3. Relations trigonométriques dans le triangle.....	47

II.3.4. Triangles semblables.....	49
II.4. En dimension 3.....	50
II.4.1. Produit mixte et produit vectoriel.....	50
II.4.2. Angles.....	51
II.4.3. Formule d'Euler.....	52
II.5. Algébrisations.....	53
II.5.1. Nombres complexes.....	53
II.5.2. Quaternions.....	55
III. Géométrie Inversive et sphérique.....	61
III.1. Les inversions : définition et premières propriétés.....	62
III.1.1. Définition générale.....	62
III.1.2. Sur quelques relations métriques dans \mathbb{C}	63
III.1.3. Hyperplans et sphères.....	64
III.2. Présentation de la géométrie inversive.....	65
III.2.1. La projection stéréographique de la sphère de Riemann.....	65
III.2.2. Le groupe circulaire.....	66
III.3. Invariants conformes.....	68
III.3.1. L'invariant de Möbius.....	68
III.3.2. Invariant conforme de deux cercles de la sphère de Riemann.....	69
III.4. Géométrie sphérique.....	70
III.4.1. Métrique.....	70
III.4.2. Aire d'un triangle sphérique.....	71
III.4.3. Le groupe de la géométrie sphérique.....	72
III.5. Trigonométrie sphérique.....	73
III.5.1. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.....	73
III.5.2. Triangle polaire.....	74
III.5.3. Loi des sinus.....	75
III.5.4. Formulaire de trigonométrie sphérique.....	76
III.5.5. Cas d'égalité des triangles.....	76
III.5.6. Problèmes de navigation et triangulation.....	77
III.6. Cartographie.....	78
III.6.1. Impossibilité des cartes isométriques.....	79
III.6.2. Projections cylindriques.....	79
III.6.3. Projections azimutales.....	79
IV. Géométrie projective.....	81
Introduction.....	81
IV.1. Généralités.....	82
IV.1.1. Espaces et sous-espaces projectifs.....	82
IV.1.2. Repères projectifs.....	83
IV.1.3. Groupe projectif.....	84
IV.1.4. Liaison affine-projectif.....	85
IV.1.5. Dualité.....	86
IV.1.6. Incidences, perspectives et réfractions du plan projectif.....	88
IV.1.7. Preuves projectives des théorèmes de Desargues, Pappus, Brianchon.....	90
IV.2. Exemples.....	94

IV.2.1. Espaces projectifs d'hyperplans.....	94
IV.2.2. L'espace projectif des cercles : faisceaux de cercles.....	95
IV.3. Géométrie projective de dimension 1.....	98
IV.3.1. Birapport.....	98
IV.3.2. Homographies involutives.....	101
IV.3.3. Division harmonique.....	104
IV.3.4. Preuves projectives de Ménélaus et Céva.....	105

CHAPITRE I

GÉOMÉTRIE AFFINE

La géométrie affine enseignée dès le collège nous servira de modèle pour la construction et l'étude d'une géométrie. Nous commencerons par définir l'espace puis son groupe des transformations et enfin les invariants de la géométrie. Le groupe affine étant « gros » sa géométrie ne produit que peu d'invariants : en dimension 1 nous retrouvons le coefficient de proportionnalité de 3 points que l'on note habituellement de manière abusive sous la forme $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ alors que ni \overline{AB} ni \overline{AC} n'ont de sens. En dimension supérieure, cet invariant se généralise via la notion de barycentre et de coordonnées barycentriques relativement à une base affine. Nous développons ensuite le calcul barycentrique à travers tout d'abord les classiques théorèmes de Céva, Ménélaüs, Pappus et Desargues qui tournent tous autour de la figure centrale de la géométrie plane : le triangle. Moins classiquement, nous introduisons quelques constructions autour d'opérations barycentriques simples.

Dans ce chapitre \mathbb{K} désignera un corps commutatif éventuellement fini mais que le lecteur pourra dans une première lecture supposer égal au corps \mathbb{R} des nombres réels. On utilisera par ailleurs les conventions suivantes sur les notations :

- les lettres rondes comme $\mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{D} \dots$ désignerons des espaces ou des sous-espaces affines ;
- les lettres capitales droites $E, F, G, D \dots$ désignerons des espaces ou sous-espaces vectoriels ;
- les lettres minuscules $a, b, c, d \dots$ désignerons des points de l'espace affine ;
- les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ainsi que x, y, z, t désignerons des scalaires de \mathbb{K} ;
- les vecteurs d'un espace vectoriel seront systématiquement décorés d'une flèche, $\vec{u}, \vec{v} \dots$.

I.1. Généralités

I.1.1. Définition d'un espace affine. —

Définition I.1.1. — Un espace affine \mathcal{E} est un ensemble muni d'une action libre et transitive d'un espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$. La dimension de \mathcal{E} est celle de $\vec{\mathcal{E}}$.

Traduisons concrètement les différents termes de cette définition synthétique :

- une action : cela signifie que l'on a un morphisme de groupe ϕ de $\vec{\mathcal{E}}$ vers les permutations de \mathcal{E} qui à un vecteur \vec{u} associe la permutation $\phi(\vec{u})$ de \mathcal{E} .

Notation I.1.2. — Pour $a \in \mathcal{E}$, on note $\phi(\vec{u})(a)$ sous la forme $a + \vec{u}$.

Comme ϕ est un morphisme de groupe on a

$$a + (\vec{u} + \vec{v}) = (a + \vec{u}) + \vec{v}$$

relation dite de Chasles ;

- libre : $a + \vec{u} = a$ si et seulement si \vec{u} est le vecteur nul ;
- transitive : pour tout $a, b \in \mathcal{E}$, il existe $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ tel que $b = a + \vec{u}$.

Notation I.1.3. — Pour $b = a + \vec{u}$, on écrira aussi $\vec{u} = b - a = \vec{ab}$.

Remarque : un espace affine n'a pas de point remarquable, en particulier pas d'origine. Un point $a \in \mathcal{E}$ étant fixé, l'application

$$\Theta_a : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$$

qui à b associe le vecteur \vec{ab} est alors une bijection de sorte que l'on peut considérer l'espace affine \mathcal{E} pointé en a comme un espace vectoriel.

Remarque : réciproquement un espace vectoriel est un espace affine pointé ; ainsi pour $n \geq 1$, \mathbb{R}^n est considéré comme un espace affine pointé de dimension n .

Exemples L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = y + 1$ est un espace affine sous l'espace vectoriel de l'équation homogène $y' = y$.

Notation I.1.4. — On notera parfois (\mathcal{E}, E) pour désigner un espace affine \mathcal{E} de direction E .

Exemple : espaces affines produit. Si $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de \mathbb{K} -espaces affines, le produit $\prod_{i \in I} \mathcal{E}_i$ est un espace affine de direction $\prod_{i \in I} \vec{\mathcal{E}}_i$.

Définition I.1.5. — Un sous-ensemble \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} s'il est vide ou s'il contient un point a tel que $\vec{\mathcal{F}} := \Theta_a(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{E}}$ qui est appelé la direction de \mathcal{F} ; la dimension de \mathcal{F} est celle de $\vec{\mathcal{F}}$.

Notation I.1.6. — On notera parfois (\mathcal{F}, F) pour désigner un sous-espace affine \mathcal{F} de direction F .

Remarque : de l'égalité $\mathcal{F} = a + \vec{\mathcal{F}}$, on peut vérifier que $\vec{\mathcal{F}}$ ne dépend pas du choix du point a . En effet pour un autre point $b = a + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$, en posant $\mathcal{F} = b + \vec{\mathcal{G}}$, on a pour $\vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}$, $b + \vec{v} = a + \vec{w}$ et donc $\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$. Comme c'est vrai quelque soit \vec{v} , on en déduit $\vec{\mathcal{G}} \subset \vec{\mathcal{F}}$ et par symétrie $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{F}}$.

Remarque : étant donné un sous-espace vectoriel \vec{F} de $\vec{\mathcal{E}}$ et un point a de \mathcal{E} , il existe un unique sous-espace affine dirigé par \vec{F} et contenant a , on le note $a + \vec{F}$.

Remarque : les sous-espaces affines de dimension 0 (resp. 1) sont les points (resp. les droites) de \mathcal{F} .

Exemples Soient \vec{E} et \vec{F} deux espaces vectoriels et soit $f : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ une application linéaire. Pour tout $v \in \text{Im } f$, l'image réciproque $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine pour $\text{Ker } f$.

Lemme I.1.7. — Toute intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine éventuellement vide et sinon de direction l'intersection des directions des sous-espaces affines considérés.

Démonstration. — Si l'intersection est vide, il n'y a rien à prouver. Sinon pour $a, b \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$, le vecteur \overrightarrow{ab} appartient à tous les F_i et donc à leur intersection. Réciproquement pour $a \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ et $\overrightarrow{u} \in \bigcap_{i \in I} F_i$, le point $a + \overrightarrow{u}$ appartient à tous les \mathcal{F}_i d'où le résultat. \square

Définition I.1.8. — Soit S une partie de \mathcal{E} ; l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant S est le plus petit sous-espace affine contenant S , on le note $\langle S \rangle$ et on l'appelle le sous-espace engendré par S .

Définition I.1.9. — Un repère affine de \mathcal{E} est une suite (a_0, a_1, \dots, a_n) de points de \mathcal{E} telle que $(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Remarque : un point $a \in \mathcal{E}$ est uniquement déterminé par des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $a = a_0 + \alpha_1 \overrightarrow{a_0a_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{a_0a_n}$; on dit que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont les coordonnées de a dans le repère (a_0, \dots, a_n) .

Système d'équations cartésiennes d'un sous-espace affine de \mathbb{K}^n . Soit \mathcal{E} un sous-espace affine de \mathbb{K}^n , de sorte que $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ en tant que sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n de dimension k admet un système linéaire homogène de $n - k$ équations cartésiennes :

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ p_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Ainsi pour $A = (a_1, \dots, a_n)$ un point de \mathcal{E} , un systèmes d'équations cartésiennes de \mathcal{E} est

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) = p_1(a_1, \dots, a_n) \\ \dots \\ p_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = p_{n-k}(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

Définition I.1.10. — Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} ; on dit que

- \mathcal{F} et \mathcal{G} se coupent si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide;
- \mathcal{F} et \mathcal{G} sont supplémentaires si $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{G}}$;
- \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles et on note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$, si $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}$;
- \mathcal{F} est faiblement parallèle à \mathcal{G} et on note $\mathcal{F} \triangleleft \mathcal{G}$ si on a $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$.

Proposition I.1.11. — Soient (\mathcal{F}, F) et (\mathcal{G}, G) des sous-espaces affines de (\mathcal{E}, E) .

1. \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles si et seulement s'il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{F} + \overrightarrow{u}$ et que $H = \{\overrightarrow{u} \in E : \mathcal{G} = \mathcal{F} + \overrightarrow{u}\}$ est un sous-espace affine de direction $F = G$.
2. \mathcal{F} est faiblement parallèle à \mathcal{G} si et seulement si \mathcal{F} est parallèle à un sous-espace affine de \mathcal{G} et qu'alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$.

Démonstration. — 1) Soit $p \in \mathcal{F}$ et $q \in \mathcal{G}$ tels que $\mathcal{F} = p + F$ et $\mathcal{G} = q + G$. Comme \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles, on a $F = G$ et donc $\mathcal{G} = p + \overrightarrow{pq} + F = \mathcal{F} + \overrightarrow{pq}$. Par ailleurs pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in H$, on a $p + F + \overrightarrow{u} = \mathcal{G} = p + F + \overrightarrow{v}$ et donc $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \in F$. Réciproquement pour $\overrightarrow{u} \in H$ et $\overrightarrow{f} \in F$, on a $p + F + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f} = p + F + \overrightarrow{u} = \mathcal{G}$ d'où le résultat.

2) Soit $q \in \mathcal{G}$ alors comme \mathcal{F} est faiblement parallèle à \mathcal{G} , $\mathcal{K} = q + F \subset \mathcal{G}$ est parallèle à \mathcal{F} . \square

Corollaire I.1.12. — Si $\mathcal{F} \triangleleft \mathcal{G}$ alors soit ils sont disjoints, soit l'un est contenu dans l'autre.

Démonstration. — S'ils ne sont pas disjoints avec $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$ alors, pour $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, on a $\mathcal{F} = a + \overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \mathcal{G} = a + \overrightarrow{\mathcal{G}}$. \square

Corollaire I.1.13. — (*Postulat des parallèles*)

Par tout point $a \in \mathcal{E}$, il existe une unique droite parallèle à une droite donnée et passant par a .

Proposition I.1.14. — Soient (\mathcal{F}, F) et (\mathcal{G}, G) deux sous-espaces affines de (\mathcal{E}, E) .

1. \mathcal{F} et \mathcal{G} se coupent si et seulement si $\overrightarrow{pq} \in F + G$ pour tout $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.
2. $E = F + G$ si et seulement si $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ pour tout sous-espace \mathcal{H} parallèle à \mathcal{G} et qu'alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace de \mathcal{E} de direction $F \cap G$.
3. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont supplémentaires alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point.

Démonstration. — 1) Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ et soit $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Pour $p \in \mathcal{F}$ et $q \in \mathcal{G}$, il vient $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{aq} - \overrightarrow{ap} \in F + G$. Réciproquement, soit $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, et soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tels que $\overrightarrow{pq} = \vec{u} - \vec{v}$; on a alors $p + \vec{u} = q + \vec{v} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

2) Si $E = F + G$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ pour \mathcal{H} parallèle à \mathcal{G} d'après le point précédent; le second point en découle alors directement. Réciproquement supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ pour tout \mathcal{H} parallèle à \mathcal{G} . Soient $p \in \mathcal{F}$ et $q \in \mathcal{G}$; pour $\vec{u} \in E$, comme $\mathcal{F} \cap (\vec{u} + \mathcal{G}) \neq \emptyset$ alors $\overrightarrow{pq} + \vec{u} \in F + G$ d'après 1). De même comme $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ alors $\overrightarrow{pq} \in F + G$ et donc $\vec{u} \in F + G$ soit $E = F + G$.

3) Si $E = F \oplus G$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide et de direction $F \cap G = \{\vec{0}\}$ d'après ce qui précède et donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton. \square

I.1.2. Applications affines. —

Définition I.1.15. — Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines; une application $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe une application linéaire $\vec{\phi} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ telle que pour tout $m, n \in \mathcal{E}$, $\phi(n) = \phi(m) + \vec{\phi}(\overrightarrow{mn})$.

Remarque : pour o fixé et f une application linéaire, l'application qui à $N \in \mathcal{E}$ associe $\phi(n) = \phi(o) + \vec{f}(\overrightarrow{on})$ est affine. En effet pour $m \in \mathcal{E}$ quelconque, on a $\phi(n) = \phi(o) + f(\overrightarrow{om}) + \overrightarrow{mn}) = \phi(m) + f(\overrightarrow{mn})$. Ainsi pour définir une application affine, il suffit de connaître sa partie linéaire et l'image d'un point.

Remarque : l'image directe et réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine; en particulier toute application affine envoie trois points alignés sur trois points alignés.

Donnons quelques exemples d'applications affines :

- si \mathcal{E} est un produit $\prod_{i \in I} \mathcal{E}_i$ d'espaces affines, les projections $p_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i$ sont affines.
- **Les formes affines :** dans ce cas \mathcal{F} est de dimension 1 et on la note h de sorte que $h^{-1}(\{x\})$, pour x un scalaire, est une famille d'hyperplans affines parallèles.
- **Les translations :** pour $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ et $\vec{\phi} = \text{Id}$, on a $\overrightarrow{\phi(a)\phi(b)} = \overrightarrow{ab}$ de sorte que d'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{a\phi(a)} = \overrightarrow{b\phi(b)}$, autrement dit il existe $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ tel que pour tout $m \in \mathcal{E}$, $\phi(m) = m + \vec{u}$. C'est une translation de vecteur \vec{u} que l'on note $t_{\vec{u}}$.
- **Les homothéties :** pour $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ pointé en un point o , l'homothétie $h(o, \lambda)$ de centre o et de rapport λ est l'application linéaire définie par $\phi(m) = o + \lambda \overrightarrow{om}$. On a en particulier $\vec{\phi} = \lambda \text{Id}$
- **Les projections affines :** soit \mathcal{V} un sous-espace affine non vide de $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ et W un supplémentaire de $\vec{\mathcal{V}}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$. Pour $a \in \mathcal{V}$, la projection affine sur \mathcal{V} parallèlement à

W et fixant a , est l'application affine fixant a et de partie linéaire la projection sur \vec{V} parallèlement à W .

- **Les symétries affines** : avec les notations ci-avant, la symétrie affine par rapport à \mathcal{V} parallèlement à W est définie comme l'application fixant \mathcal{V} et de partie linéaire la symétrie par rapport à \vec{V} parallèlement à W .
- **Affinité** : soit \mathcal{H} un hyperplan affine et \vec{D} un supplémentaire de $\vec{\mathcal{H}}$ dans E . Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'affinité $a_{\mathcal{H}, \vec{D}, \lambda}$ est l'application fixant $a \in \mathcal{H}$ et de partie linéaire $\text{Id}_{\vec{\mathcal{H}}} \oplus \lambda \text{Id}_{\vec{D}}$.

Remarque : de même qu'une application linéaire est déterminée par l'image des vecteurs d'une base, une application affine est déterminée par l'image des points d'un repère affine.

Proposition I.1.16. — Soit (a_0, \dots, a_n) un repère affine de \mathcal{E} et soient b_0, \dots, b_n des points quelconques de \mathcal{F} . Il existe alors une unique application affine ϕ telle que pour $i = 0, \dots, n$, $\phi(a_i) = b_i$.

Démonstration. — Comme (a_0, \dots, a_n) est un repère affine, les vecteurs $\overrightarrow{a_0 a_k}$ pour $k = 1, \dots, n$, forment une base de $\vec{\mathcal{E}}$. Soit alors $f : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ défini par $f(\overrightarrow{a_0 a_k}) = \overrightarrow{b_0 b_k}$ pour $k = 1, \dots, n$. On pose alors $\phi(m) = b_0 + f(\overrightarrow{a_0 m})$ de sorte que ϕ est affine avec $\vec{\phi} = f$ et $\phi(a_k) = b_k$.

En ce qui concerne l'unicité, si ϕ et ψ étaient deux telles applications affines, alors $\vec{\phi} = \vec{\psi}$ avec $\phi(a_0) = \psi(a_0)$ et donc $\phi = \psi$. □

Remarque : en particulier la seule transformation affine d'un espace de dimension n qui fixe $n + 1$ points indépendants est l'identité.

Corollaire I.1.17. — En dimension 2, l'action du groupe affine sur les triangles non plats (resp. sur les parallélogrammes non plats) est transitive.

Démonstration. — Un triangle non plat du plan affine en détermine une base et réciproquement ; le résultat découle alors de la proposition précédente. En ce qui concerne les parallélogrammes, il suffit de remarquer qu'une application affine f conserve « les vecteurs », i.e. si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$ alors $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f(c)f(d)}$. □

En ce qui concerne les points fixes d'une application affine, citons les deux résultats suivants.

Lemme I.1.18. — Soit ϕ une application affine possédant un point fixe a ; alors l'ensemble des points fixes de ϕ est le sous-espace affine $a + \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id})$.

Démonstration. — Soit b un point fixe de ϕ ; on a alors $\phi(b) = \phi(a) + \vec{\phi}(\overrightarrow{ab})$ et donc $\overrightarrow{ab} \in \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id})$ et réciproquement. □

Proposition I.1.19. — Une application affine ϕ possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{\phi}$.

Démonstration. — Si ϕ possède un unique point fixe alors d'après le lemme précédent 1 n'est pas valeur propre de $\vec{\phi}$. Réciproquement supposons que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{\phi}$, il suffit alors de montrer que ϕ possède un point fixe, il sera unique d'après ce qui précède. Soit

$a \in \mathcal{E}$ et comme $\vec{\phi} - \text{Id}$ est surjective soit \vec{v} tel que $\vec{\phi}(\vec{v}) = \vec{v} + \overrightarrow{\phi(a)a}$. Posons $c = a + \vec{v}$ et calculons

$$\phi(c) = \phi(a) + \vec{\phi}(\vec{v}) = \phi(a) + \vec{v} + a - \phi(a) = a + \vec{v} = c,$$

d'où le résultat. \square

Application : les transformations affines de partie linéaire une homothétie de rapport distincts de 1, sont exactement les homothétiques. En effet d'après la proposition précédente, elles possèdent un unique point fixe o et sont donc données par la formule $h(m) = o + \lambda \overrightarrow{om}$.

I.1.3. Le groupe affine. — La composée de deux applications affines ϕ et ψ est une application affine telle que $\overrightarrow{\phi \circ \psi} = \overrightarrow{\phi} \circ \overrightarrow{\psi}$. Dans le cas $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, ϕ est bijective si et seulement si $\overrightarrow{\phi}$ l'est auquel cas ϕ^{-1} est affine avec $\overrightarrow{\phi^{-1}} = \overrightarrow{\phi}^{-1}$.

Définition I.1.20. — On note $GA(\mathcal{E})$ l'ensemble des bijections affines de \mathcal{E} ; c'est un groupe dit le groupe affine de \mathcal{E} . Pour $a \in \mathcal{E}$, $GA_a(\mathcal{E}) \subset GA(\mathcal{E})$ désigne le sous-ensemble des bijections affines fixant le point a .

Proposition I.1.21. — *La suite exacte courte*

$$0 \rightarrow T(\mathcal{E}) \rightarrow GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(\vec{\mathcal{E}}) \rightarrow 0$$

est exacte.

Remarque : en termes concrets cela signifie que l'application $\phi \in GA(\mathcal{E}) \mapsto \overrightarrow{\phi} \in GL(\vec{\mathcal{E}})$ est surjective de noyau le sous-groupe des translations $T(\mathcal{E})$ lequel est isomorphe à $\vec{\mathcal{E}}$.

Démonstration. — La surjectivité est évidente puisque ϕ défini par $\phi(m) = \phi(o) + f(\overrightarrow{om})$ convient. En ce qui concerne le noyau on a déjà vu qu'il s'agissait des translations, d'où le résultat. \square

Remarque : en tant que noyau $T(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué; un calcul direct donne $\phi t_{\vec{a}} \phi^{-1} = t_{\vec{\phi}(\vec{a})}$.

Proposition I.1.22. — *L'ensemble $HT(\mathcal{E})$ des homothéties de rapport non nul et des translations de \mathcal{E} , est un sous-groupe distingué de $GA(\mathcal{E})$. Il est formé des $\phi \in GA(\mathcal{E})$ tels que $\overrightarrow{\phi}$ est une homothétie vectorielle de rapport non nul, ou encore tels que pour toute droite D , $\phi(D)$ est une droite parallèle.*

Démonstration. — L'ensemble $HT(\mathcal{E})$ est l'image réciproque du sous-groupe distingué des homothéties vectoriel de rapport non nul, c'est donc un sous-groupe distingué. Par ailleurs on a vu que toute translation et homothétie transforme une droite en une droite parallèle. Réciproquement si ϕ transforme toute droite en une droite parallèle, alors $\overrightarrow{\phi}$ envoie tout vecteur sur un vecteur colinéaire; il est alors classique d'obtenir que $\overrightarrow{\phi}$ est une homothétie. \square

Remarque : pour $a \in \mathcal{E}$, le groupe $GA_a(\mathcal{E})$ est isomorphe à $GL(\vec{\mathcal{E}})$ et pour tout $\phi \in GA(\mathcal{E})$, on a $\phi = t_{\overrightarrow{a\phi(a)}} \circ \psi$ où $\psi := t_{\overrightarrow{\phi(a)a}} \circ \phi \in GA_a(\mathcal{E})$. L'inconvénient de cette écriture est que $t_{\overrightarrow{a\phi(a)}}$ et ϕ ne commutent pas sauf si $\overrightarrow{a\phi(a)} \in \text{Ker}(\overrightarrow{\phi} - \text{Id})$; ainsi il sera difficile de composer de telles écritures. Le théorème suivant fournit une solution partielle à ce problème.

Théorème I.1.23. — Soit ϕ une application affine telle que

$$\vec{\mathcal{E}} = \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) + \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id}).$$

Alors ϕ s'écrit de manière unique sous la forme $t \circ \psi$ où ψ admet un point fixe et commute avec la translation t .

Remarque : par le théorème du rang la somme dans l'énoncé ci-dessus est une somme directe.

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{E}$ quelconque et on décompose $\overrightarrow{x\phi(x)} = \vec{v}_x + \vec{w}_x$ dans $\vec{\mathcal{E}} = \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) + \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id})$. Notons que \vec{v}_x ne dépend pas du choix de x ; en effet pour $y \in \mathcal{E}$, avec les mêmes notations, on a

$$\phi(y) - \phi(x) = \vec{\phi}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{xy} + \vec{w}_y - \vec{w}_x + \vec{v}_y - \vec{v}_x$$

de sorte que $\vec{v}_y - \vec{v}_x$ appartient à $\text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id}) \cap \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id})$ et est donc nul. On note ce vecteur \vec{v} .

Fixons alors $a \in \mathcal{E}$ et comme $\vec{\phi} - \text{Id}$ est surjective car injective, soit c tel que $\overrightarrow{a\phi(a)} = \vec{v} - (\vec{\phi} - \text{Id})(\overrightarrow{ac})$. On a alors

$$\overrightarrow{c\phi(c)} = \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{a\phi(a)} + \vec{\phi}(\overrightarrow{ac}) = \vec{v}.$$

On pose alors $\psi = t_{-\vec{v}} \circ \phi$ de sorte que $\psi(c) = c$ et comme $\vec{v} \in \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id})$, on en déduit que ψ et $t_{\vec{v}}$ commutent, d'où le résultat. \square

I.1.4. Rapport de proportionnalité et théorème de Thalès. — Reprenons les notations de l'introduction sur les systèmes complets d'invariants d'un groupe agissant sur un ensemble dans le cas où G est le groupe affine en dimension 1. Pour X l'ensemble des couples de points distincts, nous avons vu que l'action de G y était transitive. En ce qui concerne l'action de G sur l'ensemble X des triplets de points distincts, le quotient X/G est paramétré par les scalaires distincts de 0 et 1; l'invariant affine associé est le rapport de proportionnalité.

Notation I.1.24. — Le rapport de proportionnalité de 3 points a, b, c sur une droite \mathcal{D} est le scalaire λ tels que $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{ab}$. On l'exprime aussi sous forme d'un quotient de mesure algébrique $\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}}$.

Remarque : d'après ce que l'on vient de rappeler sur la transitivité de l'action de G sur les couples de points d'une droite affine, les mesures algébriques \overrightarrow{ab} et \overrightarrow{ac} ne sont pas des invariants affines.

Proposition I.1.25. — Les orbites de l'action du groupe affine de dimension 1 sur l'ensemble des triplets de points distincts d'un espace affine de dimension 1, sont en bijection avec $\mathbb{K} - \{0\}$ via l'application qui à un tel triplet (a, b, c) associe le coefficient de proportionnalité $\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}}$.

Démonstration. — Il s'agit donc de vérifier qu'étant donnés deux triplets (a, b, c) et (a', b', c') de points distincts, il existe une application affine, nécessairement unique, envoyant a, b, c respectivement sur a', b', c' si et seulement si $\lambda = \frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}}$ est égal à $\lambda' = \frac{\overrightarrow{a'c'}}{\overrightarrow{a'b'}}$.

Vérifions tout d'abord que la condition est bien nécessaire : on a $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{ab}$ de sorte que par application de $\vec{\phi}$ on a $\overrightarrow{a'c'} = \lambda \overrightarrow{a'b'}$ et donc $\lambda = \lambda'$.

Réciproquement si $\lambda = \lambda'$, on considère l'unique application affine ϕ qui envoie a, b sur a', b' . On calcule $\phi(c) = \phi(a) + \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{ac}) = a' + \lambda a'c' = a' + a'b' = b'$. \square

Lemme I.1.26. — Soient a, b, c trois points d'une droite \mathcal{D} et h une forme affine telle que $h(a) = 0$; on a alors $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{h(c)}{h(b)}$.

Démonstration. — C'est immédiat en utilisant la linéarité de \overrightarrow{h} . \square

Théorème I.1.27. — de Thalès

Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ trois hyperplans parallèles distincts d'un espace affine et \mathcal{D} une droite non parallèle à ces hyperplans. Pour $i = 1, 2, 3$, on note $a_i = \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_i$. Le rapport de proportionnalité de a_1, a_2, a_3 ne dépend pas de la droite \mathcal{D} considérée.

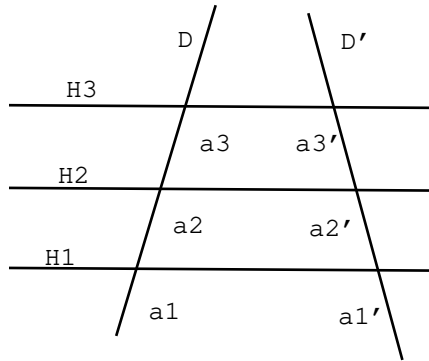


FIGURE 1. Théorème de Thalès

Démonstration. — 1 : soit d une équation affine de \mathcal{H}_1 de sorte que $\mathcal{H}_i = d^{-1}(x_i)$ pour x_i des scalaires. D'après le lemme précédent $\frac{\overline{a_1 a_2}}{\overline{a_1 a_3}} = \frac{d(a_2)}{d(a_3)}$. Si \mathcal{D}' est une autre droite alors en notant $a'_i = \mathcal{D}' \cap \mathcal{H}_i$, on a $d(a_1) = d(a'_1) = 0$, $d(a_2) = d(a_2')$, $d(a_3) = d(a_3')$ et donc d'après le lemme précédent $\frac{\overline{a'_1 a'_2}}{\overline{a'_1 a'_3}} = \frac{d(a_2)}{d(a_3)}$, d'où le résultat. \square

Démonstration. — 2 : considérons la projection affine p de \mathcal{E} sur \mathcal{D}' parallèlement à \mathcal{H} de sorte que $p(a_i) = a'_i$ et donc $\overline{a'_1 a'_3} = \overrightarrow{p}(\overline{a_1 a_3}) = \overrightarrow{p}(\lambda \overline{a_1 a_2}) = \lambda \overline{a'_1 a'_2}$, d'où le résultat. \square

Corollaire I.1.28. — Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites sécantes en a , et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites parallèles coupant \mathcal{D}_i en a_i et a'_i distincts de a . On a alors

$$\frac{\overline{aa_1}}{\overline{aa'_1}} = \frac{\overline{aa_2}}{\overline{aa'_2}} = \frac{\overline{a_1 a_2}}{\overline{a'_1 a'_2}}.$$

Corollaire I.1.29. — théorème de Pappus

Soient a, b, c trois points d'une droite \mathcal{D} et a', b', c' trois points d'une autre droite \mathcal{D}' . Si (ab') est parallèle à (ba') et si (bc') est parallèle à (cb') alors (ac') est parallèle à (ca') .

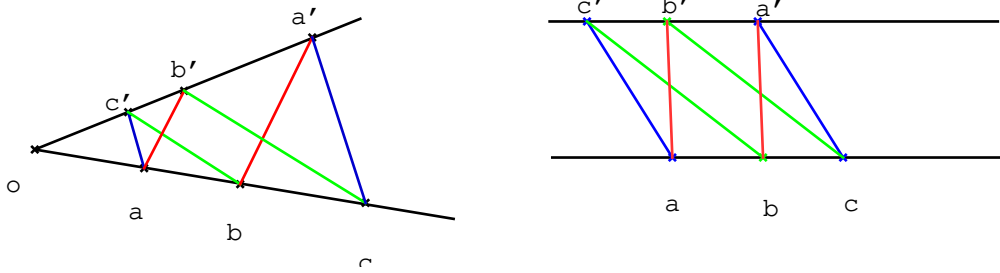


FIGURE 2. Théorème de Pappus affine

Démonstration. — Dans le cas où \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles, la translation de vecteur \vec{ab} (resp. \vec{bc}) envoie b' sur a' (resp. c' sur b') de sorte que la composée envoie c' sur a' ainsi que a sur c d'où le résultat.

Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{o\}$; soit f (resp. g , l'homothétie de centre o qui envoie a sur b (resp. b sur c). On a $f \circ g = g \circ f$ et comme $f(b') = a'$ et $g(c') = b'$, on en déduit que $f \circ g$ envoie c' sur a' et a sur c , ce qui donne le résultat. \square

Corollaire I.1.30. — théorème de Desargues affine

Soient abc et $a'b'c'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles.

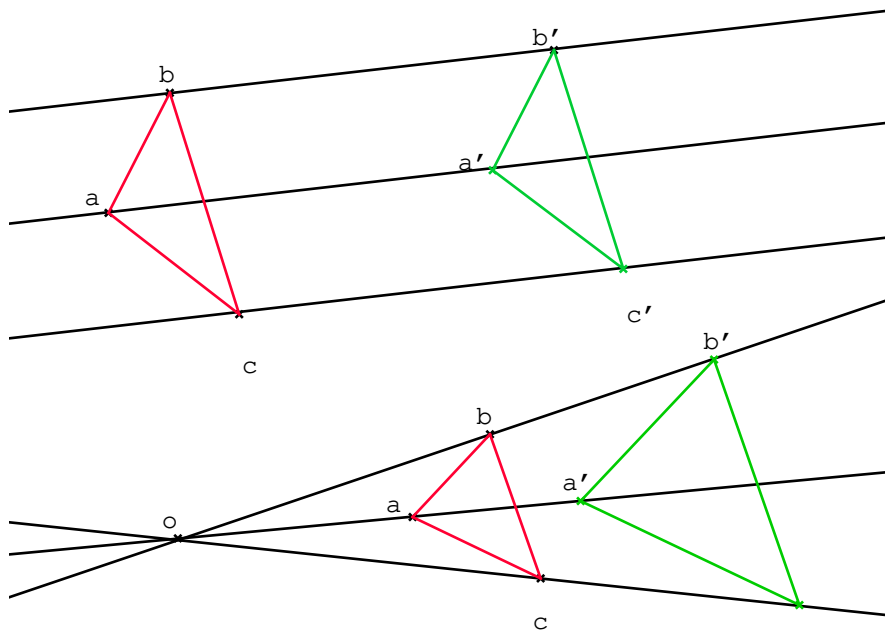


FIGURE 3. Théorème de Desargues affine

Démonstration. — La preuve est similaire à celle de Pappus. Dans le cas où (aa') et (bb') sont parallèles, la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$ envoie b sur b' et la droite (ac) sur $(a'c')$ et (bc) sur $(b'c')$ et donc c sur c' de sorte que (cc') est parallèle à (aa') .

Dans le cas où (aa') et (bb') s'intersectent en o , l'homothétie de centre o qui envoie a sur a' envoie (ab) sur $(a'b')$ et (ob) sur (ob') et donc b sur b' . De même elle envoie (ac) sur $(a'c')$ et (bc) sur $(b'c')$ et donc c sur c' de sorte que o appartient à (cc') . \square

I.1.5. Théorème de Ménélaüs. — Commençons par l'énoncé du théorème de Ménélaüs qui donne une CNS pour que trois points des côtés d'un triangle soient alignés. Nous donnerons deux preuves de ce résultat important.

Théorème I.1.31. — de Ménélaüs

Soient a, b, c trois points non alignés et a', b', c' trois points, distincts de a, b, c situés respectivement sur les droites (bc) , (ca) , (ab) . Alors a', b', c' sont alignés si et seulement si on a :

$$\frac{\overline{a'b} \overline{b'c} \overline{c'a}}{\overline{a'c} \overline{b'a} \overline{c'b}} = 1.$$

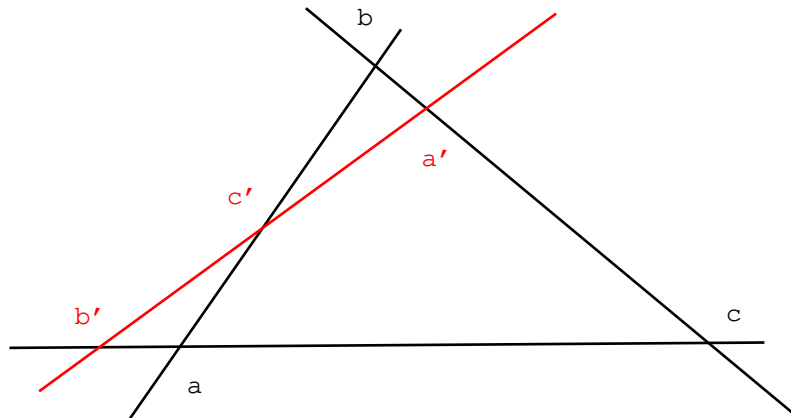


FIGURE 4. Ménélaüs

Démonstration. — utilisant les formes affines

Supposons que a', b' et c' sont alignés et soit d la forme affine à valeurs dans \mathbb{R} telle que $d^{-1}(\{0\}) = (a'b')$. D'après le lemme I.1.26, on a

$$\frac{\overline{a'b} \overline{b'c} \overline{c'a}}{\overline{a'c} \overline{b'a} \overline{c'b}} = \frac{d(b) d(c) d(a)}{d(c) d(a) d(b)} = 1.$$

Réciproquement, soit \tilde{c} l'intersection de $(a'b')$ avec (ab) ; d'après ce qui précède on a donc $\frac{\overline{a'b} \overline{b'c} \overline{\tilde{c}a}}{\overline{a'c} \overline{b'a} \overline{\tilde{c}b}} = 1$; de sorte que $\frac{\overline{\tilde{c}a}}{\overline{\tilde{c}b}} = \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$ et donc $\tilde{c} = c'$, d'où le résultat. \square

Démonstration. — utilisant les homothéties

Considérons les homothéties $h(a', \frac{a'b}{a'c})$, $h(b', \frac{b'c}{b'a})$ et $h(c', \frac{c'a}{c'b})$ qui envoient respectivement b sur

c , c sur a et a sur c de sorte que leur composé est une homothétie de rapport 1 qui laisse stable le point c , c'est donc l'identité. On en déduit alors que les centres sont alignés d'où le résultat. \square

I.2. Coordonnées barycentriques

I.2.1. Barycentre d'une famille de points pondérés. —

Définition I.2.1. — On appelle point pondéré un couple (a, α) où a est un point et α un scalaire appelé la masse de a .

Proposition I.2.2. — Si $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$ est un système de points pondérés tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point g vérifiant l'égalité $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \vec{0}$. Pour tout point o , on a alors $(\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{og} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{oa_i}$.

Démonstration. — On définit g via la formule $(\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{og} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{oa_i}$. La relation de Chasles donne alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{go} + \overrightarrow{oa_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{go} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{oa_i} = \vec{0}.$$

\square

Remarque : la fonction qui à m associe $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{ma_i} = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{m\hat{g}}$ est surjective si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Dans le cas contraire, elle est constante.

Définition I.2.3. — Le point g de la proposition précédente est appelé le barycentre du système; dans le cas où tous les α_i sont égaux, on parle alors d'isobarycentre.

Remarque : le barycentre n'est pas modifié si on multiplie tous les coefficients α_i par un même scalaire. Habituellement il est agréable de fixer la somme $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Remarque : dans le cas d'une famille infinie de points pondérée, indexée par un ensemble I , on considère des barycentres ne faisant intervenir qu'un nombre fini de points; on dit que la pondération est à support fini.

Proposition I.2.4. — Soient $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$ et $(b_1, \beta_1), \dots, (b_m, \beta_m)$ deux systèmes de points pondérés avec $\sum_i \alpha_i$ et $\sum_j \beta_j$ non nul. Alors le barycentre g du système

$$(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n), (b_1, \beta_1), \dots, (b_m, \beta_m)$$

est le barycentre du système $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n), (b, \sum_{j=1}^m \beta_j)$ où b est le barycentre du système $(b_1, \beta_1), \dots, (b_m, \beta_m)$.

Remarque : c'est ce que l'on appelle l'associativité du barycentre.

Démonstration. — Il suffit de revenir à la définition

$$\left(\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j \right) \overrightarrow{og} = \sum_i \alpha_i \overrightarrow{oa_i} + \sum_j \beta_j \overrightarrow{ob_j} = \sum_i \alpha_i \overrightarrow{oa_i} + \left(\sum_j \beta_j \right) \overrightarrow{ob}.$$

\square

Application : les médianes d'un triangle se coupent en leur tiers.

Notation I.2.5. — Soient a_0, \dots, a_k des points; pour $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ des scalaires de somme non nulle, on écrira

$$\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i\right)g = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$$

où g désigne le barycentre du système $(a_0, \alpha_0), \dots, (a_k, \alpha_k)$. que l'on écrira aussi parfois sous la forme

$$\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i\right)g - \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i = 0.$$

Théorème I.2.6. — **Théorème de Desargues**

Soient (ad') , (bb') et (cc') trois droites distinctes concourantes en un point o . On suppose que (ab) et $(a'b')$ (resp. (ac) et $(a'c')$, resp. (bc) et $(b'c')$) se rencontrent en un point r (resp. q , resp. p). Alors les points p, q, r sont alignés.

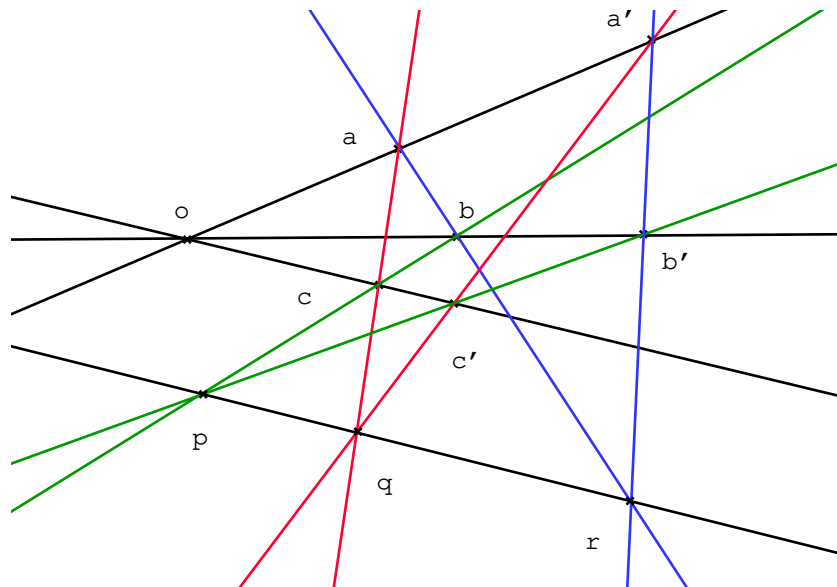


FIGURE 5. Théorème de Desargues

Démonstration. — Soient $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ tels que

$$o = \alpha a + (1 - \alpha)a' = \beta b + (1 - \beta)b' = \gamma c + (1 - \gamma)c'.$$

Le point r' tel que $(\alpha - \beta)r' = \alpha a - \beta b = (\alpha - 1)a' + (1 - \beta)b'$ appartient aux droites (ab) et $(a'b')$ de sorte que $r' = r$. De même on a

$$(\alpha - \gamma)q = \alpha a - \gamma c \text{ et } (\beta - \gamma)p = \beta b - \gamma c.$$

On a alors $(\alpha - \beta)r + (\gamma - \alpha)q + (\beta - \gamma)p = 0$ et donc les points p, q, r sont alignés. \square

Citons enfin le résultat suivant sur les applications affines.

Proposition I.2.7. — Pour f est une application de \mathcal{E} dans \mathcal{F} , les conditions suivantes sont équivalentes :

- f est affine ;
- f conserve le barycentre, i.e. si g est le barycentre de $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$, alors $f(g)$ est le barycentre de $(f(a_1), \alpha_1), \dots, (f(a_n), \alpha_n)$.

Démonstration. — Si f est affine alors

$$\sum_i \alpha_i \overrightarrow{f(g)f(a_i)} = \sum_i \alpha_i \overrightarrow{f(g\vec{a}_i)} = \overrightarrow{f\left(\sum_i \alpha_i g\vec{a}_i\right)} = \overrightarrow{f(\vec{0})} = \vec{0}.$$

Réciproquement, fixons $a \in \mathcal{E}$ et posons $\overrightarrow{f}(\vec{u}) = f(a + \vec{u}) - f(a)$, de sorte que \overrightarrow{f} est uniquement déterminée sur $\vec{\mathcal{E}}$. Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, le point $a + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est le barycentre de $(a, 1 - \lambda - \mu)$, $(a + \vec{u}, \lambda)$, $(a + \vec{v}, \mu)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= f(a + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - f(a) \\ &= (1 - \lambda - \mu)f(a) + \lambda f(a + \vec{u}) + \mu f(a + \vec{v}) - f(a) \\ &= \lambda \overrightarrow{f}(\vec{u}) + \mu \overrightarrow{f}(\vec{v}). \end{aligned}$$

□

I.2.2. relativement à un repère affine. —

Définition I.2.8. — Des points a_0, \dots, a_k sont dits affinement indépendants si la dimension de l'espace qu'ils engendrent est égale à k .

Proposition I.2.9. — Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) les points a_0, \dots, a_k sont affinement indépendants ;
- (ii) pour tout $i = 0, \dots, k$, a_i n'est pas barycentre des points $\{a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k\}$ (où la notation \hat{a}_i signifie qu'on omet le point a_i) ;
- (iii) les points a_0, \dots, a_{k-1} sont affinement indépendants et a_k n'est pas le barycentre des points $\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$;
- (iv) pour tout $i = 0, \dots, k$, les vecteurs $\overrightarrow{a_0 a_i}, \dots, \overrightarrow{a_{i-1} a_i}, \overrightarrow{a_{i+1} a_i}, \dots, \overrightarrow{a_k a_i}$ sont linéairement indépendants ;
- (v) il existe $i \in \{0, \dots, k\}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{a_0 a_i}, \dots, \overrightarrow{a_{i-1} a_i}, \overrightarrow{a_{i+1} a_i}, \dots, \overrightarrow{a_k a_i}$ sont linéairement indépendants.

Démonstration. — Montrons (i) \Rightarrow (ii). On raisonne par l'absurde ; si a_i est barycentre des autres alors l'espace affine engendré par $\{a_0, \dots, a_k\}$ est égale à celui engendré par $\{a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k\}$ et il est donc de dimension inférieure ou égale à $k - 1$ ce qui contredit (i).

(iii) \Rightarrow (i) : par hypothèse $\langle \{a_0, \dots, a_{k-1}\} \rangle$ est de dimension $k - 1$ et d'après (iii), $\langle \{a_0, \dots, a_k\} \rangle$ le contient strictement de sorte qu'il est de dimension k d'où (i).

(ii) \Rightarrow (i) : on raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 1$ c'est évident, passons alors de $k - 1$ à k . Pour $i > 0$, le point a_i n'appartient pas à $\langle \{a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k\} \rangle$; par hypothèse de récurrence les points a_1, \dots, a_k sont donc affinement indépendants et l'implication précédente permet de conclure.

(i) \Rightarrow (iv) : il suffit d'utiliser $\langle \{a_0, \dots, a_k\} \rangle = a_i + \text{Vect}\{\overrightarrow{a_i a_j}\}$. L'implication (v) \Rightarrow (i) découle directement de cette même formule.

Les propriétés (iv) ou (v) montrent que si les points a_0, \dots, a_k sont affinement indépendants, il en est de même de toute sous-familles de points; combiné avec (i) \Rightarrow (ii) cela achève de montrer (i) \Rightarrow (iii). \square

Définition I.2.10. — Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n et \mathcal{F} un sous-espace affine de dimension k . Un repère affine de \mathcal{F} consiste en la donnée d'une suite de $k + 1$ points a_0, \dots, a_k affinement indépendants de \mathcal{F} .

Définition I.2.11. — Soient a_0, \dots, a_n un repère affine de \mathcal{E} . Alors tout point m de \mathcal{E} s'écrit comme barycentre des points A_i affectés de masses λ_i ; en outre si μ_0, \dots, μ_n sont des réels de somme non nulle tels que m est le barycentre des points a_i affectés de masses μ_i , il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(\mu_0, \dots, \mu_n) = \lambda(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$. **Les coordonnées barycentriques homogènes** de M sur le repère (a_0, \dots, a_n) est alors la classe d'un tel $n + 1$ -uplet

$$(\mu_0 : \dots : \mu_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

où \sim désigne la relation d'équivalence de proportionnalité.

Remarque : si on fixe $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ alors le $n + 1$ -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ est défini de manière unique; on parle alors de **coordonnées barycentriques absolues**.

Remarque : on renvoie au chapitre sur la géométrie projective pour de plus amples détails sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Proposition I.2.12. — Soit (a_0, \dots, a_n) un repère affine de \mathcal{E} et soit m un point de \mathcal{E} dont on note x_0, \dots, x_n ses coordonnées barycentrique absolues dans ce repère. On a alors

$$x_0 = \frac{\det(\overrightarrow{ma_1}, \dots, \overrightarrow{ma_n})}{\det(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})}$$

et pour $i = 1, \dots, n$

$$x_i = \frac{\det(\overrightarrow{ma_1}, \dots, \overrightarrow{ma_{i-1}}, \overrightarrow{a_0m}, \overrightarrow{ma_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{ma_n})}{\det(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})}.$$

Remarque : on peut interpréter ces coefficients comme des rapports d'hypervolumes (d'aires en dimension 2).

Démonstration. — En développant $\det(\overrightarrow{ma_0} + \overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{ma_0} + \overrightarrow{a_0a_n})$, on obtient $\sum_{i=0}^n x_i = 1$. Ainsi en posant $\vec{u} = \sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{ma_i}$, il suffit de montrer que \vec{u} est le vecteur nul. On calcule $\alpha_n = \det(\vec{u}, \overrightarrow{ma_1}, \dots, \overrightarrow{ma_{n-1}})$. Par multi-linéarité, on obtient

$$\det(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})\alpha_n = x_0 \det(\overrightarrow{ma_0}, \dots, \overrightarrow{ma_{n-1}}) + x_n \det(\overrightarrow{ma_n}, \overrightarrow{ma_0}, \dots, \overrightarrow{ma_{n-1}}) = 0.$$

Posons $b = m + \vec{u} = \sum_{i=0}^n y_i a_i$ de sorte que b appartient au sous-affine engendré par $\{m, a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Par symétrie du problème b appartient à tout sous-espace affine $\langle m, a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n \rangle$, où $0 \leq i < j \leq n$. Montrons alors par récurrence descendante sur k que b appartient au sous-espace affine $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$. On vient de prouver le résultat pour $k = n - 1$ montrons alors le passage de $k + 1$ à k . Comme $\langle m, a_0, \dots, a_k \rangle$ est de dimension inférieure ou égale à $k + 1$ et que $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$ est de dimension n , il existe $k < r \leq n$ tel que $a_r \notin \langle m, a_0, \dots, a_k \rangle$. Par symétrie du problème l'hypothèse de récurrence au rang $k + 1$, montre que $b \in \langle m, a_0, \dots, a_{k-1}, a_r \rangle$ et donc b appartient à l'intersection X de $\langle m, a_0, \dots, a_k \rangle$ et $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1}, a_r \rangle$ laquelle intersection est

strictement contenu dans $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1}, a_r \rangle$ et contient $\langle m, a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$ de sorte que $X = \langle m, a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$.

Au final, on obtient $b \in \langle m \rangle$ et donc $\vec{u} = \vec{0}$ d'où le résultat. \square

I.2.3. Cas de la dimension 1 et 2. — En dimension 1 la proposition I.2.12 devient.

Corollaire I.2.13. — Soient A, B, M trois points alignés; M est alors le barycentre des points pondérés $(A, \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}})$ et $(B, \frac{\overline{MA}}{\overline{BA}})$.

Remarque : en géométrie euclidienne on formulera ce barycentre sous la forme (A, \overline{MB}) et (B, \overline{AM}) .

Définition I.2.14. — L'isobarycentre de deux points A et B s'appelle le **milieu** de A, B .

Proposition I.2.15. — Dans un parallélogramme $ABCD$ les diagonales se coupent en leur milieu qui est l'isobarycentre de A, B, C, D .

Démonstration. — Notons O le milieu de A, C ; l'égalité $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$ s'écrit

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DC}$$

soit comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, i.e. O est le milieu de C, D . Par associativité du barycentre, l'isobarycentre de A, B, C, D est l'isobarycentre des milieux de A, C et de B, D soit O . \square

Remarque : on peut aussi utiliser les écritures barycentriques : $b - a = c - d$ que l'on écrit sous la forme $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$.

Proposition I.2.16. — Dans un triangle ABC , on note A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Les médianes $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ s'intersectent en leur tiers en l'isobarycentre G de A, B, C .

Démonstration. — Par associativité du barycentre G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(A', 2)$ et donc G est un point de la médiane tel que $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$. On procède de même pour les autres médianes. \square

En dimension 2, la proposition I.2.12 s'appelle le lemme du chevron.

Corollaire I.2.17. — **Lemme du chevron**

Soit ABC un triangle et M un point du plan distinct de A ; on suppose que la droite (AM) coupe (BC) en A' . On a alors

$$\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(CMA)} = -\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$$

où $\mathcal{A}(AMB) = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $\mathcal{A}(CMA) = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ s'interprètent en géométrie euclidienne respectivement comme les aires algébriques des triangles AMB et CMA .

Démonstration. — Rappelons que si $(x : y : z)$ sont les coordonnées barycentriques homogènes de M dans le repère (A, B, C) alors $(y : z)$ sont celles de A' dans le repère (B, C) de la droite (BC) et donc $\frac{y}{z} = -\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$. Le résultat découle alors de la proposition précédente. \square

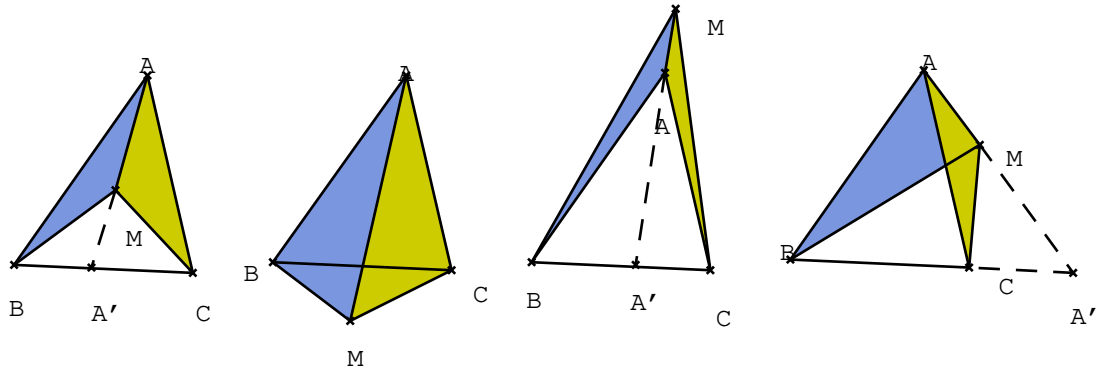


FIGURE 6. Lemme du chevron

I.3. Barycentres dans le plan affine

Un triangle abc non dégénéré du plan affine en définit un repère affine.

I.3.1. Équations barycentriques de droites. —

Lemme I.3.1. — Soient trois points p_1, p_2, p_3 de coordonnées barycentriques homogènes respectives $(x_i : y_i : z_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors p_1, p_2, p_3 sont alignés si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

est nul.

Démonstration. — Le déterminant est nul si et seulement si ses colonnes C_1, C_2, C_3 sont liées ce qui est équivalent à $\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \lambda_3 C_3$ liées pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non nuls. Ainsi on peut supposer que les coordonnées barycentriques considérées sont absolues. Étant donnée une relation de dépendance linéaire $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0$ en faisant la somme des coordonnées on obtient $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ et pour $\alpha_1 \neq 0$, on vérifie que $p_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} p_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_1} p_3$, i.e. p_1 est un barycentre de p_2 et p_3 . En effet on calcule

$$\begin{aligned} \alpha_2 \overrightarrow{p_1 p_2} + \alpha_3 \overrightarrow{p_1 p_3} &= \alpha_2 (x_2 \overrightarrow{p_1 a} + y_2 \overrightarrow{p_1 b} + z_2 \overrightarrow{p_1 c}) + \alpha_3 (x_3 \overrightarrow{p_1 a} + y_3 \overrightarrow{p_1 b} + z_3 \overrightarrow{p_1 c}) \\ &= (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \overrightarrow{p_1 a} + (\alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) \overrightarrow{p_1 b} + (\alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3) \overrightarrow{p_1 c} \\ &= -\alpha_1 x_1 \overrightarrow{p_1 a} - \alpha_1 y_1 \overrightarrow{p_1 b} - \alpha_1 z_1 \overrightarrow{p_1 c} = \vec{0}. \end{aligned}$$

□

Remarque : une égalité $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ sur les coordonnées barycentriques homogènes de trois points p_1, p_2, p_3 se traduit par l'égalité $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$ au sens de la notation I.2.5.

Remarque : soient m_1 et m_2 deux points distincts de coordonnées barycentriques homogènes respectives $(\alpha_i : \beta_i : \gamma_i)$ pour $i = 1, 2$. Un point m de coordonnées barycentriques homogènes

$(\alpha : \beta : \gamma)$ appartient alors à la droite $(m_1 m_2)$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

ce que l'on peut considérer, en développant selon la dernière colonne, comme une forme affine $d(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ où $d(\alpha, \beta, \gamma) = a\alpha + b\beta + c\gamma$.

Proposition I.3.2. — Soit D une droite d'équation barycentrique $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$; toute droite parallèle à D est d'équation

$$(a + \lambda)\alpha + (b + \lambda)\beta + (c + \lambda)\gamma = 0$$

pour un unique $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. — Notons tout d'abord que si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ est tel que

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ (a + \lambda)\alpha + (b + \lambda)\beta + (c + \lambda)\gamma = 0 \end{cases}$$

pour $\lambda \neq 0$ alors $\alpha + \beta + \gamma = 0$ de sorte que les deux droites données par ces équations barycentriques sont parallèles.

Réciproquement si D' est une droite parallèle à D passant par un point M de coordonnées barycentriques $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ alors pour $\lambda = \frac{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}$ la droite d'équation $(a + \lambda)\alpha + (b + \lambda)\beta + (c + \lambda)\gamma = 0$ passe par ce point et, d'après ce qui précède, est parallèle à D . \square

Corollaire I.3.3. — Deux droites d'équations $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ et $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$ sont parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Corollaire I.3.4. — La droite parallèle à (bc) et passant par a , dans le repère abc , pour équation barycentrique $\beta + \gamma = 0$.

Démonstration. — On écrit que la droite cherchée passe par les points a et $a + \overrightarrow{bc} = a + c - b$, soit

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

soit $\beta + \gamma = 0$. \square

Proposition I.3.5. — Soient trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 deux à deux distinctes et d'équations respectives $a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma = 0$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) la matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est de déterminant nul;

(ii) les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 sont concourantes ou parallèles.

Démonstration. — (i) \Rightarrow (ii) : soit (x, y, z) est un vecteur non nul du noyau de M de sorte qu'en considérant les formes affines, on a $xd_1 + yd_2 + zd_3 = 0$. Si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 se rencontrent en un point a , en injectant a dans la relation précédente, on obtient $d_3(a) = 0$ et donc \mathcal{D}_3 passe par a . Si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne se rencontrent pas, d'après le cas précédent \mathcal{D}_3 ne rencontre pas \mathcal{D}_1 et les trois droites sont donc parallèles.

Réciproquement si les trois droites sont concourantes en $a = (x, y, z)$ alors $(x, y, z)M$ est le vecteur nul et la matrice m n'est pas inversible. Si les trois droites sont parallèles alors les trois formes affines sont de la forme $d_1, d_2 = d_1 + a(\alpha + \beta + \gamma)$ et $d_3 = d_1 + b(\alpha + \beta + \gamma)$ et sont donc liées $(a - b)d_1 + bd_2 - ad_3 = 0$ et la matrice M n'est pas inversible. \square

I.3.2. Autour du triangle pédal. —

Lemme I.3.6. — Soit abc un triangle non dégénéré et b', c' respectivement sur les droites (ac) et (ab) de coordonnées barycentriques homogènes $(x' : 0 : z')$ et $(x : y : 0)$. La droite $(b'c')$ est parallèle à (bc) si et seulement si $x'y = xz'$ et sinon leur point d'intersection i a pour coordonnées barycentriques homogènes $(0 : x'y : -xz')$.

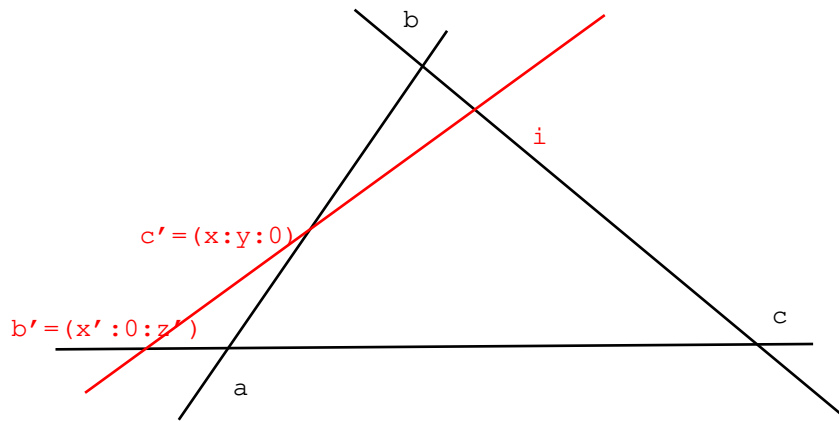


FIGURE 7. Thalès barycentrique

Démonstration. — De l'égalité $x\vec{c}'a + y\vec{c}'b = \vec{0}$, on en déduit que $\frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -y/x$. De même $\frac{\overline{b'a}}{\overline{b'c}} = -z'/x'$ de sorte que d'après le théorème de Thalès, $(b'c')$ est parallèle à (bc) si et seulement si $x'y = xz'$.

Dans le cas contraire, le point d'intersection i de (bc) et $(b'c')$ a pour coordonnées barycentriques homogènes $(0 : \alpha : \beta)$ tel que d'après le lemme I.3.1 en utilisant que i, b', c' sont alignés

$$\begin{vmatrix} 0 & x' & x \\ \alpha & 0 & y \\ \beta & z' & 0 \end{vmatrix} = \alpha xz' + \beta x'y = 0,$$

ce qui donne le résultat. \square

Remarque : si on prend $x = x'$ alors la condition de parallélisme devient $y = z'$ et dans le cas contraire, i a pour coordonnées barycentriques homogènes $(0 : y : -z)$.

Définition I.3.7. — Une droite issue de a (resp. b, c) est appelée une cévienne issue de a (resp. b, c). Pour un point p n'appartenant pas aux côtés du triangle abc , les droites issues de p et passant les sommets du triangle abc sont appelées les céviennes de p .

Soit p un point n'appartenant pas aux côtés du triangle abc ; on note a_p, b_p, c_p les intersections des céviennes de p avec respectivement (bc) , (ac) et (ab) .

Lemme I.3.8. — Soit $(x : y : z)$ des coordonnées barycentriques homogènes de p dans le repère affine a, b, c . Alors $(0 : y : z)$, $(x : 0 : z)$ et $(x : y : 0)$ sont respectivement des coordonnées barycentriques homogènes de a_p, b_p et c_p .

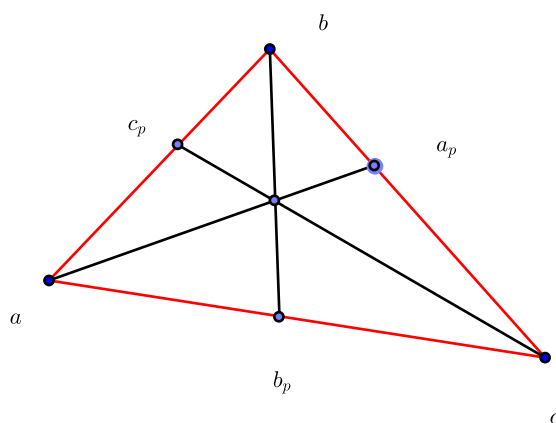


FIGURE 8. Céviennes

Démonstration. — Notons a' de coordonnées barycentriques homogènes $(0 : y : z)$; a' appartient à (bc) ; par ailleurs comme

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ y & y & 0 \\ z & z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y \\ z & z \end{vmatrix} = 0$$

d'après le lemme I.3.1, on en déduit que a, a' et p sont alignés et donc que $a' = a_p$. Les cas de b_p et c_p sont symétriques. \square

Définition I.3.9. — Les points a_p, b_p, c_p sont appelés les traces de p sur le triangle abc . Le triangle $a_p b_p c_p$ est appelé le triangle pédal associé à p .

Le théorème de Desargues appliqué au triangle abc et au triangle pédal $a_p b_p c_p$ fournit la proposition suivante.

Proposition I.3.10. — Soient abc un triangle et $(a_p b_p c_p)$ le triangle pédal associé à un point p . On suppose que les intersections $(ab) \cap (a_p b_p)$, $(ac) \cap (a_p c_p)$ et $(bc) \cap (b_p c_p)$ existent. Alors ces trois points d'intersection sont alignés.

Définition I.3.11. — La droite de la proposition précédente associée à p s'appelle la droite pédale de p dans le triangle abc .

Théorème I.3.12. — de Ceva

Soit a', b', c' des points sur les côtés d'un triangle abc de coordonnées barycentriques dans le repère affine (a, b, c) , $a'(0, \alpha, 1)$, $b'(1, 0, \beta)$ et $c'(\gamma, 1, 0)$. Les droites aa' , bb' et cc' sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\alpha\beta\gamma = 1$.

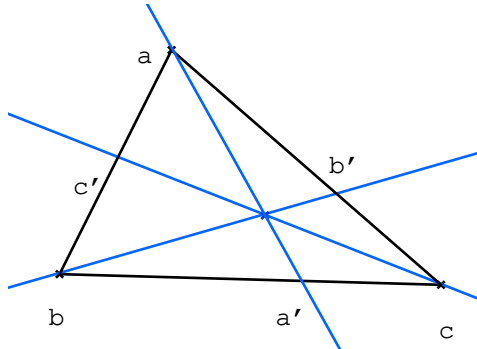


FIGURE 9. Théorème de Ceva

Démonstration. — On a $\alpha = -\frac{\overline{a'c}}{\overline{a'b}}$, $\beta = -\frac{\overline{b'a}}{\overline{b'c}}$, et $\gamma = -\frac{\overline{c'b}}{\overline{c'a}}$. Dans le repère affine (a, b, c) on note (x_a, x_b, x_c) les coordonnées d'un point ; une équation de la droite (aa') (resp. (bb') , resp. (cc')) est $x_b - \alpha x_c = 0$ (resp. $x_c - \beta x_a$, resp. $x_a - \gamma x_b$) de sorte que les droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\beta & 1 \\ 1 & 0 & -\gamma \\ -\alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - \alpha\beta\gamma = 0.$$

□

Exemples Les médianes sont concourantes ; en effet on a alors $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Remarque : une formulation équivalente consiste à dire que a', b', c' ont respectivement des coordonnées barycentriques homogènes de la forme $(0 : y : z)$, $(x : 0 : z)$ et $(x : y : 0)$.

On renvoie au paragraphe ?? pour des coordonnées barycentriques des points remarquables d'un triangle euclidien.

I.3.3. Théorème de Pappus. —

Théorème I.3.13. — de Pappus Soient deux droites distinctes \mathcal{D} et \mathcal{D}' du plan affine s'intersectant en un point o . Soient des points $a, b, c \in \mathcal{D}$ et $a', b', c' \in \mathcal{D}'$ tous distincts. Alors les points $r = (ab') \cap (ba')$, $q = (ac') \cap (ca')$ et $p = (bc') \cap (cb')$ sont alignés.

Démonstration. — On choisit (o, a, a') comme repère affine et on note $(1 : \beta : 0)$ et $(1 : \gamma : 0)$ (resp. $(1 : 0 : \beta')$ et $(1 : 0 : \gamma')$) les coordonnées barycentriques homogènes de b et c (resp. b'

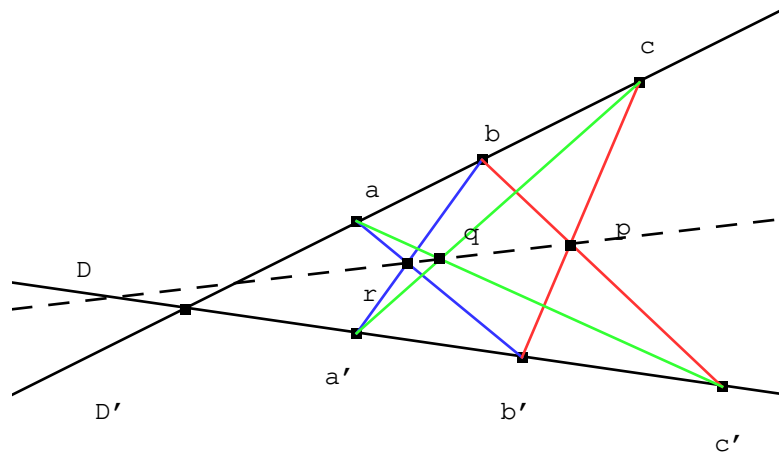


FIGURE 10. Théorème de Pappus

et c'). L'équation de la droite (ab') est donnée par

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & \beta' & z \end{vmatrix} = 0$$

soit $z - x\beta' = 0$. Par symétrie celle de $(a'b)$ est $y - x\beta = 0$ de sorte que les coordonnées barycentriques homogènes de r sont $(1 : \beta : \beta')$. Par symétrie des données, celles de q sont $(1 : \gamma : \gamma')$.

En ce qui concerne le point p , une équation de (bc') est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ \beta & 0 & y \\ 0 & \gamma' & z \end{vmatrix} = 0$$

soit $x\beta\gamma' - y\gamma' - z\beta = 0$. Par symétrie celle de (cb') est $x\beta'\gamma - y\beta' - z\gamma = 0$. On trouve alors les coordonnées barycentriques homogènes de p : $(\beta\beta' - \gamma\gamma' : \beta\gamma(\beta' - \gamma') : \gamma'\beta'(\beta - \gamma))$. On introduit alors la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \beta\beta' - \gamma\gamma' \\ \beta & \gamma & \beta\gamma(\beta' - \gamma') \\ \beta' & \gamma' & \gamma'\beta'(\beta - \gamma) \end{vmatrix}$$

dont on note C_i pour $i = 1, 2, 3$ les vecteurs colonnes. On observe alors que $C_3 = \beta\beta'C_2 - \gamma\gamma'C_1$ et donc le déterminant est nul et les points p, q, r sont alignés. \square

CHAPITRE II

GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE

On considère toujours un espace affine \mathcal{E} mais on suppose désormais que $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire ; on demande alors à nos transformations affines d'avoir une partie linéaire qui conserve le produit scalaire et on parle du groupe affine orthogonal. Ainsi bien que l'espace soit le même qu'en géométrie affine, le groupe des transformations considéré est plus petit de sorte que l'on s'attend à avoir plus d'invariants.

Considérons par exemple l'ensemble des couples de points distincts de l'espace affine ; nous avons vu que l'action du groupe affine produisait une unique orbite. En revanche si on restreint l'action au sous-groupe euclidien, les orbites sont paramétrées par $\mathbb{R}^\times / \{\pm 1\}$ et on retrouve la notion de longueur. Si on considère des couples de droite du plan affine euclidien, une orbite sous l'action du groupe affine orthogonal est appelé un angle non orienté de droites et on peut définir sa mesure à l'aide de la description du groupe orthogonal euclidien. Ainsi on associe à tout triangle du plan affine euclidien ses trois longueurs et ses trois angles au sommet ; l'ensemble des triangles non plats du plan étant de dimension 6 et comme le groupe affine orthogonal est de dimension 3, on s'attend à décrire l'ensemble des orbites des triangles sous l'action du groupe orthogonal avec 3 paramètres parmi les 6 définis par ses longueurs et angles aux sommets : c'est ce que l'on appelle classiquement les cas d'isométries des triangles. En outre on doit pouvoir donner 3 relations indépendantes entre ces 6 quantités, qui seront la loi des sinus, le théorème d'Al Kashi et la somme des angles égale à π .

Au lieu de demander à nos applications linéaires de conserver le produit scalaire, on peut aussi simplement leur demander de conserver sa nullité, i.e. considérer le sous-groupe des éléments g du groupe linéaire tels que $(x|y) = 0 \Rightarrow (g(x)|g(y)) = 0$. On obtient alors le groupe des similitudes et la géométrie associée s'appelle la géométrie semblable. Le groupe des similitudes étant de dimension 4, on devrait pouvoir paramétrer les classes de similitudes des triangles du plan affine euclidien à l'aide de 2 paramètres parmi les 6 constitués des longueurs et des angles.

II.1. Le groupe des isométries affines

L'espace de la géométrie affine euclidienne est celui de la géométrie affine de sorte que pour définir cette géométrie il ne nous reste plus qu'à en préciser le groupe des transformations. Comme dans le cas affine, celui-ci s'obtient à partir du cas vectoriel en lui adjoignant les translations.

II.1.1. Produit scalaire. — Dans la suite E désignera un espace vectoriel réel de dimension n .

Définition II.1.1. — Un produit scalaire sur E est une application φ de $E \times E$ dans \mathbb{R} qui à un couple de vecteurs (x, y) associe un réel noté $(x|y)$; cette application est bilinéaire, symétrique et définie positive. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit euclidien.

Remarque : une base (e_1, \dots, e_n) étant donnée, la matrice de φ dans cette base est la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $m_{i,j} = (e_i|e_j)$. Si X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y alors $(x|y) = {}^t XMY$. En outre si P désigne la matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_n) vers une base (e'_1, \dots, e'_n) , alors la matrice de φ dans cette nouvelle base est $M' = {}^t PMP$.

Définition II.1.2. — On appelle norme euclidienne d'un vecteur x de E , le réel positif

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Remarque : la fameuse inégalité de Cauchy-Schwarz $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$, relie le produit scalaire de deux vecteurs avec leur norme.

Définition II.1.3. — Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux, et on note $x \perp y$ si leur produit scalaire est nul. On dit que deux sous-espaces vectoriels V et W de E sont orthogonaux si tout vecteur de V est orthogonal à tout vecteur de W .

Remarque : une autre définition d'orthogonalité est donnée par le théorème de Pythagore vectoriel, i.e. x et y sont orthogonaux si et seulement si on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Remarque importante : la donnée de φ fournit un isomorphisme canonique entre E et son dual E^* via l'application $x \mapsto (y \mapsto (x|y))$. On peut ainsi voir l'orthogonal d'une partie comme un sous-espace de E , d'où la définition suivante.

Définition II.1.4. — Soit $A \subset E$, l'orthogonal de A est

$$A^\perp = \{x \in E : \forall a \in A, (x|a) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque : $A \mapsto A^\perp$ est une application décroissante pour l'inclusion.

Proposition II.1.5. — Soit V un sous-espace vectoriel de E ; on a alors

$$E = V \oplus V^\perp.$$

Remarque : en particulier on a $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$. Citons aussi les faits élémentaires suivants :

$$(V^\perp)^\perp = V, \quad (V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp, \quad (V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp.$$

Définition II.1.6. — Une base orthonormée de E est une famille (e_1, \dots, e_n) telle que pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

Remarque : une façon de construire une base orthonormée est de partir d'une base quelconque et d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

II.1.2. Le groupe orthogonal. —

Définition II.1.7. — Un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) si f conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

L'ensemble des isométries de E est un groupe appelé le groupe orthogonal de E et noté $O(E)$, où $O(n)$.

Remarque : une définition équivalente est de demander que f conserve la norme.

Remarque : f est une isométrie si et seulement si sa matrice O dans une base orthonormée vérifie ${}^tOO = I$.

Définition II.1.8. — Le noyau de l'application $\det : O(E) \rightarrow \{\pm 1\}$ est noté $O^+(E)$ ou encore $SO(E)$ et ses éléments sont dits des isométries positives ou directes.

Remarque : les éléments de $O(E)$ de déterminant -1 sont dits négatifs ou indirects et on note $O^-(E)$ l'ensemble des isométries négatives : on notera bien que $O^-(E)$ n'est pas un sous-groupe de $O(E)$ puisqu'il ne contient même pas l'élément neutre.

Exemples Symétries orthogonales : il s'agit d'une involution f telle que $V_+ = \text{Ker}(f - \text{Id})$ est orthogonal à $V_- = \text{Ker}(f + \text{Id})$. On dit que f est la symétrie par rapport à V_+ . On notera que tout endomorphisme orthogonal qui est diagonalisable est nécessairement une symétrie.

Définition II.1.9. — Une réflexion est une symétrie orthogonale f telle que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ est un hyperplan.

Théorème II.1.10. — *Tout isométrie de E est produit de $n - \dim \text{Ker}(f - \text{Id})$ réflexions, ce nombre étant optimal.*

Remarque : la preuve procède par récurrence sur la dimension de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

En dimension 2 : les isométries

— positives sont les rotations et sont donc en bijection avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; une orientation du plan étant donnée à $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ on associe la rotation r_θ d'angle θ .

— négatives sont les réflexions σ_D par rapport à une droite vectorielle D .

On rappelle par ailleurs que la composée $\sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1}$ est la rotation d'angle le double de l'angle entre D_1 et D_2 .

En dimension 3 :

— **les isométries positives** sont les rotations relativement à un axe D . Explicitons leur description : l'espace étant orienté le choix d'un vecteur directeur de D fournit une orientation de l'orthogonal D^\perp et la rotation d'axe D et d'angle θ est la somme directe $\text{Id}_D \oplus r_{\theta, D^\perp}$.

Remarque : parmi ces rotations celles d'angle π sont appelées des retournements; en utilisant qu'une rotation du plan est le produit de deux réflexions, on en déduit que toute rotation qui n'est pas un retournement est le produit de deux retournements.

— **Les isométries négatives** sont d'une part les réflexions (lesquelles sont donc en bijection avec les plans de l'espace) et les « anti-rotations » que l'on peut écrire, avec les notations précédentes, $-\text{Id}_D \oplus r_{\theta, D^\perp}$.

II.1.3. Groupe des similitudes. —

Définition II.1.11. — Un similitude de E est un endomorphisme f tel qu'il existe un nombre réel positif λ , appelé le rapport de f , tel que $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$. Autrement dit $f = g \circ h$ où h est une homothétie de rapport λ et g est une isométrie.

Remarque : pour tous $x, y \in E$, on a $(f(x)|f(y)) = \lambda^2(x|y)$; en particulier une similitude conserve l'orthogonalité. Matriciellement f est une similitude si et seulement si sa matrice S dans une base orthonormée vérifie ${}^tSS = \lambda^2I$.

Définition II.1.12. — Le groupe des similitudes de E se note $GO(E)$; les positives forment un sous-groupe noté $GO^+(E)$.

Remarque : $GO(E)$ est le produit direct de $O(E)$ avec R^* .

II.1.4. Isométries affines. —

Définition II.1.13. — Une isométrie affine est une application affine f telle que \vec{f} est une isométrie vectorielle. On note $Is(\mathcal{E})$ le sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$ des isométries affines.

Remarque : une application qui conserve les distances est nécessairement une isométrie affine.
Remarque : les isométries affines conservent l'alignement, les barycentres, les milieux, l'orthogonalité, les distances, les angles non orientés, transforment projeté orthogonal en projeté orthogonal.

Exemples les translations, les symétries orthogonales par rapport à un sous-espace affine.

Définition II.1.14. — On dit qu'une isométrie affine f est positive ou un déplacement (resp. négative ou un anti-déplacement) si \vec{f} est positive (resp. négative).

Théorème II.1.15. — de décomposition canonique Soit f une isométrie affine alors f s'écrit de manière unique sous la forme $t_{\vec{v}} \circ g$ où :

- $\vec{v} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$;
- g est une isométrie admettant un point fixe;
- g et $t_{\vec{v}}$ commutent.

Démonstration. — D'après I.1.23, il suffit de vérifier que $\vec{\mathcal{E}} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{Id})$. D'après le théorème du rang, il suffit de vérifier qu'ils sont en somme directe ce qui résultera du fait qu'ils sont orthogonaux. En effet soit \vec{x} dans le noyau et \vec{y} dans l'image; on a $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$ et il existe \vec{z} tel que $\vec{f}(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{y}$. On a alors

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{f}(\vec{x})|\vec{f}(\vec{z}) - \vec{z}) = (\vec{f}(\vec{x})|\vec{f}(\vec{z})) - (\vec{x}|\vec{z}) = 0.$$

□

Remarque : ainsi outre les isométries admettant un point fixe, correspondant donc à des isométries vectorielles, en dimension 2 on obtient les symétries glissées et en dimension 3 les vissages.

Théorème II.1.16. — Toute isométrie est produit de réflexions orthogonales.

Remarque : en ce qui concerne le nombre, il est $\leq n - \dim \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) + 2$.

II.1.5. Groupe des similitudes. —

Définition II.1.17. — Un similitude de E est un endomorphisme f tel qu'il existe un nombre réel positif λ , appelé le rapport de f , tel que $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$. Autrement dit $f = g \circ h$ où h est une homothétie de rapport λ et g est une isométrie.

Remarque : pour tous $x, y \in E$, on a $(f(x)|f(y)) = \lambda^2(x|y)$; en particulier une similitude conserve l'orthogonalité. Matriciellement f est une similitude si et seulement si sa matrice S dans une base orthonormée vérifie ${}^tSS = \lambda^2I$.

Définition II.1.18. — Le groupe des similitudes de E se note $GO(E)$; les positives forment un sous-groupe noté $GO^+(E)$.

Remarque : $GO(E)$ est le produit direct de $O(E)$ avec R^* .

Définition II.1.19. — Une similitude affine s est une application affine telle que \vec{s} soit une similitude vectorielle. L'ensemble $\text{Sim}(\mathcal{E})$ des similitudes de \mathcal{E} est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.

Remarque : on définit de même les similitudes positives et négatives.

Théorème II.1.20. — Soit s une similitude qui n'est pas une isométrie; alors s admet un unique point fixe appelé le centre de la similitude.

Démonstration. — D'après la proposition I.1.19, il suffit de voir que \vec{s} n'admet pas la valeur propre 1 ce qui est trivial puisque toutes les valeurs propres complexes sont de module le rapport de la similitude qui par hypothèse n'est pas égal à 1. \square

Corollaire II.1.21. — Soit s une similitude qui n'est pas une isométrie et soit λ son rapport et A son centre. Alors s s'écrit sous la forme $s = h(A, \lambda) \circ f = f \circ h(A, \lambda)$ où $h(A, \lambda)$ est l'homothétie de centre A et de rapport λ et f une isométrie admettant A pour point fixe.

Démonstration. — Il suffit de poser $f = h(A, \lambda^{-1}) \circ s$ qui est alors une isométrie laissant A fixe. \square

II.2. Généralités

Dans la suite \mathcal{E} désigne un espace affine de dimension n tel que $\vec{\mathcal{E}}$ est un espace euclidien, i.e. un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

II.2.1. Sphères. —

Définition II.2.1. — On définit une distance d sur \mathcal{E} par la formule $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$ que l'on notera aussi AB .

Définition II.2.2. — Soit O un point de \mathcal{E} et r un réel positif ou nul. La sphère (resp. la boule fermée) de centre O et de rayon r est l'ensemble

$$\mathfrak{S}(O, r) = \{M \in \mathcal{E}, OM = r\}, \quad (\text{resp. } \mathfrak{B}(O, r) = \{M \in \mathcal{E}, OM \leq r\}).$$

Remarque : en dimension 2 on parle habituellement de cercle et de disque.

Remarque : l'équivalence des normes en dimension finie se traduit dans notre contexte en disant qu'étant donnée deux structures euclidiennes sur \mathcal{E} , il existe $r \leq t$ tel que $\mathfrak{B}(0, r) \subset \mathfrak{B}'(0, 1) \subset \mathfrak{B}(0, t)$, où $\mathfrak{B}'(0, 1)$ est la boule unité pour le deuxième produit scalaire.

Lemme II.2.3. — Soit A, B deux points distincts de \mathcal{E} . L'ensemble

$$\left\{ M \in \mathcal{E} : (\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB}) = 0 \right\}$$

est la sphère de centre l'isobarycentre de A, B et passant par A, B .

Démonstration. — Notons I l'isobarycentre de A, B . On écrit

$$(\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \mid \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 - IA^2$$

de sorte que la ligne de niveau de l'énoncé est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $MI = r = IA^2$, i.e. $\mathfrak{S}(I, IA)$. \square

Proposition II.2.4. — Soit \mathcal{V} un sous-espace affine de \mathcal{E} , O un point de projeté orthogonal Ω sur \mathcal{V} . L'intersection de $\mathfrak{S}(O, r)$ avec \mathcal{V} est :

- vide si $r < O\Omega$;
- la sphère de \mathcal{V} de centre Ω et de rayon $s = \sqrt{r^2 - O\Omega^2}$ sinon.

Démonstration. — On rappelle que si $M \in \mathcal{V}$ alors $(\overrightarrow{\Omega M} \mid \overrightarrow{\Omega O}) = 0$; le résultat découle alors du théorème de Pythagore. \square

Définition II.2.5. — On dit qu'un sous-espace affine \mathcal{V} est tangent à une sphère \mathfrak{S} en un point A si $\mathcal{V} \cap \mathfrak{S} = \{A\}$.

Corollaire II.2.6. — Soit \mathfrak{S} une sphère et $A \in \mathfrak{S}$; il existe alors un unique hyperplan tangent à \mathfrak{S} en A , noté $T_a(S)$. C'est l'hyperplan orthogonal à la droite (OA) passant par A où O est le centre de \mathfrak{S} .

Définition II.2.7. — La puissance d'un point A par rapport à $\mathfrak{S}(O, r)$ est la quantité $p(A, \mathfrak{S}) = OA^2 - r^2$.

Lemme II.2.8. — Soit $O \in \mathcal{E}$ et $r > 0$ un réel strictement positif. Pour $A \in \mathcal{E}$ et \mathcal{D} une droite passant par A qui coupe $\mathfrak{S}(O, r)$ en M et N . Alors $p(A, \mathfrak{S}) = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$.

Démonstration. — Notons M' tel que $[MM']$ est un diamètre de $\mathfrak{S}(O, r)$ et on écrit

$$(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'N}) = (\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AM'})$$

d'après le lemme II.2.3. En développant le dernier terme comme dans la preuve de II.2.3, on obtient $AO^2 - r^2$ d'où le résultat. \square

II.2.2. Orthogonalité. —

Définition II.2.9. — Deux sous-espaces affines \mathcal{V} et \mathcal{W} sont dits orthogonaux si $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ le sont ; il sont dits perpendiculaires s'ils sont orthogonaux et d'intersection non vide.

Définition II.2.10. — Un repère affine A_0, \dots, A_n est dit orthonormé si $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Définition II.2.11. — Soient \mathcal{V} un sous-espace affine de dimension k , M un point de \mathcal{E} et \mathcal{W} le sous-espace affine de dimension $n - k$ passant par M et perpendiculaire à \mathcal{V} . L'unique point d'intersection de \mathcal{V} et \mathcal{W} est appelé le projeté orthogonal de M sur \mathcal{V} . L'application qui à M associe son projeté orthogonal sur \mathcal{V} est appelé la projection orthogonale de \mathcal{E} sur \mathcal{V} et notée $p_{\mathcal{V}}$.

Remarque : le projeté orthogonal A de M sur \mathcal{V} vérifie les propriétés suivantes qui le caractérise :

- pour tout $B \in \mathcal{V}$, on a $(\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AM}) = 0$;
- pour tout $B \in \mathcal{V}$, on a $MA \leq MB$;
- pour tout $B \in \mathcal{V} - \{A\}$, on a $MA < MB$.

Définition II.2.12. — On appelle distance de M à \mathcal{V} la distance de M à son projeté orthogonal sur \mathcal{V} ; c'est la plus courte distance de M à un point de \mathcal{V} .

Définition II.2.13. — Soient A et B deux points distincts de \mathcal{E} , alors l'ensemble des points M équidistants de A et B est l'hyperplan affine perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de A et B . On l'appelle l'hyperplan médiateur ou la médiatrice en dimension 2.

Proposition II.2.14. — Dans un triangle ABC du plan affine euclidien, les médiatrices sont concourantes.

Démonstration. — Si O est l'intersection de deux de ces médiatrices, alors O est à égale distance de A , B et C et appartient donc à la troisième médiatrice. \square

Définition II.2.15. — Soient A et B deux points distincts de \mathcal{E} ; pour C un point de \mathcal{E} n'appartenant pas à (AB) , l'hyperplan parallèle à l'hyperplan médiateur et passant par C est appelée la hauteur de AB issue de C .

Proposition II.2.16. — Dans un triangle ABC du plan affine euclidien, les hauteurs sont concourantes.

Démonstration. — Considérons comme sur la figure 1, la droite D_A passant par A et parallèle

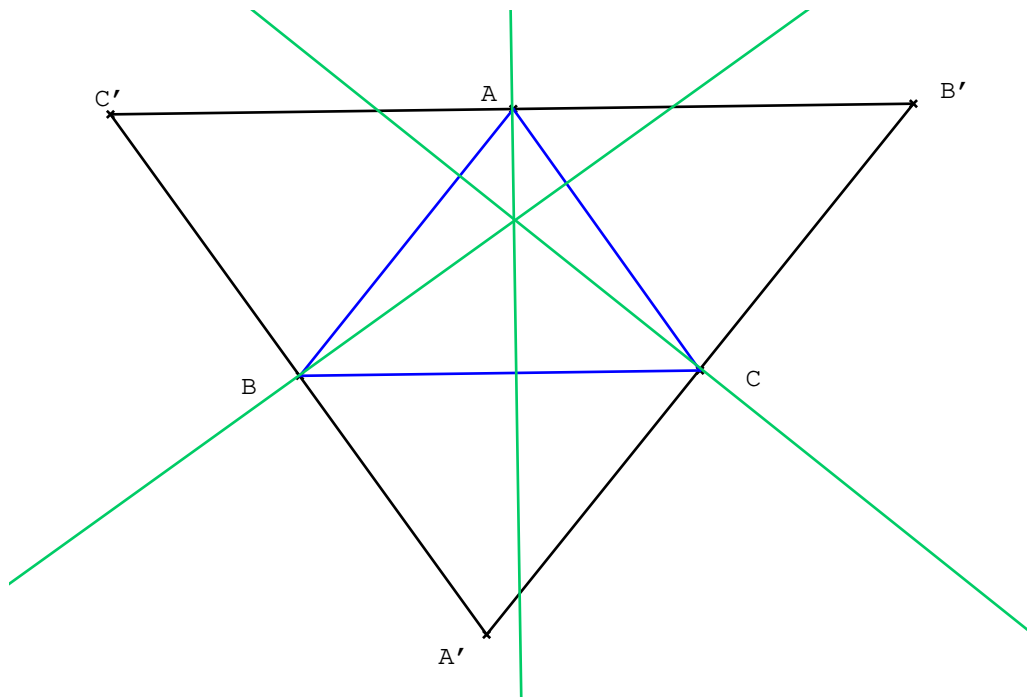


FIGURE 1. Hauteurs ou médiatrices

à (BC) et de même pour les autres sommets B et C . Les droites D_A, D_B et D_C déterminent un triangle $A'B'C'$ dans lequel les hauteurs de ABC en sont les médiatrices. Le résultat découle alors de la proposition précédente. \square

II.2.3. Angles d'un plan vectoriel orienté. — On cherche à définir la notion d'angle, de droites ou de demi-droites, orienté ou non, se coupant en un point O . On se ramène pour cela en vectoriel en pointant notre espace affine en O ; en considérant alors l'espace vectoriel engendré par ces droites, on se ramène au cas de \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel et d'une orientation.

Définition II.2.17. — Un angle orienté (reps. non orienté) de droites de \mathbb{R}^2 est une classe d'équivalence de l'ensemble des couples de droites de E sous l'action de $O_2^+(\mathbb{R})$ (resp. $O_2(\mathbb{R})$). On définit de la même la notion d'angle orienté ou non orienté de demi-droites.

Dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , la matrice d'une rotation $r \in O_2^+(\mathbb{R})$ est donnée par un élément $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par la formule $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Le paramètre θ est appelé l'angle de la rotation.

Définition II.2.18. — La mesure d'un angle orienté de deux demi-droites de \mathbb{R}^2 est le paramètre $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de l'unique rotation r qui envoie la première demi-droite sur la deuxième. La mesure d'un angle orienté de deux droites de \mathbb{R}^2 est le paramètre $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, tels que $\theta, \theta + \pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ correspond aux angles des deux rotations qui envoient la première droite sur la deuxième.

Proposition II.2.19. — Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ trois demi-droites (resp. droites) de \mathbb{R}^2 ; la mesure de l'angle entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est la somme de la mesure des angles entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 avec celui entre \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 .

Démonstration. — Le résultat découle directement de la définition de la mesure d'un angle de demi-droites (resp. de droites) et de l'isomorphisme de groupe $SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dans le cas des droites il suffit de remarquer que pour r_1 et r_2 deux rotations alors l'angle de $(\pm r_1) \circ (\pm r_2)$ est bien défini modulo π . \square

Notation II.2.20. — Si A, B, C désignent trois points distincts du plan affine euclidien, on note $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ la mesure de l'angle orienté entre les demi-droites (A, \overrightarrow{AB}) et (A, \overrightarrow{AC}) . L'angle orienté des droites associées sera noté \widehat{BAC} .

Dans un triangle ABC on notera

$$\alpha = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}, \quad \beta = \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}, \quad \gamma = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$$

et $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les angles orientés de droites correspondant.

Lemme II.2.21. — Soit O une point du plan affine euclidien ainsi que trois points A, B, C distincts de O . On a alors la formule

$$\begin{aligned} \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} &\equiv \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} + \widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})} \pmod{2\pi} \\ \widehat{AOC} &\equiv \widehat{AOB} + \widehat{BOC} \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Le résultat découle directement de la définition de la mesure d'un angle et de la structure de groupe de $SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. \square

Lemme II.2.22. — Trois points distincts A, B, C du plan affine euclidien sont alignés si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Démonstration. — Il suffit de noter que l'homothétie vectorielle de rapport -1 est la rotation d'angle π , i.e. $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$. \square

Proposition II.2.23. — Soit ABC un triangle de \mathcal{E} dont on note α, β, γ les angles orientés respectivement en A, B et C . On a alors $\alpha + \beta + \gamma = \pi \pmod{2\pi}$.

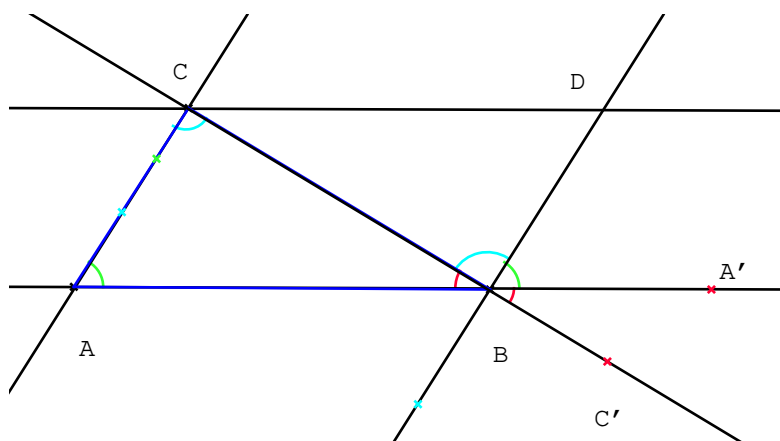


FIGURE 2. Somme des angles d'un triangle euclidien

Démonstration. — Considérons le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme ; on note A' (resp. C') un point de (AB) (resp. (AC)) tel que $B \in [AA']$ (resp. $B \in [CC']$). On a alors

$$\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD})} \\ \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA'})} \\ \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})} \end{cases}$$

de sorte que

$$\alpha + \beta + \gamma = \widehat{(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA'})} + \widehat{(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD})} + \widehat{(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})} = \widehat{(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BC})} = \pi \pmod{2\pi}.$$

\square

En ce qui concerne les angles non orientés, commet la réflexion par rapport à la bissectrice échange l'ordre, la mesure n'est définie qu'au signe près ; parfois on choisit comme la mesure d'un angle orienté son unique représentant dans $[0, \pi]$. Notons aussi, comme $\pm\alpha \pm \beta$ n'est pas égal à $\pm(\alpha + \beta)$ que la propriété d'additivité des angles n'est plus valide. Leur utilisation correspondra au cas où seul intervient le cosinus de l'angle de sorte que l'orientation n'est pas nécessaire. Citons une de ces situations.

Proposition II.2.24. — Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles de centre respectifs O_1, O_2 et de rayons R_1, R_2 . Dans le cas où \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 s'intersectent, tout point M de l'intersection définit, avec O_1 et O_2 , un angle non orienté θ de vecteurs tel que

$$\cos\theta = \frac{R_1^2 + R_2^2 - (O_1O_2)^2}{2R_1R_2}.$$

Remarque : on renvoie le lecteur au chapitre suivant pour l'utilisation de la quantité $\cos\theta$ dans le contexte de la géométrie inversive.

Démonstration. — Notons que si N est un autre point de l'intersection avec $\overrightarrow{NO_1}$ et $\overrightarrow{NO_2}$ s'obtiennent comme l'image par la réflexion par rapport à (O_1O_2) des vecteurs $\overrightarrow{MO_1}$ et $\overrightarrow{MO_2}$; autrement dit l'angle non orienté des vecteurs $\overrightarrow{MO_1}$ et $\overrightarrow{MO_2}$ est bien indépendant du point M de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ choisi. On calcule alors

$$\|\overrightarrow{O_1O_2}\|^2 = \|\overrightarrow{O_1M}\|^2 + \|\overrightarrow{MO_2}\|^2 - 2(\overrightarrow{O_1M} | \overrightarrow{O_2M}) = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\theta.$$

□

Remarque : la mesure de l'angle non orienté θ entre deux cercles est aussi celui entre les tangentes en un point de leur intersection. On note aussi que les cercles sont tangents intérieurement (resp. extérieurement) si et seulement si $\theta \in [0, \pi]$ est égal à 0 (resp. π).

II.3. En dimension 2

II.3.1. Théorème de l'angle au centre. —

Théorème II.3.1. — Soit A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et $T \neq B$ un point de la tangente en B alors

$$\widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BC})} \pmod{2\pi}.$$

Démonstration. — Les notations sont celles de la figure 3 : le triangle $A'OB$ étant isocèle, on a d'après II.2.23 $\widehat{(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB})} = \pi - 2(\pi/2 - \widehat{(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})}) = 2\widehat{(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})}$. De même pour le point C , on obtient $\widehat{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA'})} = \pi - 2(\pi/2 - \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'})}) = 2\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'})}$ et le résultat en découle par addition des angles. □

Corollaire II.3.2. — **Critère de cocyclicité** Quatre points distincts deux à deux, A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD} \pmod{\pi}.$$

II.3.2. Axe radical et autres lignes de niveau. — Nous avons déjà rencontré un certain nombre de lignes de niveaux :

- $\{M \in \mathcal{E} : OM = r\}$, i.e. celle du cercle de centre $O \in \mathcal{E}$ et de rayon r ;
- $\{M \in \mathcal{E} : (\overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB}) = 0\}$, i.e. le cercle de diamètre $[AB]$;
- $\{M \in \mathcal{E} : MA = MB\}$, soit la médiatrice de $[AB]$;
- $\{M \in \mathcal{E} : \widehat{AMB} = \alpha \pmod{\pi}\}$ est le cercle passant par A, B et de centre O tel que $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 2\alpha \pmod{2\pi}$.

On peut préciser le dernier point en considérant les angles des vecteurs.

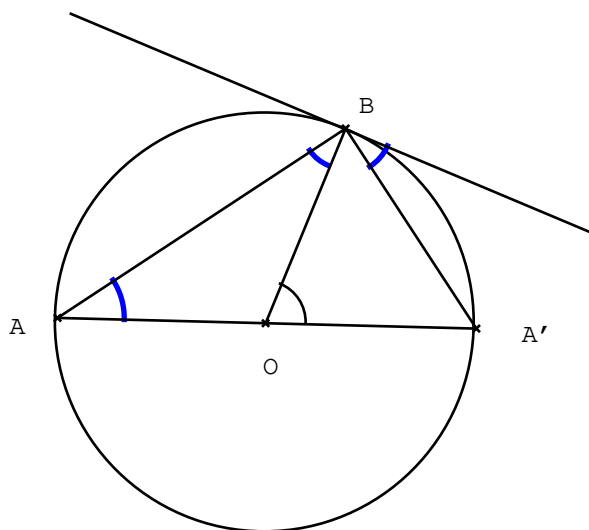


FIGURE 3. Preuve du théorème de l'angle au centre

Proposition II.3.3. — Soient A, B deux points distincts de \mathcal{E} et $\alpha \in [0, 2\pi]$ un réel. L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \alpha$ est un arc de cercle passant par les points A et B de centre O tel que $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 2\alpha$ et délimité par (AB) , cf. la figure 4. L'autre arc de cercle correspond à la ligne de niveau $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \alpha + \pi$.

Remarque : avec les angles non orientés de vecteur, la ligne de niveau correspondante est la réunion de l'arc de cercle de la proposition précédente avec son symétrique par rapport à (AB) .

Proposition II.3.4. — Soient $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(O, r)$ et $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'(O', r')$ deux cercles non concentriques. L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ qui ont même puissance par rapport à \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' est la droite orthogonale à (OO') en le point $H \in (OO')$ défini par

$$\overrightarrow{OH} = \frac{r^2 - (r')^2 + O'O^2}{2O'O^2} \overrightarrow{O'O}.$$

Remarque : pour deux cercles concentriques, la ligne de niveau considérée est clairement vide.

Démonstration. — On cherche donc les points $M \in \mathcal{E}$ tels que $OM^2 - r^2 = O'M^2 - (r')^2$. Si $M \in (OO')$ alors on écrit

$$OM^2 - (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM})^2 = O'O^2 + 2\overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{OM}$$

qui doit donc être égal à $r^2 - (r')^2$. Pour $H \in (OO')$ tel que $\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{O'O}$, on obtient alors

$$-h \cdot O'O^2 = r^2 - (r')^2 - O'O^2$$

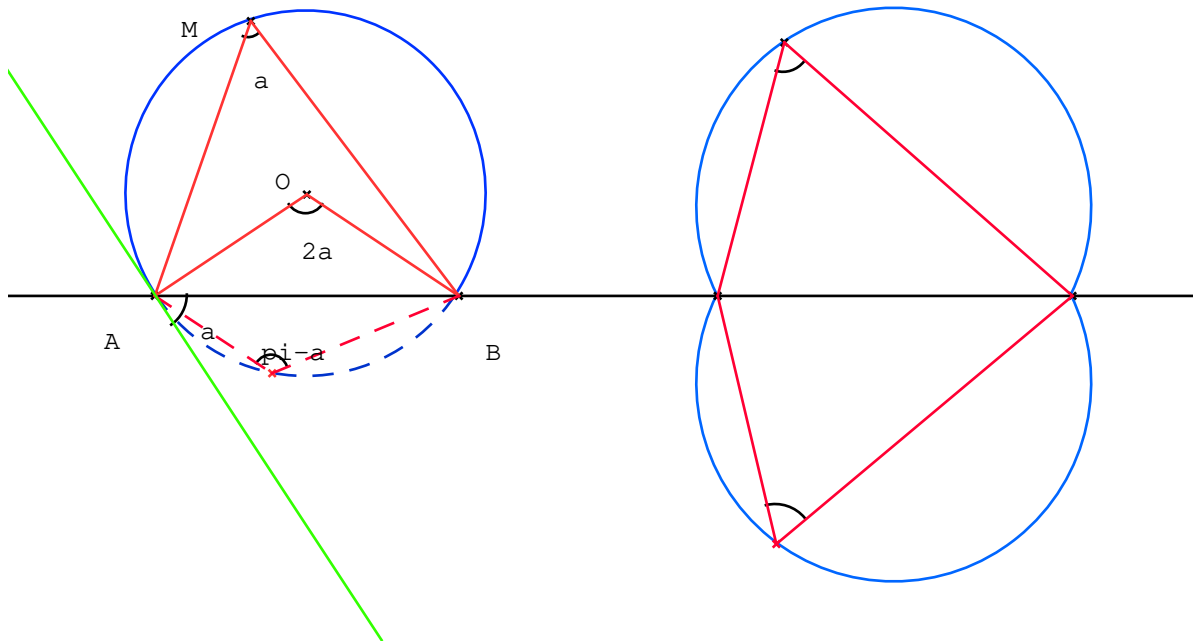


FIGURE 4. Lignes de niveau : arcs capables

et donc $\overrightarrow{OH} = \frac{r^2 - (r')^2 + O'O^2}{2O'O^2} \overrightarrow{O'O}$. Pour M un point de la ligne de niveau, on note P son projeté orthogonal sur (OO') ; en décomposant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{PM}$, on obtient $OP^2 - O'P^2 = r^2 - (r')^2$ et donc $P = H$. Ainsi les points M cherchés sont ceux dont la projection orthogonale sur (OO') est H , d'où le résultat. \square

Remarque : la proposition précédente et sa preuve sont valables en toute dimension, conduisant à la définition suivante.

Définition II.3.5. — L'hyperplan associée à la ligne de niveau de la proposition précédente s'appelle l'**hyperplan radical** de \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' . En dimension 2 on parle plutôt d'axe radical.

Corollaire II.3.6. — Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois cercles dont les centres ne sont pas alignés; il existe alors un unique point du plan, appelé **centre radical** de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, ayant même puissance par rapport à ces trois cercles.

Démonstration. — Un tel point appartient nécessairement à l'axe radical de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ainsi qu'à celui de \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 . Ceux-ci étant deux droites non parallèles, puisque les centres des trois cercles ne sont pas alignés, ils s'intersectent en un unique point qui a donc même puissance par rapport à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 . \square

on appelle ligne de niveau de Liebnitz les lignes de niveau suivantes.

Proposition II.3.7. — Soient A_1, \dots, A_n des points de \mathcal{E} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des scalaires; on note $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i MA_i^2$ et pour $k \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{L}_k = \{M \in \mathcal{E} : f(M) = k\}$.

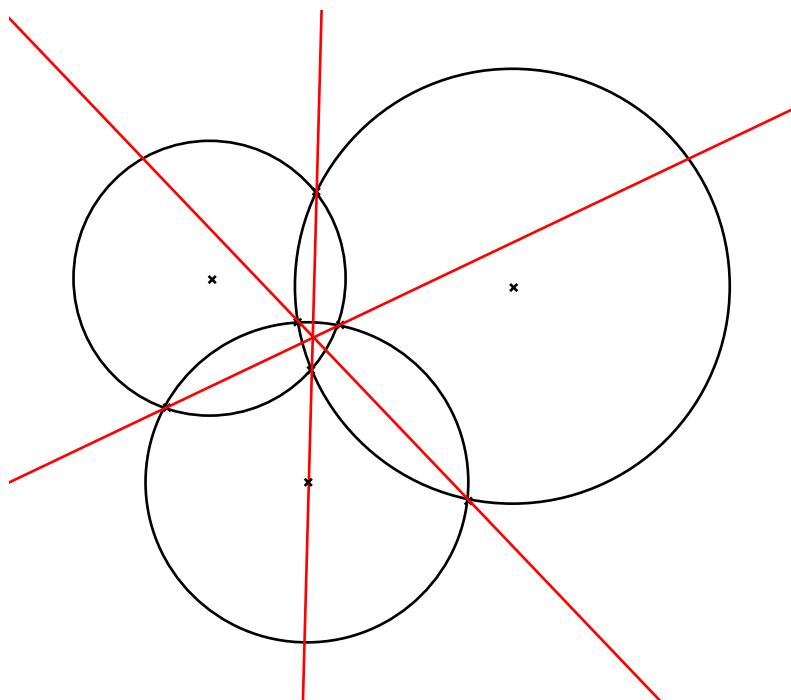


FIGURE 5. Centre radical de trois cercles

1. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ alors on rappelle que $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ est un vecteur indépendant du point O considéré :
 - (a) si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la ligne de niveau $\mathcal{L}_k = \{M \in \mathcal{E} : (\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = \frac{f(O)-k}{2}\}$, soit une droite orthogonale à (O, \vec{u}) ;
 - (b) si $\vec{u} = \vec{0}$ alors f est une fonction constante et toutes les lignes de niveaux sont vides sauf une égale à tout l'espace.
2. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ alors on note G le barycentre des points pondérés (A_i, λ_i) . Alors les lignes de niveau sont des cercles centrés en G et de rayon $\sqrt{\frac{k-f(G)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}}$ étant entendu qu'ils sont vides dans le cas où la fraction $\frac{k-f(G)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ est < 0 .

Démonstration. — On décompose $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$ et on calcule

$$f(M) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) OM^2 + 2(\overrightarrow{MO} | \vec{u}) + f(O)$$

de sorte que si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ alors $f(M) = f(O) + 2(\overrightarrow{MO} | \vec{u})$ et on retrouve les situations (i) et (ii) de l'énoncé.

Dans le cas (2) pour $O = G$, on obtient $f(M) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i)GM^2 + f(G)$ et on retrouve l'affirmation de l'énoncé. \square

II.3.3. Relations trigonométriques dans le triangle. — Étant donné un triangle ABC , on note :

- a, b, c les longueurs respectives des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ et on pose $p = (a + b + c)/2$ le demi-périmètre ;
- S l'aire de ABC ;
- R le rayon du cercle circonscrit ;
- α, β, γ les angles aux sommets.

Comme déjà observé cela fait 8 invariants euclidiens associés à un triangle alors que l'espace des tels triangles modulo l'action du groupe euclidien est de dimension 3, d'où l'existence de relations entre ces paramètres que l'on se propose d'expliciter dans ce paragraphes. Rappelons que la première relation entre ces paramètres était $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Proposition II.3.8. — *La loi des sinus est la relation suivante*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Démonstration. — On a clairement $S = \frac{bc\sin\alpha}{2}$ ce qui donne les trois premières égalités. Pour la dernière, on considère dans le cercle circonscrit le point A' diamétralement opposé à A . Le triangle $AA'C$ étant rectangle en C , on en déduit alors $b = 2R\sin\beta$, en utilisant le théorème de l'angle au centre (en effet $\sin\beta = \sin\widehat{AA'C}$). \square

Proposition II.3.9. — *La formule d'Al-Kashi est la relation suivante*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Démonstration. — On écrit simplement $a^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = c^2 - 2bccos\alpha + b^2$. \square

Remarque : on peut aussi exprimer la puissance de A par rapport au cercle de centre B passant par C : cette puissance est égale à $c^2 - a^2$ et aussi à $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ où D est le deuxième point d'intersection de (AC) avec ce cercle, soit $b(b - 2acos\gamma)$ d'où le résultat. Il existe d'autres démonstrations qui utilisent des découpages d'aires.

A ce stade nous avons trouvé 8 relations (une pour la somme des angles, 4 pour la loi des sinus et 3 pour Al-Kashi) sur nos 8 paramètres de sorte que ces relations ne sont pas indépendantes entre elles. Remarquons tout d'abord que :

- si a, b, c sont donnés alors on retrouve α, β, γ grâce à Al-Kashi puis S et R via la loi des sinus.
- si a, b, γ sont donnés alors c se calcule par Al-Kashi puis les autres paramètres en utilisant le point précédent.
- si a, β, γ sont donnés, les deux relations d'Al-Kashi pour β et γ permettent de calculer b et c et on conclut comme précédemment.
- si a, b, R (resp. α, β, R , resp. a, β, R) sont donnés alors la loi des sinus donne α (resp. a , resp. α) et on conclut comme avant.
- si a, b, S sont donnés alors la loi des sinus donne γ et on conclut comme avant.
- si a, β, S sont donnés alors c se calcule par la loi des sinus et on conclut comme avant.
- si α, β, S sont donnés alors le triangle est défini à similitude près et S fixe le rapport de similitude donc tous les paramètres sont fixés.
- si α, S, R sont fixés alors, d'après le théorème de l'angle au centre cela fixe a et on se ramène à un des cas déjà étudiés.

- si a, S, R sont fixés alors le théorème de l'angle au centre fixe α et on conclut comme ci-avant.
- si a, β, R sont fixés alors le théorème de l'angle au centre donne α et on se ramène à une des situations déjà étudiées.
- si α, β, R sont donnés alors d'après le théorème de l'angle au centre on obtient a et b soit une situation déjà traitée.

Ainsi pour choix de paramètres fondamentaux, tous les choix raisonnables, i.e. en écartant ceux où les trois paramètres sont dans une même relation, conviennent et les relations données sont génératrices au sens où elles permettent d'obtenir tous les autres paramètres.

II.3.4. Triangles semblables. — Le groupe des similitudes étant de dimension 4, il nous faut 2 paramètres pour classifier les triangles à similitude près. Nous disposons des invariants numériques suivants :

- α, β, γ les trois angles aux sommets ;
- les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ et $\frac{c}{a}$ des longueurs des côtés.

En ce qui concerne les relations, nous avons :

- $\alpha + \beta + \gamma = \pi$;
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$;
- les formules d'Al-Kashi que l'on écrit sous la forme

$$2\cos\alpha = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}.$$

Remarque : $\frac{S}{ab} = \frac{1}{2}\sin\gamma$ est aussi un invariant numérique de la géométrie semblable ainsi donc que $\frac{S}{bc}$ et $\frac{S}{ac}$. De la loi des sinus on en déduit alors que $\frac{R}{a} = \frac{bc}{4S}$ est un invariant ainsi donc que $\frac{R}{b}$ et $\frac{R}{c}$; il en est de même pour $\frac{r}{a}$, $\frac{r}{b}$ et $\frac{r}{c}$.

En ce qui concerne la description des triangles du plan affine à similitudes près il sont classifiés par :

- l'ensemble des couples (α, β) d'éléments de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tels que $\alpha + \beta \leq \pi$. On récupère les longueurs des côtés à homothéties près en procédant comme dans le cas euclidien ; par exemple la donnée de $a = 1, \alpha, \beta$ permet de préciser toutes les autres données. On peut aussi décrire l'ensemble des paramètres comme $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/\mathfrak{S}_3$ avec les notations du §??, en associant à $(a : b : c)$ le triplet $(\frac{\pi a}{a+b+c}, \frac{\pi b}{a+b+c}, \frac{\pi c}{a+b+c})$.
- l'ensemble des couples $(\alpha, \frac{b}{c}) \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^\times$; la formule d'Al-Kashi pour $\cos\alpha$ permet d'obtenir $\frac{a}{b}$ et donc $\frac{a}{c}$ puis on procède comme dans le cas isométrique.
- l'ensemble $(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$; pour $a = 1$ cela donne b, c et on continue comme dans le cas isométriques en libérant à la fin le paramètre a .

Corollaire II.3.10. — Théorème de Pythagore

Pour tout triangle rectangle en A , on a la relation

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1.$$

Remarque : partant de l'algèbre linéaire euclidienne, le théorème de Pythagore est intrinsèque à la théorie. La preuve que nous présentons ici n'a de sens que dans une présentation axiomatique de la géométrie euclidienne à la Euclide.

Démonstration. — On note AH la hauteur menée de A sur BC , les triangles ABC et AHB sont semblables de sorte que $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$. De même on a $CH^2 = CH \cdot CB$ et donc $AB^2 + AC^2 = (BH + HC)BC = BC^2$; \square

II.4. En dimension 3

On suppose désormais que l'espace affine euclidien \mathcal{E} est de dimension 3 muni d'une orientation.

II.4.1. Produit mixte et produit vectoriel. — Étant donnés 3 vecteurs de E , leur déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base ce qui permet de poser la définition suivante.

Définition II.4.1. — L'application qui à trois vecteurs de E associe leur déterminant dans une base orthonormée directe définit une forme 3-linéaire alternée

$$(u_1, u_2, u_3) \in E^3 \mapsto [u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}$$

que l'on appelle *le produit mixte*.

Remarque : on rappelle que si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $[f(u_1), f(u_2), f(u_3)] = \det f [u_1, u_2, u_3]$.

Définition II.4.2. — Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$, la forme linéaire $\vec{w} \mapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ s'identifie via l'isomorphisme canonique $E \rightarrow E^*$ défini par $\vec{x} \mapsto (\vec{y} \mapsto (\vec{x}, \vec{y}))$, à un vecteur que l'on note $\vec{u} \wedge \vec{v} \in E$ appelé le produit vectoriel de \vec{u} par \vec{v} :

$$\forall \vec{w} \in E, (\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

Remarque : cette construction du produit vectoriel de deux vecteurs est particulier au cas de la dimension 3 ; l'équivalent en dimension n serait le produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs.

On a les propriétés simples suivantes :

- l'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est bilinéaire, alternée ; en particulier $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et \vec{v} ;
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur nul si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont liés ;
- si \vec{u} et \vec{v} sont libres alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe ; elle est orthogonale si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Remarque : dans une base orthonormale,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Corollaire II.4.3. — Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$, on a

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|,$$

où l'angle est pris dans le plan engendré par \vec{u}, \vec{v} .

Remarque : en utilisant que $|(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| |\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$, on en déduit que

$$(\vec{u}, \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2,$$

de sorte que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ avec égalité si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Proposition II.4.4. — Formule du double produit vectoriel

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$, on a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})\vec{v} - (\vec{u}, \vec{v})\vec{w}.$$

Démonstration. — Les applications $E^3 \rightarrow E$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

et

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto (\vec{u}, \vec{w})\vec{v} - (\vec{u}, \vec{v})\vec{w}$$

sont trilineaires, à valeurs dans $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$. Pour $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E , une base de E^3 est $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ avec $1 \leq i, j, k \leq 3$ et on vérifie aisément que ces deux applications coïncident sur cette base et donc sont égales. \square

Théorème II.4.5. — Formule de Rodrigues

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur unitaire ; la rotation d'axe orienté par \vec{u} et d'angle θ s'exprime par la formule

$$\vec{x} \mapsto \cos\theta \vec{x} + (1 - \cos\theta)(\vec{u}, \vec{x})\vec{u} + \sin\theta \vec{u} \wedge \vec{x}.$$

Démonstration. — Notons $f(\vec{x})$ le membre de droite de la formule de Rodrigues ; l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des trois applications linéaires :

- l'identité $\vec{x} \mapsto \vec{x}$;
- la projection orthogonale sur la droite dirigée par \vec{u} : $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, \vec{u})\vec{u}$;
- $\vec{x} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{x}$.

On complète \vec{u} en une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de sorte que la matrice de f dans cette base est

$$\cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien la matrice de rotation $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ de l'axe orienté par \vec{u} et d'angle θ . \square

II.4.2. Angles. — On suppose que E est un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension 3 muni d'une orientation. Comme en dimension 2, l'angle de deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} de E est une orbite sous le groupe orthogonal $SO(3, \mathbb{R})$.

Remarque : on notera bien que les orbites sous $SO(3, \mathbb{R})$ et $O(3, \mathbb{R})$ des couples de vecteurs de E , sont les mêmes ; en effet le retournement selon la bissectrice de \vec{u}, \vec{v} dans le plan $P = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ échange \vec{u} et \vec{v} . Ainsi il n'y a pas de distinction entre les angles orientés et non orientés de vecteurs.

La mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ se définit en le considérant comme un angle non orienté du plan $P = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Remarque : la relation de Chasles sur l'additivité des mesures des angles, n'est valide que pour des vecteurs coplanaires.

On définit de même les angles de demi-droites, de droites ainsi que leurs mesures.

Définitions II.4.6. — — **L'angle dièdre** est l'orbite sous $SO(3, \mathbb{R})$ de deux demi-plans limités par une droite commune orientée : les deux demi-plans $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ sont appelés **les faces** et la droite commune \overrightarrow{xy} **l'arête** du dièdre $\mathcal{P}.\overrightarrow{xy}.\mathcal{P}'$.

- On appelle mesure de l'angle d'une face, la mesure de l'angle non orienté des deux arêtes la définissant.
- On appelle **rectiligne** du dièdre l'angle plan orienté obtenu en coupant le dièdre par un plan perpendiculaire \mathcal{Q} à son arête. L'orientation de l'espace et de l'arête munit \mathcal{Q} d'une orientation et la mesure de l'angle dièdre est alors la mesure de l'angle orienté des droites $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}$ du plan orienté \mathcal{Q} .
- On définit la somme de deux dièdres en faisant coïncider leur arête orientée et en additionnant leur rectiligne ; on peut ainsi parler de plan bissecteur d'un dièdre.
- Plus généralement on appelle **angle polyèdre** la figure formée par plusieurs plans passant par un même point S appelé **sommet**, et limités à leurs intersections successives, lesquelles sont des demi-droites appelées **arêtes**.
- Un angle polyèdre est dit convexe s'il est tout entier d'un même côté par rapport au plan d'une quelconque de ses faces.

Remarque : les trièdres sont nécessairement convexes.

Pour mesurer l'angle θ que font deux demi-droites d'extrémité O , on trace un cercle de centre O , de rayon $r > 0$ de sorte que $\theta = \frac{l(r)}{r}$ où $l(r)$ est la longueur de l'arc de ce cercle délimité par ces deux demi-droites. Plus généralement l'angle plan sous lequel on voit de O la courbe Γ est défini par l'intégrale

$$\theta = \int_{\Gamma} \frac{(\overrightarrow{OM}, d\overrightarrow{M})}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}.$$

On généralise ces définitions en dimension 3 avec l'angle solide :

Définition II.4.7. — L'angle solide, mesuré en stéradian, d'un cône de sommet O est la quantité

$$\Omega = \frac{s(r)}{r}$$

où $s(r)$ est l'aire de la sphère de centre O et de rayon r délimité par le cône \mathfrak{S} .

L'angle solide sous lequel on voit de O la surface \mathfrak{S} est l'intégrale

$$\Omega = \int \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\overrightarrow{OM}, \vec{n}) ds}{\|\overrightarrow{OM}\|^3}$$

où \vec{n} est le vecteur normal à \mathfrak{S} en M .

Exemple : l'angle solide de tout l'espace est 4π .

II.4.3. Formule d'Euler. — On nomme polyèdre un volume limité par des surfaces toutes planes : les portions de plan qui le délimitent sont appelés ses faces. Il est dit convexe s'il est situé tout entier d'un seul et même côté par rapport au plan d'une quelconque d'une de ses faces.

Proposition II.4.8. — **Formule d'Euler**

Soient F (resp. A , resp. S) le nombre de faces (resp. d'arêtes, resp. de sommets) d'un polyèdre convexe, on a alors $F - A + S = 2$.

Démonstration. — Choisissons un point s à l'extérieur du polyèdre P , au dessus de l'une de ses faces f . Soit alors la projection stéréographique à partir de s sur un plan H parallèle à f à l'extérieur de P et de l'autre côté par rapport à s . Par convexité de P et si s est assez proche de f , l'image P' de P est un polygone de points extrémaux les images des sommets de f , découpé par d'autres polygones qui sont les images des autres faces. Soit k le nombre de sommets de la face f ; on rappelle que dans un polygone convexe à $3 \leq i$ sommets, la somme de ses angles est égale à $(i - 2)\pi$. On calcule alors la somme de tous les angles de P' de deux façons différentes :

$$(S - k)2\pi + k\pi\left(1 - \frac{2}{k}\right) = \pi(2S - k - 2)$$

qui est aussi égale à

$$\sum_i (f_i - \delta_{i,k})i\pi\left(1 - \frac{2}{i}\right) = \pi(2A - k - 2F + 2)$$

où f_i désigne le nombre de faces formées de polygones à i côtés. Le résultat découle directement de l'égalité de ces deux calculs. \square

II.5. Algébrisations

II.5.1. Nombres complexes. — L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. L'application

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) \mapsto \frac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2}{2} \end{cases}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ tel que $(1, i)$ est une base orthonormée. Par convention le plan vectoriel \mathbb{C} est orienté de sorte que la base $(1, i)$ est directe.

Définition II.5.1. — Si z est un nombre complexe de module 1 alors son écriture dans la base orthonormée $(1, i)$ est de la forme $a + ib$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et il existe donc $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Le paramètre θ s'appelle **l'argument** de z .

Ainsi pour $z \in \mathbb{C}$, non nul, on peut l'écrire sous la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $r = |z|$ est le module de z et θ l'argument de $\frac{z}{|z|}$ qu'on appelle encore l'argument de z .

Remarque : on note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de norme 1; l'application argument définit alors un morphisme de groupe $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, i.e. l'argument de z_1z_2 est la somme des arguments de z_1 et z_2 . Via la notion d'exponentielle, on a aussi $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Revenons à la géométrie euclidienne affine; étant donné un point O du plan affine euclidien, les points du plan sont alors repérés par leur affixe qui sont un nombre complexe. Le produit scalaire s'interprète via l'application φ ci-dessus.

Lemme II.5.2. — Soient $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés du plan affine euclidien pointé en O repérés par les affixes a_1, \dots, a_n . Si $\alpha := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$ alors le barycentre de ce système a pour affixe $\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$.

Démonstration. — Le résultat découle de l'écriture $\alpha \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$. \square

En ce qui concerne le groupe des similitudes directes, on a la description suivante.

Proposition II.5.3. — L'ensemble des isométries affines positives du plan affine vectoriel pointé en O est en bijection avec $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ via l'application $(a, b) \mapsto (z \mapsto az + b)$:

- pour $a = 1$, on obtient la translation de vecteur d'affixe b ;
- pour $a \neq 1$, la transformation $z \mapsto az + b$ admet un unique point fixe $\omega = b/(1 - a)$:
 - si $|a| = 1$ avec $a \neq 1$, on écrit alors $az + b$ sous la forme $e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ et on obtient la rotation d'angle θ et de centre le point Ω d'affixe ω ;
 - si $|a| = \lambda \neq 1$ alors $az + b = \lambda e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ est la similitude directe de centre ω , de rapport λ et d'angle θ .

Remarque : la structure de groupe sur $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ par celle du groupe des similitudes directes se décrit comme suit : $(a, b).(a', b') = (aa', ab' + b)$.

Corollaire II.5.4. — Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan affine euclidien pointé en O repérés par leurs affixes respectives $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. La mesure de l'angle de vecteur $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est donnée par l'argument du nombre complexe $\frac{d-c}{b-a}$.

Démonstration. — Le vecteur \overrightarrow{AB} est repéré par l'affixe $b - a$ de sorte que si on écrit $\frac{d-c}{b-a}$ sous la forme $re^{i\theta}$, on voit que la rotation vectorielle d'angle θ envoie la demi-droite dirigée par \overrightarrow{AB} sur celle dirigée par \overrightarrow{CD} , d'où le résultat. \square

Remarque : en particulier les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires (resp. orthogonaux) si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est réel (resp. imaginaire pur).

Remarque : la symétrie par rapport à la droite passant par O et dirigée par le vecteur d'affixe $1 \in \mathbb{C}$ s'exprime en complexe sous la forme $z \mapsto \bar{z}$, de sorte que toute similitude indirecte est de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$. En particulier le groupe des similitudes du plan affine euclidien est isomorphe au produit direct des groupes $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Applications géométriques :

- l'équation complexe d'une droite :
 - passant par M_0 d'affixe z_0 et orthogonale à \vec{v} d'affixe a est $(z - z_0)\bar{a} + (\bar{z} - \bar{z}_0)a = 0$;
 - passant par $z_1 \neq z_2$ est, en utilisant le corollaire précédent, $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$ soit $(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z - 1)z + \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = 0$. Ainsi comme l'équation d'une droite est de la forme $az + b\bar{z} + c = 0$, l'équation de la droite passant z_1 et z_2 est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 \\ \bar{z} & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet en développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve une équation de la forme $az + b\bar{z} + c = 0$ qui est bien une équation de droite qui passe par z_1 et z_2 car le déterminant s'annule clairement pour $z = z_1, z_2$.

- l'équation d'un cercle :
 - centré en M_0 d'affixe a et de rayon r est donnée par $z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} - r^2 = 0$;
 - passant par z_1, z_2, z_3 distincts est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z} & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \\ z\bar{z} & z_1\bar{z}_1 & z_2\bar{z}_2 & z_3\bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet en développant par rapport à la première colonne on trouve une équation de la forme $az\bar{z} + b\bar{z} + cz + d = 0$ qui est bien une équation d'un cercle si $a \neq 0$ et sinon d'une droite et qui passe clairement par z_1, z_2, z_3 . Le coefficient de $z\bar{z}$ est nul si et seulement si, d'après ce qui précède, les points z_1, z_2, z_3 sont alignés.

On note aussi que l'affixe de son centre s'obtient en faisant le quotient des coefficients de \bar{z} et de $z\bar{z}$, i.e.

$$a = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1\bar{z}_1 & z_2\bar{z}_2 & z_3\bar{z}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}}.$$

En remarquant qu'une conique a une équation de la forme $az\bar{z} + b\bar{z}^2 + cz^2 + d\bar{z} + ez + f = 0$, on en déduit que l'équation de la conique passant par z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \bar{z} & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 & \bar{z}_4 & \bar{z}_5 \\ z^2 & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 \\ \bar{z}^2 & \bar{z}_1^2 & \bar{z}_2^2 & \bar{z}_3^2 & \bar{z}_4^2 & \bar{z}_5^2 \\ z\bar{z} & z_1\bar{z}_1 & z_2\bar{z}_2 & z_3\bar{z}_3 & z_4\bar{z}_4 & z_5\bar{z}_5 \end{vmatrix} = 0.$$

II.5.2. Quaternions. —

Définition II.5.5. — L'ensemble \mathbb{H} des quaternions est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\{1, i, j, k\}$ que l'on munit d'une loi interne $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ définie par bilinéarité à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1, \quad 1.i = i.1 = i, \quad 1.j = j.1 = j, \quad 1.k = k.1 = k \\ i^2 &= -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1 \\ ij &= k, \quad jk = i, \quad ki = j \\ ji &= -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j. \end{aligned}$$

La partie réelle (resp. imaginaire) d'un quaternion $a.1 + b.i + c.j + d.k$ est le nombre réel a (resp. $b.i + c.j + d.k$) ; il sera dit réel (resp. imaginaire pur) si sa partie imaginaire (resp. réelle) est null.

Proposition II.5.6. — *Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{H} muni de la loi interne . est un anneau non commutatif.*

Démonstration. — La première solution un peu fastidieuse consiste à vérifier un à un les axiomes qui font de $(\mathbb{H}, +, .)$ un anneau non commutatif. Une autre solution consiste à réaliser $(\mathbb{H}, +, .)$ comme un sous-anneau de l'ensemble de matrices $M_2(\mathbb{C})$. Explicitement notons

$$\mathbb{H}_{mat} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$$

et considérons l'application

$$\begin{cases} f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_{mat} \\ a.1 + b.i + c.j + d.k \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & -c - di \\ c - di & a - ib \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi la base de \mathbb{H} devient

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors aisément que f est un isomorphisme d'espace vectoriel qui transforme la multiplication de \mathbb{H} en la multiplication matricielle de \mathbb{H}_{mat} . La non commutativité est immédiate puisque par définition $i.j = -j.i$. \square

Remarque : la description de \mathbb{H} en termes de matrices à coefficients complexes permet d'introduire naturellement la conjugaison complexe en considérant l'application $A \mapsto {}^t\bar{A}$ de \mathbb{H}_{mat} .

Définition II.5.7. — Le conjugué $\overline{a + bi + cj + dk}$ d'un quaternion $a + bi + cj + dk$ est $a - bi - cj - dk$.

Remarque : en particulier,

- pour $u, v \in \mathbb{H}$ on a $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$ et $\overline{uv} = \bar{v}\bar{u}$;
- pour $u \in \mathbb{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\lambda u} = \lambda \bar{u}$;
- pour $u \in \mathbb{H}$, $\bar{\bar{u}} = u$.

Définition II.5.8. — La norme d'un quaternion $u = a + bi + cj + dk$ est le réel positif

$$\|u\| = \sqrt{u\bar{u}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Proposition II.5.9. — L'anneau $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ est un corps non commutatif de centre \mathbb{R} .

Démonstration. — Soit $u \in \mathbb{H}$ non nul ; son inverse est $\frac{1}{\|u\|}\bar{u}$. Par ailleurs si $u = a + bi + cj + dk$ est dans le centre alors $ui = ai - b - ck + dj$ et $iu = ai - b + ck - dj$ et donc $c = d = 0$. De même l'égalité $ju = uj$ fournit $b = 0$ et donc u est réel. Réciproquement tout quaternion réel est bien dans le centre. \square

Remarque : si $u \in \mathbb{H}$ est de norme 1 alors $u^{-1} = \bar{u}$.

Remarque : la norme est multiplicative, i.e. $\|uv\| = uv\bar{v} = uv\bar{u} = (v\bar{v})u\bar{u} = \|u\|.\|v\|$.

Proposition II.5.10. — Le corps \mathbb{H} est une extension de degré 2 de \mathbb{C} .

Démonstration. — On injecte tout d'abord \mathbb{C} dans \mathbb{H} en envoyant $a + ib \in \mathbb{C}$ sur $a + ib \in \mathbb{H}$. La multiplication de \mathbb{H} permet ainsi de définir une action

$$\begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \\ (z, u) \mapsto uz \end{cases}$$

de \mathbb{C} sur \mathbb{H} . De l'égalité $(u + v).z = uz + vz$, on en déduit que \mathbb{H} est ainsi muni d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel avec $(1, j)$ comme base, d'où le résultat. \square

Définition II.5.11. — On identifie l'ensemble \mathbb{H}^{im} des quaternions imaginaires purs à l'espace \mathbb{R}^3 en identifiant $x = x_1i + x_2j + x_3k$ au vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Proposition II.5.12. — Soient $x, y \in \mathbb{H}^{im}$ des quaternions imaginaires purs et \vec{x}, \vec{y} les vecteurs de \mathbb{R}^3 correspondant. La partie réelle de xy est égale à $-(\vec{x} | \vec{y})$ et sa partie imaginaire s'identifie au vecteur $\vec{x} \wedge \vec{y}$.

Démonstration. — On calcule

$$xy = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)i + (x_3y_1 - x_1y_3)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k$$

et le résultat en découle de la formule qui exprime les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs. \square

Remarque : en particulier pour un quaternion imaginaire pur x , on a $x^2 = -\|\vec{x}\|^2$.

Corollaire II.5.13. — Des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ forment une base orthonormée si et seulement si les quaternions imaginaires purs associés x, y, z vérifie les relations suivantes :

$$x^2 = y^2 = z^2 = -1, \quad xy = -yx = z, \quad yz = -zy = x, \quad zx = -xz = y.$$

Démonstration. — Les premières relations s'interprètent d'après la remarque précédente en disant que les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont unitaires. Les relations d'anticommutation sont automatiques car x, y, z sont imaginaires purs. Enfin le fait que xy, yz, zx soient imaginaires purs est équivalent à demander que $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont orthogonaux deux à deux et l'égalité $xy = z$ s'interprète en $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$ et donc la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est directe. \square

Notation II.5.14. — Soit $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{H} : \|u\| = 1\}$ l'ensemble des quaternions unitaires.

Définition II.5.15. — Pour $u \in \mathbb{U}$ un quaternion unitaire, soit $\Phi_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ définie par $\Phi_u(x) = ux\bar{u}$.

Remarque : pour tout $u \in \mathbb{U}$, l'application Φ_u est un morphisme d'anneau tel que

$$\overline{\Phi_u(x)} = \Phi_u(\bar{x}), \quad \Phi_u|_{\mathbb{R}} = \text{Id}_{\mathbb{R}}, \quad \|\Phi_u(x)\| = \|x\|$$

de sorte que la partie réelle de $\Phi_u(x)$ est égale à celle de x . Par ailleurs l'application $\Phi : u \in \mathbb{U} \mapsto \Phi_u$ est un morphisme de groupe de noyau égal à $\{\pm 1\}$ soit l'ensemble des quaternions unitaires réels.

Corollaire II.5.16. — La restriction Ψ_u de Φ_u aux quaternions imaginaires purs est, via l'identification de \mathbb{H}^{im} avec \mathbb{R}^3 , un automorphisme unitaire positif que l'on notera $\text{Rot}_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. L'application $u \mapsto \text{Rot}_u$ est alors un morphisme surjectif de \mathbb{U} sur $SO(3, \mathbb{R})$ de noyau $\{\pm 1\}$.

Démonstration. — Nous avons déjà vu que Ψ_u était unitaire, il reste donc à voir qu'il est positif. Soient donc x, y, z des quaternions imaginaires purs tels que leurs images $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . D'après le corollaire II.5.13 cela équivaut à demander la liste des relations de loc. cit. lesquelles sont clairement conservées par Ψ_u et donc Ψ_u est bien positif.

Nous avons déjà noté que $u \mapsto \text{Rot}_u$ était un morphisme de groupe dont le noyau était $\{\pm 1\}$; en ce qui concerne la surjectivité elle découle du lemme suivant en notant que pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 et θ réel $z = \cos\theta + \sin\theta x$ appartient à \mathbb{U} :

$$(\cos\theta + \sin\theta x)(\cos\theta - \sin\theta x) = 1.$$

\square

Lemme II.5.17. — Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 ; pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$u(\vec{x}, \theta) = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}x$$

où x est le quaternion imaginaire pur associé à \vec{x} . Alors $\text{Rot}_{u(\vec{x}, \theta)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe \vec{x} et d'angle θ .

Démonstration. — Complétons \vec{x} en une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de sorte que les quaternions associés x, y, z vérifient les relations du corollaire II.5.13. Comme x commute avec toute combinaison linéaire de 1 et x , on a $\Psi_{u(\vec{x}, \theta)}(x) = x$. En utilisant la relation $xy = -yx$ on calcule

$$\begin{aligned} \Psi_{u(\vec{x}, \theta)}(y) &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} x)y(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} x) \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} x)(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} x)y = (\cos \theta + \sin \theta x)y = \cos \theta y + \sin \theta z. \end{aligned}$$

De même on obtient $\Psi_{u(\vec{x}, \theta)}(z) = (\cos \theta + \sin \theta x)z = -\sin \theta y + \cos \theta z$ et on retrouve la rotation d'axe \vec{x} et d'angle θ . \square

Notation II.5.18. — Pour $x \in \mathbb{H}^{im}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{\theta x} := \cos \theta + \sin \theta x.$$

On notera que le quaternion imaginaire pure x joue un rôle identique à celui du nombre complexe i :

$$(\cos \theta + \sin \theta x)(\cos \phi + \sin \phi x) = \cos(\theta + \phi) + \sin(\theta + \phi)x.$$

Corollaire II.5.19. — La rotation $\text{Rot}_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ induite par un quaternion unitaire $u = a + bi + cj + dk \in \mathbb{U}$ avec $u \neq \pm 1$ est la rotation d'angle $\theta = \arccos a$ autour de $\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(b, c, d)$.

Démonstration. — Ce sont des valeurs de θ et \vec{x} qui donnent $u(\vec{x}, \theta) = a + bi + cj + dk$. \square

On peut utiliser la paramétrisation suivante pour expliciter la composition de deux rotations vectorielles à partir de la définition de la multiplication des quaternions sous la forme $e^{\theta x}$.

Corollaire II.5.20. — Soient $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\text{Rot}_{\vec{a}, \alpha} \circ \text{Rot}_{\vec{b}, \beta} \neq \text{Id}$ alors

$$\text{Rot}_{\vec{a}, \alpha} \circ \text{Rot}_{\vec{b}, \beta} = \text{Rot}_{\vec{c}, \gamma}$$

avec $0 < \gamma < 2\pi$ vérifiant

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\vec{a}, \vec{b})$$

et avec $\vec{c} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ pour

$$\vec{v} = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \vec{b} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \vec{a} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

Notation II.5.21. — On notera les quaternions sous la forme $a + \vec{p}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ que l'on identifie respectivement à sa partie réelle et imaginaire.

Remarque : avec ces notations le produit quaternionique de deux vecteurs est alors

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = -(\vec{p} | \vec{q}) + \vec{p} \wedge \vec{q}.$$

Corollaire II.5.22. — Pour $a + \vec{p}$ un quaternion unitaire, la rotation associée est

$$\text{Rot}_{a + \vec{p}}(\vec{x}) = (2a^2 - 1)\vec{x} + 2(\vec{p} | \vec{x})\vec{p} + 2a\vec{p} \wedge \vec{x}.$$

Démonstration. — On calcule $\Psi_u(x) = (a + p)x(a - p) = a^2x + a(px - xp) - pxp$ ce qui en utilisant la notation ci-dessus

$$\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{p} = -(\vec{p}, \vec{x}) + \vec{p} \wedge \vec{x} + (\vec{x} | \vec{p}) - \vec{x} \wedge \vec{p} = 2\vec{p} \wedge \vec{x}.$$

De même on a

$$\begin{aligned} -\vec{p} \cdot \vec{x} \cdot \vec{p} &= -\vec{p} \cdot \left(-(\vec{x} | \vec{p}) + \vec{x} \wedge \vec{p} \right) \\ &= (\vec{x} | \vec{p})\vec{p} + (\vec{p}, \vec{x} \wedge \vec{p}) - \vec{p} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{p}) \\ &= (\vec{x} | \vec{p})\vec{p} + \vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{x}) \end{aligned}$$

ce qui en utilisant la formule du double produit vectoriel donne $2(\vec{p} | \vec{x})\vec{p} - \|\vec{p}\|^2\vec{x}$ et donc comme u est unitaire $\|\vec{p}\|^2 = 1 - a^2$ d'où le résultat. \square

CHAPITRE III

GÉOMÉTRIE INVERSIVE ET SPHÉRIQUE

Jusqu'à présent les cercles ont été définis dans le cadre de la géométrie euclidienne et possède une nature bien distincte des droites. Cependant il existe de nombreuses situations où les droites et les cercles semblent se confondre. Que l'on se rappelle par exemple le critère de cocyclicité en termes de birapport : 4 points sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel. Dans le paragraphe suivant nous allons donner d'autres exemples où des droites sont changées en cercle sans que la conclusion du théorème en soit modifiée.

L'explication de ce phénomène réside dans une nouvelle géométrie dite inversive où :

- l'espace est la sphère unité S^2 de \mathbb{R}^3 ;
- son groupe, appelée *le groupe circulaire*, est constitué des bijections de S^2 qui conservent les cercles, i.e. qui envoient un cercle de S^2 , obtenu comme l'intersection de S^2 avec un plan, sur un cercle de S^2 .

Via la projection stéréographique, on envoie S^2 privé de son pôle nord N sur le plan \mathbb{R}^2 identifié à \mathbb{C} de sorte que S^2 s'identifie à $\mathbb{C} \amalg \{\infty\}$. Un cercle \mathcal{C} de S^2 devient alors soit :

- un cercle si $N \notin \mathcal{C}$;
- une droite si $N \in \mathcal{C}$.

On donne ainsi un sens à l'expression largement répandu « qu'une droite est un cercle passant par ∞ ». Par projection stéréographique, les éléments du groupe circulaire s'identifie alors à des transformations de $\mathbb{C} \amalg \{\infty\}$ qui conservent les cercles/droites. Celles qui conservent ∞ doivent ainsi conserver :

- les droites de \mathbb{C} et sont, d'après le théorème fondamental de la géométrie affine, des applications affines ;
- les cercles de \mathbb{C} et étant affines, ce sont donc des similitudes.

Le groupe des similitudes de \mathbb{R}^2 est donc un sous-groupe du groupe circulaire ; il reste alors à étudier les transformations circulaires qui ne stabilisent pas ∞ ce qui nous amène à introduire des transformations classiques de la géométrie du lycée : *les inversions*.

Ainsi des énoncés de géométrie planes qui ne font intervenir que des cercles et des droites peuvent être considérés comme des énoncés de géométrie inversive, i.e. comme la projection stéréographique d'une figure dessinée sur la sphère S^2 . L'avantage de ce point de vue est que l'on peut appliquer les transformations de cette nouvelle géométrie, particulièrement des inversions puisqu'elles n'étaient pas présentes dans la géométrie semblable, le but étant d'obtenir une figure plus simple que l'on considèrera dans le cadre de la géométrie euclidienne, géométrie avec un groupe plus petit et possédant donc plus d'invariants, angles, distances, permettant d'attaquer le problème.

Cette stratégie s'appelle *le changement de géométrie* : on part d'une géométrie « pauvre » avec un gros groupe de transformations afin de modifier le problème pour le ramener dans une configuration plus simple, puis on résoud ce nouvel énoncé dans une géométrie plus riche possédant plus d'invariants ; on renvoie le lecteur au §?? pour une illustration de cette stratégie.

Dans un deuxième temps, de manière similaire au passage de la géométrie affine à la géométrie euclidienne, nous introduirons une métrique sur S^2 de sorte que muni de son sous-groupe des transformations circulaires conservant cette métrique, nous obtenons une nouvelle géométrie appelée **géométrie sphérique**. L'étude des triangles de cette géométrie est à la fois :

- très similaire à celle de la géométrie euclidienne, que l'on regarde par exemple l'analogie de la loi des sinus ou de la formule d'Al-Kashi ;
- et aussi très différente : par exemple la somme des angles d'un triangle sphérique n'est pas fixe et toujours $> \pi$.

Une application classique de ces formulaires de trigonométrie sphérique sont les problèmes de navigation terrestre : déterminer un cap revient à calculer un angle d'un triangle.

III.1. Les inversions : définition et premières propriétés

Avant de définir la géométrie inversive, son espace et ses transformations, nous allons introduire et étudier les de nouvelles transformations de l'espace, qui ne sont pas affines et qui sont directement reliés au groupe de notre nouvelle géométrie d'au moins deux façons :

- les éléments de ce groupe peuvent être vus comme la restriction d'inversions en dimension supérieure, cf. la proposition III.2.6 ;
- si on ne veut pas utiliser des transformations « externes » à notre espace, ce groupe est constitué de similitudes et d'inversions, cf. le théorème III.2.4.

III.1.1. Définition générale. — Considérons momentanément l'espace euclidien \mathbb{R}^d pour $d \geq 1$ que l'on considère comme un espace affine pointé en O . On rappelle la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle, cf. II.2.7.

Définition III.1.1. — La puissance d'un point A par rapport à une sphère $S(\Omega, R)$ centré en Ω et de rayon R , est la quantité

$$\mu_S(A) := A\Omega^2 - R^2.$$

Introduisons à présent les inversions, introduites dès 1831 par Magnus dans le cadre de la géométrie plane.

Définition III.1.2. — Pour $A \in \mathbb{R}^d$, on appelle inversion de pôle A et de rapport ρ^2 , l'application de $\mathbb{R}^d \setminus \{A\}$ dans lui même qui à tout point $M \neq A$ fait correspondre le point M' de la droite (AM) tel que $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \rho^2$.

Remarque : une involution est une application involutive et donc bijective. Afin de réintroduire le point A , on considère un point nommé ∞ échangé avec A par une inversion de pôle A .

Remarque : on dira par fois *inversion par rapport au cercle* $\mathcal{C}(A, \rho)$ pour désigner l'inversion de centre A et de rapport ρ^2 .

III.1.2. Sur quelques relations métriques dans \mathbb{C} . — Étant donnée une inversion de centre A , on se propose de donner des relations métriques et angulaires relativement à deux points M, N et leurs images respectives M', N' ; on peut ainsi sans restriction se limiter au cas de la dimension $d = 2$.

Proposition III.1.3. — Soit P, Q des points distincts du centre O d'une inversion i ; on note P', Q' les images respectives de P et Q . On a alors

$$\widehat{QPO} = \widehat{OQ'P'}.$$

Démonstration. — Notons r^2 le rapport de l'inversion i de sorte que $OP.OP' = OQ.OQ' = r^2$. On en déduit alors que $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$ et donc que les triangles OPQ et $OQ'P'$ sont semblables d'où le résultat. \square

Corollaire III.1.4. — Soit i une inversion de centre O . Pour M, N des points distincts de O et M', N' leur image respective par i , les triangles OMN et $ON'M'$ sont semblables.

Corollaire III.1.5. — Avec les notations de la proposition précédente, pour $R \in (OQ)$ d'image R' par i , on a

$$\widehat{QPR} = -\widehat{Q'P'R'}.$$

Démonstration. — On écrit $\widehat{QPR} = \widehat{QPO} - \widehat{RPO}$ qui d'après la proposition précédente est alors égal à $\widehat{OQ'P'} - \widehat{OR'P'} = \widehat{R'P'Q'}$ d'où le résultat. \square

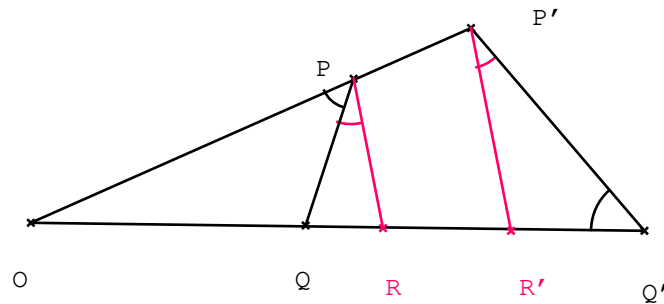


FIGURE 1. Inversion et triangles semblables

Corollaire III.1.6. — Soit i l'inversion de centre O et de rapport ρ^2 . Pour M, N des points distincts de O , et M', N' leurs images respectives par i , on a

$$M'N' = \frac{\rho^2 MN}{OM.ON}.$$

Démonstration. — Les triangles OMN et $ON'M'$ étant semblables on a

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{ON'}{OM} = \frac{\rho^2}{ON.OM}$$

d'où le résultat. \square

Remarque : on peut aussi utiliser le théorème d'Al-Kashi dans les triangles AMN et $AM'N'$:

$$\begin{aligned}\cos \hat{A} &= \frac{MA^2 + NA^2 - MN^2}{2MA \cdot NA} \\ &= \frac{M'A^2 + N'A^2 - (M'N')^2}{2M'A \cdot N'A} \\ &= \frac{\rho^4(MA^2 + NA^2) - (M'N')^2 MA^2 \cdot NA^2}{2\rho^4 MA \cdot NA}\end{aligned}$$

ce qui donne de nouveau $(M'N')^2 = \frac{\rho^4 MN^2}{AM^2 \cdot AN^2}$.

III.1.3. Hyperplans et sphères. — Commençons par quelques remarques simples :

- un hyperplan passant A est globalement invariant ;
- une sphère centrée en A et de rayon ρ est invariant point par point.

Proposition III.1.7. — Une sphère $S(\Omega, R)$ telle que $\mu_C(A) = \rho^2$ est globalement invariant par l'inversion de pôle A et de rapport ρ^2 .

Démonstration. — Soit $M \in S(\Omega, R)$ et soit M' le deuxième point d'intersection de la droite (AM) avec S . Soit alors N le point de \mathcal{C} diamétralement opposé à M ; on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM'}) \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) \cdot (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}) \\ &= A\Omega^2 - R^2\end{aligned}$$

et donc M' est l'image de M par l'inversion de pôle A et de rapport $\mu_C(A)$. \square

Corollaire III.1.8. — L'image d'une sphère S ne passant pas par A par l'inversion $i_{A,\rho}$ de pôle A et de rapport ρ^2 est la sphère S' obtenue à partir de S par homothétie de centre A et de rapport $\frac{\rho^2}{\mu_S(A)}$.

Démonstration. — Notons $i_{A,\rho}(S) = i_{A,\rho} \circ i_{A,\mu_S(A)^{1/2}}(S)$ et le résultat découle du fait que $i_{A,\rho} \circ i_{A,\rho'}$ est l'homothétie de centre A et de rapport $(\frac{\rho}{\rho'})^2$. \square

Remarque : on notera bien que le centre de S' n'est pas l'image par l'inversion du centre de S .

Proposition III.1.9. — Soit S une sphère passant par A et soit B le point de \mathcal{C} diamétralement opposé à A . L'image de S par l'inversion de pôle A et de rapport ρ^2 , est l'hyperplan passant par l'image B' de B et perpendiculaire à (AB) .

Démonstration. — Pour tout point M de S , on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2$. Ainsi, on a

$$\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AB'} = \frac{\rho^2}{AM^2} \overrightarrow{AM} \cdot \frac{\rho^2}{AB^2} \overrightarrow{AB} = (AB')^2$$

d'où le résultat. \square

Corollaire III.1.10. — **Théorème de Ptolémée**

Étant donné un triangle ABC et P un point du plan, on a

$$CP \cdot AB \geq AP \cdot BC + AC \cdot BP$$

avec égalité si et seulement si P appartient au cercle circonscrit à ABC .

Démonstration. — Soit donc ABC un triangle et P un point du cercle circonscrit à ABC appartenant à l'arc délimité par A et B . Une inversion de centre P et de rapport k transforme A, B, C en trois points A', B', C' alignés dans cet ordre. D'après III.1.6, l'égalité $A'C' = A'B' + B'C'$ se traduit par $AP \cdot BC + AC \cdot BP = CP \cdot AB$.

Pour P n'appartenant pas au cercle circonscrit à ABC , les points A', B', C' appartiennent à un cercle de sorte que l'inégalité triangulaire $A'C' \leq A'B' + B'C'$ est stricte et donc $CP \cdot AB \geq AP \cdot BC + AC \cdot BP$. \square

Remarque : en utilisant l'involutivité des inversions, on en déduit alors le corollaire suivant.

Corollaire III.1.11. — *L'image d'un hyperplan ne contenant pas A par une inversion de pôle A est une sphère passant par A .*

Remarque : d'après II.2.4, l'intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ de \mathbb{R}^d avec un sous-espace affine \mathcal{F} de dimension r est la sphère de dimension $r - 1$ de \mathcal{F} centrée au projeté orthogonal ω de Ω sur \mathcal{F} et de rayon r tel que $R^2 = \Omega\omega^2 + r^2$.

Définition III.1.12. — *Étant donnée une sphère S de \mathbb{R}^d , ses sphères de dimension $r - 1$ seront les intersections de S avec les sous-espaces affines de dimension r .*

Corollaire III.1.13. — *Soit S une sphère de l'espace affine \mathbb{R}^d et A un point de S . L'image d'une sphère de dimension $r - 1$ de S par une inversion i_A de pôle A est une sphère de dimension $r - 1$ de l'hyperplan $H = i_A(S)$.*

Remarque : pour $d = 2$, une inversion s'exprime comme une anti-homographie involutive et transforme les birapports en leur conjugué complexe. Comme quatre points sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel, on retrouve bien que les inversions conservent les cercles droites du plan.

Démonstration. — Une telle sphère de dimension r est l'intersection de S avec un sous-espace affine \mathcal{F} de dimension r . D'après ce qui précède l'image de \mathcal{F} par i_A est une sphère S_r de dimension r de sorte que l'image cherchée est l'intersection de S_r avec H et donc une sphère de dimension $r - 1$ de H . \square

III.2. Présentation de la géométrie inversive

Le but de ce paragraphe est d'introduire la géométrie inversive et donc de décrire à la fois l'espace et son groupe. Comme précédemment notre présentation n'est pas axiomatique mais repose sur notre connaissance de l'algèbre linéaire et nous renvoyons au §?? pour une brève présentation axiomatique.

III.2.1. La projection stéréographique de la sphère de Riemann. — Soit S^2 la sphère unité, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ de \mathbb{R}^3 appelée **la sphère de Riemann**.

Définition III.2.1. — La projection stéréographique est l'inversion de centre le pôle nord et de rapport 2 de sorte que l'image de S est le plan de l'équateur.

Remarque : autrement dit, la droite qui joint le pôle Nord $N(0, 0, 1)$ au point $(u, v, 0)$ du plan de l'équateur $z = 0$ recoupe S au point

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Inversement étant donné un point (x, y, z) de S distinct de N , la droite qui le joint à N coupe le plan de l'équateur au point de coordonnées

$$u = \frac{x}{1 - z}, \quad v = \frac{y}{1 - z}.$$

On obtient ainsi une bijection du plan de l'équateur que l'on identifie avec \mathbb{C} , avec la sphère privée du pôle Nord. Ainsi via la projection stéréographique on peut voir la sphère de Riemann S^2 comme $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; nous verrons au chapitre suivant qu'il s'agit de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. La topologie sur S est alors celle de \mathbb{C} à laquelle on rajoute les ouverts du type $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ où K est un compact de \mathbb{C} ; par définition la projection stéréographique est un homéomorphisme.

III.2.2. Le groupe circulaire. — Comme précédemment, les cercles de S^2 sont ses intersections avec les plans et rappelons que d'après III.1.13, l'image d'un cercle par la projection stéréographique est une droite ou un cercle selon que le cercle de S^2 passe ou ne passe pas par le pôle nord N .

Définition III.2.2. — Le groupe circulaire est le sous-groupe G du groupe des permutations de S^2 qui envoient tout cercle de S^2 sur un cercle de S^2 .

Remarque : une façon simple de décrire les bijections de S^2 est de d'identifier S^2 avec $\mathbb{C} \amalg \{\infty\}$ via la projection stéréographique, et de décrire les permutations de S^2 comme des fonctions complexes $z \in \mathbb{C} \amalg \{\infty\} \mapsto f(z) \in \mathbb{C} \amalg \{\infty\}$.

Lemme III.2.3. — Via l'identification de S^2 avec $\mathbb{C} \amalg \{\infty\}$ par la projection stéréographique, toute bijection de S^2 qui stabilise le pôle nord d'image ∞ , induit une similitude de \mathbb{C}^2 .

Démonstration. — Par hypothèse une telle bijection stabilise les cercles de S^2 passant par ∞ (resp. ne passant pas par ∞), i.e. les droites de \mathbb{C}^2 (resp. les cercles de \mathbb{C}). D'après le théorème fondamental de la géométrie affine, une telle bijection est donc affine et conserve les cercles : c'est donc une similitude. \square

Exemples :

- *Translations* de vecteur $b \in \mathbb{C}$: $z \mapsto \begin{cases} z + b & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Rotations* d'angle θ par rapport à 0 : $z \mapsto \begin{cases} e^{i\theta}z & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Isométries directes* : $z \mapsto \begin{cases} az + b \text{ où } |a| = 1 & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Symétrie par rapport à l'axe réel* : $z \mapsto \begin{cases} \bar{z} & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Isométries inverses* : $z \mapsto \begin{cases} a\bar{z} + b \text{ où } |a| = 1 & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Homothéties* de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}^\times$: $z \mapsto \begin{cases} kz & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.

- *Similitudes directes* : $z \mapsto \begin{cases} az + b & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Similitudes inverses* : $z \mapsto \begin{cases} a\bar{z} + b & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Inversion* de pôle a et de puissance k : $z \mapsto \begin{cases} \frac{k}{z-a} & \text{si } z \neq a, \infty \\ \infty & \text{si } z = a \\ a & \text{si } z = \infty \end{cases}$.
- *Homographie* : $z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } c \neq 0 \text{ et } z \notin \{\infty, -d/c\} \\ a/c & \text{si } c \neq 0 \text{ et } z = \infty \\ \infty & \text{si } c = 0 \text{ et } z = -d/c \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{si } c = 0 \text{ et } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } c = 0 \text{ et } z = \infty \end{cases}$.
- *Anti-homographie* : une homographie composée avec la symétrie par rapport à l'axe des réels.

Théorème III.2.4. — *Le groupe circulaire G est le groupe engendré par les similitudes et les inversions. Plus précisément, un élément f de G est de la forme $f = s$ ou $f = s \circ i$, où s est une similitude et i une inversion.*

Démonstration. — Soit a tel que $f(a) \neq \infty$ et considérons une inversion i de pôle a ; on pose $g = i \circ t^{-1} \circ f \circ i$ où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$. Il vient $g(\infty) = \infty$ de sorte que g induit une bijection h de \mathbb{C} qui conserve :

- les droites et donc h est un élément du groupe affine;
- les cercles et donc h est une similitude affine.

On a donc $f = t \circ i \circ g \circ i = t \circ g \circ j \circ i$ où j est une inversion. Si i et j ont le même pôle que i alors $j \circ i$ est une homothétie et sinon $j \circ i = \sigma \circ i'$ où σ est une isométrie et i' une inversion. On a donc obtenu le résultat. \square

Corollaire III.2.5. — *Le groupe circulaire est la réunion des homographies et des anti-homographies.*

Proposition III.2.6. — *L'application*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \\ -c/d \mapsto \infty \\ \infty \mapsto a/c \end{cases}$$

induit un isomorphisme de groupe entre $PGL_2(\mathbb{C})$ et sous-groupe du groupe circulaire réunion des homographies.

Démonstration. — \square

En se rappelant que S^2 est plongé dans \mathbb{R}^3 et que celui-ci possède des inversions, on peut introduire le sous-groupe suivant du groupe circulaire.

Définition III.2.7. — On note Mob le sous-groupe des transformations de \mathbb{R}^3 engendré par

- les inversions conservant globalement la sphère unité S^2 et
- les réflexions par rapport à des plans passant par O et donc conservant S^2 globalement.

Proposition III.2.8. — *Le morphisme du groupe de Möbius vers le groupe circulaire qui à un élément de Mob associe sa restriction à S^2 , est un isomorphisme.*

III.3. Invariants conformes

Selon le principe général il s'agit de décrire les orbites sous l'action du groupe circulaire, ou conforme, d'un uplet de points ou de cercles de S^2 .

III.3.1. L'invariant de Möbius. — On commence donc par regarder le cas d'un uplet de points de S^2 . Notons que comme $PGL_2(\mathbb{C})$, le groupe circulaire est une variété réelle de dimension 6. On s'attend donc à ce que son action sur les triplets de points distincts de S^2 soit transitive.

Proposition III.3.1. — *L'action du groupe circulaire est transitif sur les triplets de points distincts de S^2 ; plus précisément l'action du sous-groupe des homographies est simplement transitive.*

Démonstration. — Quitte à appliquer une translation on peut se ramener au cas où les deux triplets ont un point commun qui après inversion est le point ∞ . On conclut alors en utilisant que l'action du groupe semblable (resp. des similitudes directes) sur les couples de points distincts de \mathbb{R}^2 est (resp. simplement) transitive. \square

Toujours pour des raisons de dimension, les orbites des quadruplets de points de S^2 sous l'action du groupe circulaire devrait être paramétrées par \mathbb{R}^2 i.e. par un nombre complexe.

Définition III.3.2. — Pour $a, b, c, d \in S^2$, tels que a, b, c sont distincts, d'après la proposition précédente, il existe une unique homographie qui envoie (a, b, c) sur $(\infty, 0, 1)$; on note alors $[a, b, c, d] \in S^2$ l'image de d par cette homographie ; $[a, b, c, d]$ est appelé **invariant de Möbius** des points a, b, c, d .

Par définition et simple transitivité des homographies sur les triplets de points distincts de S^2 , on en déduit la proposition suivante.

Proposition III.3.3. — *Les orbites du groupe de Möbius sur les quadruplets de points distincts de S^2 sont en bijection avec S^2 via l'invariant de Möbius.*

Corollaire III.3.4. — *Soient a, b, c, d quatre éléments de S^2 identifié avec $\mathbb{C} \amalg \{\infty\}$ via la projection stéréographique, avec a, b, c distincts. Le birapport $[a, b, c, d] \in \mathbb{C} \amalg \{\infty\}$ est donné par la formule*

$$[a, b, c, d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

avec les conventions de calcul usuelles sur 0 et ∞ , i.e.

$$\forall z, z + \infty = \infty, \quad z \neq 0, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \text{et pour } z \neq \infty \quad z - \infty = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{z} = \infty.$$

Démonstration. — L'homographie h de S^2 sur S^2 qui amène a, b, c en $\infty, 0, 1$ admet a pour pôle et b pour zéro. Elle est donc de la forme $h(t) = k(t-b)/(t-a)$. Comme $h(c) = 1$, on a nécessairement $k = (c-a)/(c-b)$ d'où le résultat. \square

Remarque : on renvoie le lecteur au §IV.3.1 pour de plus amples développements sur le birapport en notant que S^2 s'identifie avec $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

III.3.2. Invariant conforme de deux cercles de la sphère de Riemann. — Rappelons que pour deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' , l'axe radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ est l'ensemble des points d'égale puissance par rapport à \mathcal{C} et \mathcal{C}' donné par l'équation $OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$ soit $2 \cdot \overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{O'O} = R'^2 - R^2 + O'O^2$ qui est donc la droite perpendiculaire à OO' et passant par $I \in (OO')$ tel que $\overrightarrow{OI} = \frac{R'^2 - R^2 + O'O^2}{2O'M}$.

Proposition III.3.5. — Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux cercles du plan affine euclidien, de rayon respectifs R, R' et de centre O, O' avec $d = OO'$. La quantité $c = \frac{|R^2 + R'^2 - d^2|}{2RR'}$ est invariante par une inversion de pôle $P \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$.

Démonstration. — Dans le cas où \mathcal{C} et \mathcal{C}' s'intersectent en un point P , dans le triangle $OO'P$, on a $OO'^2 = PO^2 + PO'^2 - 2 \cdot PO \cdot PO' \cdot \cos \widehat{OPO'}$ et donc l'invariant en question n'est autre que le cosinus de l'angle $\widehat{OPO'}$ qui est aussi celui entre les tangentes en P de \mathcal{C} et \mathcal{C}' lequel est conservé par inversion.

Dans le cas général, soit P n'appartenant ni à \mathcal{C} ni à \mathcal{C}' le pôle de l'inversion et μ son rapport; on note Γ et Γ' les cercles images de \mathcal{C} et \mathcal{C}' , de centre ω, ω' et de rayon ρ, ρ' . On rappelle que Γ (resp. Γ') est l'image de \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{\mu}{s}$ (resp. $\frac{\mu}{s'}$) où s (resp. s') est la puissance de S par rapport à \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') de sorte que la puissance de P par rapport à Γ (resp. Γ') est $\sigma = \frac{\mu^2}{s}$ (resp. $\sigma' = \frac{\mu^2}{s'}$). Dans les triangles POO' et $P\omega\omega'$, on écrit

$$d^2 = PO^2 + PO'^2 - 2 \cdot PO \cdot PO' \cdot \cos \widehat{OPO'}, \quad \omega\omega'^2 = \delta^2 = P\omega^2 + P\omega'^2 - 2P\omega \cdot P\omega' \cdot \cos \widehat{P\omega\omega'}$$

avec $\alpha = \widehat{OPO'} = \widehat{P\omega\omega'}$, de sorte qu'en utilisant $s = PO^2 - R^2$ et $s' = PO'^2 - R'^2$ (resp. $\sigma = P\omega^2 - \rho^2$ et $\sigma' = P\omega'^2 - \rho'^2$), on obtient

$$\begin{cases} d^2 - R^2 - R'^2 = s + s' - 2PO \cdot PO' \cos \alpha \\ \omega\omega'^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \sigma + \sigma' - 2P\omega \cdot P\omega' \cos \alpha \end{cases}$$

En utilisant les égalités $\frac{\sigma + \sigma'}{s + s'} = \frac{\mu^2}{ss'} = \frac{P\omega \cdot P\omega'}{PO \cdot PO'}$, on obtient

$$\frac{R^2 + R'^2 - d^2}{\rho^2 + \rho'^2 - \delta^2} = \frac{s + s' - 2PO \cdot PO' \cos \alpha}{\sigma + \sigma' - 2P\omega \cdot P\omega' \cos \alpha} = \frac{ss'}{\mu^2} = \frac{RR'}{\rho\rho'}$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque : \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont non sécants (resp. sécants, resp. tangents) si et seulement si $c >$ (resp. $c < 1$, resp. $c = 1$).

Définition III.3.6. — Soient deux cercles \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}'_0 de S ; l'invariant conforme $c(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}'_0)$ est défini comme suit :

- si N n'appartient pas à $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}'_0$, alors c'est l'invariant conforme de leurs images par la projection stéréographique au sens de la proposition précédente;
- sinon, pour $A \notin \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}'_0$, on considère un élément du groupe circulaire qui envoie A sur N et on note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}'_1 les cercles de S images de \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}'_0 ; on pose $c(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}'_0)$ comme l'invariant conforme de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1$ au sens du tiret précédent.

Remarque : comme le groupe circulaire est engendré par les inversions et les similitudes et que celles-ci, conservent l'invariant conforme, on voit que la définition précédente ne dépend pas des constructions.

Proposition III.3.7. — Soient $\mathcal{C}(O, R)$ et $\mathcal{C}'(O', R')$ deux cercles non sécants; les cercles orthogonaux à \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont ceux centrés sur l'axe radical et passant par les points L, L' tels que $LI^2 = L'I'^2 = IO^2 - R^2 = IO'^2 - R'^2$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{C}''(\omega, \rho)$ un tel cercle de sorte que $R^2 + \rho^2 = O\omega^2$ et $R'^2 + \rho^2 = O'\omega^2$ et donc $O\omega^2 - R^2 = O'\omega^2 - R'^2 = \rho^2$ et donc ω appartient à l'axe radical. Notons L, L' l'intersection de $\mathcal{C}'' \cap (OO')$: $LI^2 + I\omega^2 = L'\omega^2 = \rho^2 = O\omega^2 - R^2$ et donc $LI^2 = OI^2 - R^2$ et de même $L'I'^2 = O'I'^2 - R'^2$ avec $LI = L'I'$. \square

Corollaire III.3.8. — Soient deux cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ non sécants; il existe alors une inversion f telle que $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ soient deux cercles concentriques.

Démonstration. — Soit f une inversion de pôle L et de puissance μ quelconque. Les images $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ sont des cercles qui sont orthogonaux à tous les $f(\Sigma)$ où Σ est un cercle quelconque centré sur l'axe radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et passant par L . Or les $f(\Sigma)$ sont des droites qui passent donc par les centres de $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ lesquels sont donc dans l'intersection de tous les $f(\Sigma)$ et sont donc confondus. \square

Remarque : ainsi dans chaque orbite de l'action du groupe circulaire sur les couples de cercles de S , il existe un couple de la forme suivante :

- les deux cercles ont le même centre A ;
- le rayon du premier cercle est égal à 1 et celui du deuxième R vérifie $\frac{R^2+1}{2R} = c$.

III.4. Géométrie sphérique

Rappelons que la géométrie euclidienne consiste à munir l'espace affine d'une métrique et à n'en considérer que les transformations affines qui conservent cette métrique. Parallèlement la géométrie sphérique est la géométrie inversive munie d'une métrique que nous allons définir dans le paragraphe suivant.

III.4.1. Métrique. — On pourrait munir S^2 de la métrique induite par \mathbb{R}^3 mais alors pour tout courbe de S^2 reliant M à N , la longueur de cette courbe serait toujours strictement supérieure à la distance entre M et N , ce n'est pas vraiment ce que l'on attend d'une bonne métrique au sens de la définition suivante.

Définition III.4.1. — Un espace métrique est dit intrinsèque s'il est connexe par arcs et si $d(x, y) = \inf\{\text{longueur des courbes reliant } x \text{ à } y\}$.

La bonne solution est plutôt considérer la distance suivante.

Définition III.4.2. — On munit S^2 de la distance

$$M_1, M_2 \in S^2 \mapsto d(M_1, M_2) = \arccos(\overrightarrow{OM_1} \mid \overrightarrow{OM_2}).$$

Remarque : cette métrique est bien intrinsèque, le plus court chemin allant de M_1 à M_2 étant alors le plus petit arc de grand cercle reliant M_1 à M_2 . La topologie induite sur S^2 est celle induite par \mathbb{R}^3 avec sa métrique naturelle.

Remarque : un vecteur unitaire \vec{x} définit un point $A \in S^2$ via la formule $\vec{x} = \overrightarrow{OA}$; on notera alors $d(\vec{x}, \vec{y})$ la distance $d(A, B)$ pour $A, B \in S^2$ tels que $\vec{x} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{OB}$.

III.4.2. Aire d'un triangle sphérique. — Pour $M \in S^2$, le plan tangent à S^2 en M est muni de sa structure euclidienne et orienté à l'aide de \overrightarrow{OM} , i.e. (\vec{x}, \vec{y}) en forme une base directe si et seulement si $(\vec{x}, \vec{y}, \overrightarrow{OM})$ est une base directe de \mathbb{R}^3 .

La mesure de Lebesgue des plans tangents permet de définir un volume infinitésimal et donc une aire pour les parties mesurables de S^2 .

Définition III.4.3. — On appelle fuseau d'angle α de S^2 , la partie de S^2 comprise entre deux demi-grands cercles de mêmes extrémités $\pm M$ et dont les vecteurs normaux aux plans les définissants font un angle α .

Proposition III.4.4. — L'aire d'un fuseau d'angle α est égale à 2α .

Démonstration. — Prenons des coordonnées de sorte que $\pm M$ soient les pôles de sorte que l'aire cherchée est égale à

$$\int_0^\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\phi d\theta = \int_0^\alpha 2d\phi = 2.$$

□

Remarque : le vecteur tangent à une courbe de S^2 est un vecteur du plan tangent à S^2 en M . En particulier l'angle α d'un fuseau est l'angle entre les vecteurs tangents aux grands cercles.

Définitions III.4.5. — — Un triangle de S^2 est un triplet (A, B, C) de points de S^2 tels que les vecteurs

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{y} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{z} = \overrightarrow{OC},$$

sont linéairement indépendants.

— Ses cotés sont les morceaux de grand cercle qui relient les points entre eux ; leur longueurs sont définies par $d(\vec{x}, \vec{y})$.

— Les angles aux sommets sont définis par l'angle entre les vecteurs tangents dans le plan tangent euclidien à S en A : $\alpha = d(\vec{x}_y, \vec{x}_z)$ où \vec{x}_y (resp. \vec{x}_z) est le deuxième vecteur fourni après \vec{x} par l'orthonormalisation de Schmidt appliqué à $\{\vec{x}, \vec{y}\}$, i.e. $\vec{x}_y = \frac{\vec{\lambda}}{\|\vec{\lambda}\|}$ avec $\vec{\lambda} = \vec{y} - (x | y).\vec{x}$ (cela correspond aussi à l'angle dièdre formé par les plans correspondants).

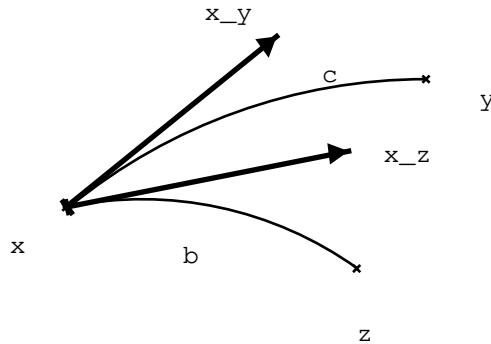
Proposition III.4.6. — **Formule de Girard** L'aire d'un triangle sphérique est égale à $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Démonstration. — Soit D la demi-sphère délimitée par le grand cercle y, z et contenant x dans son intérieur. A des ensembles de mesure nulle près, D admet la partition en quatre ensembles T, A, B, C où T est le triangle considéré, $T \cup B$ (resp. $T \cup C$) est un fuseau d'angle β (resp. γ) tandis que $T \cup A$ a même aire que $A \cup (-T)$ qui est un fuseau d'angle α ce qui donne

$$2\pi = \mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B) + \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(T) + 2\alpha - \mathcal{A}(T) + 2\beta - \mathcal{A}(T) + 2\gamma - \mathcal{A}(T)$$

ce qui donne le résultat. □

Corollaire III.4.7. — L'aire d'un polygone sphérique convexe à n sommets et d'angles α_i est égale à $\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n - 2)\pi$.



Démonstration. — Le résultat découle directement de la proposition précédente en triangulant le polygone. \square

Remarque : le calcul de l'aire d'un triangle sphérique est un cas particulier de la formule générale de Gauss-Bonnet, valable pour toute variété riemannienne de dimension 2 et qui dit que, pour un triangle T dont les côtés sont des géodésiques alors $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_T K d\sigma$ où K désigne la courbure de la variété et $d\sigma$ sa mesure canonique. Dans le cas de la sphère la courbure est constante égale à 1 et pour le plan euclidien, elle est nulle.

Remarque importante : la somme des angles d'un triangle sphérique « non plat » est toujours $> \pi$.

III.4.3. Le groupe de la géométrie sphérique. — Selon le processus désormais habituel, pour définir la géométrie sphérique il nous reste à caractériser son groupe des transformations.

Proposition III.4.8. — *Le sous-groupe $Is(S^2)$ des transformations de S^2 qui préservent sa métrique est isomorphe à $O(3, \mathbb{R})$.*

Remarque : l'isomorphisme de l'énoncé ci-dessus consiste à restreindre à S^2 une isométrie de \mathbb{R}^3 .

Démonstration. — Soit $f \in Is(S)$; comme $d(A, B) = 2$ caractérise les points diamétralement opposés, on en déduit que pour tout $x \in S$, on a $f(-A) = -f(A)$ ce qui permet de prolonger f à l'espace affine \mathbb{R}^3 pointé en O :

$$\tilde{f}(A) = \|\vec{OA}\| f\left(\frac{A}{\|\vec{OA}\|}\right), \text{ et } \tilde{f}(O) = O.$$

Ce prolongement conserve alors les distances et donc appartient à $O(3, \mathbb{R})$. On conclut alors en notant que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est injective et que réciproquement tout \hat{f} restreint à S induit un élément f de $Is(S)$ tel que $\tilde{f} = \hat{f}$. \square

Corollaire III.4.9. — **2-transitivité**

Quels que soient $A, B, A', B' \in S$ tels que $d(A, B) = d(A', B')$, il existe $f \in Is(S)$ tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Démonstration. — Le cas $d(A, B) = 0$ ou 2 étant évidents, supposons $0 < d(A, B) < 1$ de sorte que les vecteurs $\vec{x} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{OB}$ sont indépendants. Pour $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, on définit \vec{f} en envoyant \vec{x} sur \vec{x}' , \vec{y} sur \vec{y}' et \vec{z} sur \vec{z}' , de sorte que \vec{f} est une isométrie de \mathbb{R}^3 . \square

Remarque : on peut montrer, cf. [?] 18.5.8, que d est caractérisée par $O(3, \mathbb{R})$.

III.5. Trigonométrie sphérique

D'après le corollaire précédent, l'invariant associé à un couple de points sous l'action du groupe sphérique est simplement la longueur du « segment » de S^2 qu'ils définissent. Pour un triplet de points nous avons déjà défini 6 invariants, les 6 angles du triangle sphérique. Le groupe de la géométrie étant de dimension 3, on cherche donc 3 relations indépendantes entre ces données, ce qui devrait nous permettre de choisir 3 angles parmi ces 6 qui définissent uniquement la classe d'équivalence des triangles sphériques : c'est le pendant sphérique des cas d'isométries des triangles euclidiens.

III.5.1. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. — A l'aide des produits scalaires et vectoriels, les 6 angles d'un triangle sphérique ABC s'expriment comme suit.

Lemme III.5.1. — Avec les notations de la définition III.4.5, on a

$$\begin{cases} \cos a = \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle; \\ \cos b = \langle \vec{z} | \vec{x} \rangle; \\ \cos c = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle; \\ \cos \alpha = \langle \vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{x} \wedge \vec{z} \rangle; \\ \cos \beta = \langle \vec{y} \wedge \vec{z} | \vec{y} \wedge \vec{x} \rangle; \\ \cos \gamma = \langle \vec{z} \wedge \vec{x} | \vec{z} \wedge \vec{y} \rangle. \end{cases}$$

Démonstration. — Les trois premières égalités sont une simple réécriture de la définition de a, b, c . Le vecteur $\vec{x} \wedge \vec{y}$ (resp. $\vec{x} \wedge \vec{z}$) est un vecteur du plan tangent à S au point A et directement orthogonal à \vec{x}_y (resp. \vec{x}_z) de sorte que l'angle entre ces deux vecteurs est égal à α . Les cas de β et γ se traitent de même. \square

Théorème III.5.2. — Pour tout triangle sphérique on a :

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{cases}$$

Démonstration. — On a $\vec{y} = \cos c \cdot \vec{x} + \sin c \cdot \vec{x}_y$ et $\vec{z} = \cos b \cdot \vec{x} + \sin b \cdot \vec{x}_z$ avec $(\vec{x}_y | \vec{x}_z) = \cos \alpha$. En utilisant que $(\vec{x} | \vec{x}_y) = (\vec{x} | \vec{x}_z) = 0$ on obtient par définition de a :

$$\cos a = (\vec{y} | \vec{z}) = (\cos c \cdot \vec{x} + \sin c \vec{x}_y | \cos b \cdot \vec{x} + \sin b \cdot \vec{x}_z) = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.$$

Les autres relations s'obtiennent de la même façon ou en faisant tourner les lettres. \square

Remarque : on peut ainsi calculer α, β, γ à partir de a, b, c .

Corollaire III.5.3. — Inégalités triangulaires

Pour tout triangle sphérique on a

$$|b - c| < a < b + c \text{ et } a + b + c < 2\pi.$$

Réciproquement si trois réels a, b, c vérifient les inégalités précédentes, il existe alors un triangle de côtés égaux à a, b, c .

Démonstration. — D'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, en utilisant que $|\cos\alpha| < 1$, on a donc

$$\left| \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \right| < 1$$

ce qui équivaut à $\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c)$ et comme $0 < a, b, c < \pi$ ceci entraîne $a < b + c < 2\pi - a$. Ainsi on obtient $a + b + c < 2\pi$ puis $b < c + a$ et $c < a + b$ par permutation d'où $|b - c| < a$. Réciproquement si a, b, c vérifient les deux conditions de l'énoncé alors $\left| \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \right| < 1$ d'où l'existence de $0 < \alpha < \pi$ tel que $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$. On prend alors $x \in S$ quelconque puis deux vecteurs unitaires dans le plan tangent à S formant un angle α de sorte qu'avec y, z sur les grands cercles correspondant à distance respective de b et c , on a bien $d(y, z) = a$, d'où le résultat. \square

III.5.2. Triangle polaire. — Pour A, B, C un triangle sphérique; on note comme précédemment $\vec{x} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{y} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{z} = \overrightarrow{OC}$.

On se fixe une orientation de l'espace ce qui permet alors de définir le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Définition III.5.4. — Soit A^*, B^*, C^* les points de S définis par

$$\sin a \overrightarrow{OA^*} = \vec{y} \wedge \vec{z}, \quad \sin b \overrightarrow{OB^*} = \vec{z} \wedge \vec{x}, \quad \sin c \overrightarrow{OC^*} = \vec{x} \wedge \vec{y}.$$

Remarque : on note $\vec{x}^* = \overrightarrow{OA^*}$, $\vec{y}^* = \overrightarrow{OB^*}$, $\vec{z}^* = \overrightarrow{OC^*}$.

Définition III.5.5. — On pose $s(ABC) = 1$ (resp. $s(ABC) = -1$) si $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est direct (resp. indirect).

Lemme III.5.6. — Avec les notations précédentes, on a

$$(\vec{x}^*)^* = s \vec{x}, \quad (\vec{y}^*)^* = s \vec{y}, \quad (\vec{z}^*)^* = s \vec{z}.$$

Démonstration. — D'après la formule du produit, on a

$$\begin{aligned} \sin b \sin c \vec{y}^* \wedge \vec{z}^* &= (\vec{y} \wedge \vec{x}) \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y}) \\ &= ((\vec{y} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{y}) \vec{x} - ((\vec{z} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{x}) \vec{y} \\ &= \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \vec{x}. \end{aligned}$$

Ainsi comme $\sin b \sin c$ est positif, $(\vec{x}^*)^*$ est dans la direction de \vec{x} si $s = 1$ et sinon dans la direction opposée, d'où le résultat. \square

Proposition III.5.7. — On a les relations suivantes entre les 6 angles d'un triangle et ceux de son triangle polaire :

$$\begin{cases} a + \alpha^* = \alpha + a^* = \pi \\ b + \beta^* = \beta + b^* = \pi \\ c + \gamma^* = \gamma + c^* = \pi \end{cases}$$

Démonstration. — L'orientation de l'espace et le vecteur \vec{x} fournissent une orientation du plan tangent à S en A ; ainsi \vec{z}^* (resp. \vec{y}^*) est un vecteur directement (resp. indirectement) orthogonal à \vec{x}_y (resp. \vec{x}_z). On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \cos a^* &= (\vec{y}^* | \vec{z}^*) \\ &= -(\vec{x}_z | \vec{x}_y) \\ &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

et donc $a^* + \alpha = \pi$. Par permutation circulaire on obtient aussi $b^* + \beta = \pi$ et $c^* + \gamma = \pi$. Enfin d'après le lemme III.5.6, on a $(a^*)^* = a$, $(b^*)^* = b$, $(c^*)^* = c$ et de même pour les angles α, β, γ , on en déduit que $a + \alpha^* = b + \beta^* = c + \gamma^* = \pi$. \square

Les inégalités triangulaires sur le triangle polaire fournissent alors le résultat suivant.

Corollaire III.5.8. — *Pour tout triangle sphérique, on a les inégalités*

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi, \quad \alpha + \pi > \beta + \gamma, \quad \beta + \pi > \gamma + \alpha, \quad \gamma + \pi > \alpha + \beta.$$

Corollaire III.5.9. — *Pour tout triplet d'angle α, β, γ vérifiant les conditions du corollaire précédent, il existe un triangle dont les angles aux sommets sont α, β, γ .*

Corollaire III.5.10. — **Loi des cosinus**

Soit ABC un triangle sphérique; avec les notations précédentes on a

$$\begin{cases} \cos a = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \\ \cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{cases}$$

III.5.3. Loi des sinus. —

Proposition III.5.11. — *Étant donné un triangle de côtés de longueur a, b, c et d'angle α, β et γ , on a la relation :*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = s \frac{\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{\det(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{z}^*)}.$$

Démonstration. — Comme le terme le plus à droite des égalités de l'énoncé est invariant par permutations circulaires il suffit de montrer que $s \frac{\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{\det(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{z}^*)} = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$. Pour cela on calcule

$$\begin{aligned} \det(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{z}^*) &= \vec{x}^* \cdot (\vec{y}^* \wedge \vec{z}^*) \\ &= \left(\frac{\vec{y} \wedge \vec{z}}{\sin a} \right) \cdot \frac{\sin a^*}{s} \vec{x} \\ &= \frac{\sin a^*}{s} \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) \\ &= \frac{\sin a}{\sin a^*} \frac{\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}{s} \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant III.5.7. \square

III.5.4. Formulaire de trigonométrie sphérique. — On pose

$$\begin{cases} p = \frac{a+b+c}{2} & p^* = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \\ \delta = \frac{1}{2} |\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})| & \delta^* = \frac{1}{2} |\det(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{z}^*)| \\ \sigma = \alpha + \beta + \gamma - \pi = 2p^* - \pi \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} \delta^2 = \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c) \\ \delta^* = \sin p^* \sin(p^*-\alpha) \sin(p^*-\beta) \sin(p^*-\gamma) \\ \tan^2 \frac{\sigma}{4} = \tan \frac{p}{2} \tan \frac{p-a}{2} \tan \frac{p-b}{2} \tan \frac{p-c}{2} \\ \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\delta}{\delta^*} \\ 2\delta = \sin b \sin c \sin \alpha \\ 2\delta^* = \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha \\ \tan \frac{\beta-\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}} \\ \tan \frac{\beta+\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}} \\ \cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\ \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin b \sin c \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)} \end{cases}$$

Remarque : le lecteur pourra faire tourner les lettres ou considérer le triangle polaire pour trouver d'autres relations.

III.5.5. Cas d'égalité des triangles. — Soient deux triangles sphériques sur S dont on note A, B, C et A', B', C' les sommets et $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ et $(a', b', c', \alpha', \beta', \gamma')$ les six angles associés comme ci-avant.

Définition III.5.12. — On dit que les triangles A, B, C et A', B', C' sont isométriques s'il existe une rotation de l'espace $r \in O(3, \mathbb{R})$ telle que $r(A) = A', r(B) = B'$ et $r(C) = C'$.

Proposition III.5.13. — Les triangles sphériques A, B, C et (A', B', C') sont isométriques si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) $a = a', \beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$;
- (ii) $b = b', c = c'$ et $\alpha = \alpha'$;
- (iii) $a = a', b = b'$ et $c = c'$;
- (iv) $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$.

Démonstration. — Bien entendu si les triangles sont isométriques alors ces quatre propriétés sont vérifiées. En raisonnant sur les triangles polaires (i) et (ii) sont équivalentes ainsi que (iii) et (iv). Il suffit donc de montrer que si (ii) est vérifiée alors les triangles sont isométriques. On définit une isométrie f par les conditions suivantes :

- $f(\vec{x}) = \vec{x}'$;
- $f(\vec{x}_y) = \vec{x}'_y$;
- $f(\vec{x}_z) = \vec{x}'_z$.

Remarque : on utilise ici que les produits scalaires $\langle \vec{x} | \vec{x}_y \rangle$, $\langle \vec{x} | \vec{x}_z \rangle$ et $\langle \vec{x}_y | \vec{x}_z \rangle$ sont égaux à leur version primée : c'est évident pour les deux premiers qui sont nuls et pour le troisième on utilise l'hypothèse $\alpha = \alpha'$. Alors comme $c = c'$, on en déduit que $f(\vec{y}) = \vec{y}'$ et comme $b = b'$, on a aussi $f(\vec{z}) = \vec{z}'$ d'où le résultat. \square

III.5.6. Problèmes de navigation et triangulation. — *Un navigateur* est confronté au problème de géométrie sphérique suivant : connaissant sa position $A(\theta, \phi)$ sur la surface du globe en termes de latitude θ repéré par rapport à l'équateur et longitude ϕ repéré par le méridien de Greenwich, et souhaitant se rendre en un point $B(\theta', \phi')$ repéré de même en termes de latitude et longitude, voudrait connaître le cap à suivre. Pour ce faire introduisons le pôle nord N et considérons le triangle sphérique ABN . Les coordonnées de A et B donnent les distances $d(A, N)$ et $d(B, N)$ respectivement égal à $(\frac{\pi}{2} - \theta)R$ et $(\frac{\pi}{2} - \theta')R$ où R est le rayon de la Terre à peu près égal à 6373 kilomètres. Par ailleurs l'angle \widehat{ABN} est égal à $\phi - \phi'$ de sorte que l'analogie de la formule d'Al-Kashi

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

permet de calculer la distance AB . La loi des sinus $\frac{\sin \widehat{NAB}}{\sin d(N, B)} = \frac{\sin \widehat{ANB}}{\sin d(A, B)}$ donne donc l'angle \widehat{NAB} , i.e. le cap à suivre.

Remarque : malheureusement l'utilisation des radians est peu usité dans l'univers de la navigation où on utilise plutôt les degrés et les secondes : π étant égal à 180 degré et 60 secondes égalent 1 degré. Ainsi $30^\circ N$ (resp. $30^\circ S$) signifie $\theta = \frac{\pi}{6}$ (resp. $\theta = -\frac{\pi}{6}$) ; de même $30^\circ W$ (resp. $30^\circ E$) correspond à $\phi = -\frac{\pi}{6}$ (resp. $\phi = \frac{\pi}{6}$).

Exemple : *navigation de New Orleans à New York* : dont les coordonnées respectives sont $30^\circ N$ (resp. $41^\circ N$) de latitude et $90^\circ W$ (resp. $74^\circ W$) de longitude. On forme un triangle sphérique en y ajoutant le pôle nord. On note A pour le point de la sphère unité correspondant à New Orleans, B pour New York et C pour le pôle nord. Avec les notations des paragraphes précédents, on a alors $a = 90 - 41 = 49^\circ$, $b = 90 - 30 = 60^\circ$ et $\gamma = 90^\circ - 74^\circ = 16^\circ$. D'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, on a alors

$$\cos c = \cos 49^\circ \cos 60^\circ + \sin 49^\circ \sin 60^\circ \cos 16^\circ \approx 0.95631$$

et donc $a \approx 17^\circ$ ce qui en multipliant par le rayon terrestre donne 1891 kilomètres.

En ce qui concerne l'angle α , on a

$$\cos \alpha = \frac{\cos 49^\circ - \cos 17^\circ \cos 60^\circ}{\sin 17^\circ \sin 60^\circ} \approx 0.70266$$

ce qui donne $\alpha \approx 45.359^\circ = 45^\circ 22'$ direction que les navigateurs notent sous la forme

$$N45^\circ 22' E.$$

La triangulation consiste étant donné deux récepteurs repérant un émetteur, savoir positionner ce dernier. Concrètement pour A et B les positions des récepteurs et C celle de l'émetteur, sont connus $d(A, B)$ et les angles α, β en A et B du triangle ABC . La loi des cosinus

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

donne alors le troisième angle γ . La loi des sinus

$$\frac{\sin \gamma}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin a}$$

donne alors la distance $d(B, C) = a$ et donc la position de C . Si on veut connaître les latitudes et longitudes de C , on peut introduire le pôle nord et le triangle sphérique BCN . De la connaissance de $d(B, C)$, $d(B, N)$ et de l'angle en B , l'analogie d'Al-Kashi donne $d(B, N)$; puis la loi des sinus donne l'angle en N et donc la longitude de C . Pour déterminer

la latitude, on introduit le point M sur l'équateur et de même longitude que C ; la distance $d(M, C)$ détermine alors la latitude.

Exemple : des récepteurs radio à Boston (B lat : $42^\circ 21' N$, long. $71^\circ 04' W$) et Norfolk (N : lat. $36^\circ 50' N$, long. $76^\circ 18' W$) détectent un signal d'un bateau ennemi venant des directions $S83^\circ 15' E$ de Boston et $N73^\circ 30' E$ de Norfolk.

On calcule comme précédemment dans le triangle BPN , où ici P désigne le pôle nord : on note n, b, p les distances respectives $d(B, P)$, $d(P, N)$ et $d(B, N)$ et $\hat{n}, \hat{b}, \hat{p}$ les angles aux sommets. On a alors $n = 47^\circ 39' = 47,65^\circ = 0,83$ radians, $b = 53^\circ 10' = 53,17^\circ = 0,927$ radians et $\hat{p} = 5^\circ 14' = 5,23^\circ = 0,091$ radians. De la formule

$$\cos p = \cos b \cos n + \sin b \sin n \cos \hat{p}$$

on tire $\cos p = 0,9916$ soit $p = 7^\circ 26' = 7,43^\circ = 0,13$ radians. On calcule enfin

$$\cos \hat{b} = \frac{\cos b - \cos p \cos n}{\sin b \sin n}$$

ce qui donne $\hat{b} = S47^\circ 15' E$. De même on calcule $\hat{N} = N142^\circ 50' W$.

On considère alors le triangle BXN , où X est la position à déterminer, dont on note $b, n, x, \hat{b}, \hat{x}, \hat{n}$ les 6 angles (on oublie les notations précédentes). On a $x = 0,13$ radians, $\hat{b} = 36^\circ = 0,628$ radians et $\hat{n} = 69^\circ 20' = 1,21$ radians. De la formule

$$\cos \hat{x} = -\cos \hat{b} \cos \hat{n} + \sin \hat{b} \sin \hat{n} \cos x$$

on tire $\hat{x} = 105^\circ = 1,83$ radians. On calcule enfin

$$\cos n = \frac{\cos \hat{n} + \cos \hat{b} \cos \hat{x}}{\sin \hat{b} \sin \hat{x}}$$

ce qui donne $n = 75^\circ 8' = 1,31$ radians soit 8348 kilomètres.

III.6. Cartographie

On paramètre la sphère via deux angles (θ, ϕ) respectivement appelés *latitude* et *longitude* ; on étudie alors les applications $f : (\phi, \theta) \in S \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Selon la situation, on s'intéresse plus particulièrement aux applications f :

- équivalentes, i.e. qui *conservent les surfaces* ; c'est utilisé en particulier pour le cadastre. Cela revient à demander que

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} = \cos \theta.$$

En effet, l'aire d'un élément infinitésimal sur la sphère est $\cos \theta d\theta d\phi$ et, sur \mathbb{R}^2 ,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array} \right| d\phi d\theta ;$$

- conformes, i.e. qui *conservent les angles* ; ces cartes sont utilisées par les marins afin de déterminer le cap. Cela revient à demander que

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 = \cos^2 \theta \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right). \end{cases}$$

En effet, l'application f est conforme si, et seulement si, l'image du rectangle $d\phi(\cos \theta d\theta)$ est un rectangle semblable, i.e. le rapport des longueurs des côtés est égal à $\cos \theta$;

— équidistantes, i.e. qui *conservent les distances*, sur les méridiens, ce qui revient à demander que

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 = 1.$$

III.6.1. Impossibilité des cartes isométriques. — Le lecteur peut légitimement se demander pourquoi, dans le paragraphe précédent, on se limite aux cartes équidistantes le long des méridiens. Une réponse est donnée par la proposition suivante.

Proposition III.6.1. — *Si U est un ouvert quelconque de S , il n'existe pas d'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui soit isométrique.*

Démonstration. — Soit, dans U , un triangle sphérique équilatéral, et soit t l'intersection des médiatrices (ce sont des grand-cercles), de sorte que $r = d(x, t) = d(y, t) = d(z, t)$ et $a = d(x, y) = d(x, z) = d(y, z)$. Soit m le milieu de yz : le triangle sphérique mty est rectangle en m et, par symétrie, l'angle en t de ytm est $\frac{\pi}{3}$. La loi des sinus donne alors

$$\frac{\sin r}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)},$$

et donc $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin r$. En prenant $0 < r < \pi/2$ et en utilisant la stricte décroissance de $\frac{\sin x}{x}$ sur $]0, \pi/2[$, on en déduit que $\sin(a/2) < \sin r$, et donc $0 < a/2 < r$; avec $\frac{\sin r}{\sin(a/2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2r/a$, on obtient $a < \sqrt{3}r$. Raisonnons alors par l'absurde : soient x', y', z', t' les images respectives de x, y, z, t , de sorte que t' est le centre du triangle équilatéral $x'y'z'$, avec $\frac{t'x'}{y'z'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où la contradiction. \square

III.6.2. Projections cylindriques. — On considère un cylindre tangent à l'équateur, sur lequel on projette la sphère; on déroule alors le cylindre pour obtenir une carte. Mathématiquement, les projections considérées sont de la forme

$$(\theta, \phi) \in S \mapsto (\phi, f(\theta)) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

- *Projection cylindrique perspective* : l'image d'un point M de la sphère est l'intersection du cylindre tangent à l'équateur avec la droite OM , soit $f(\theta) = \tan \theta$. Elle n'est ni conforme ni équivalente et n'est jamais utilisée dans la pratique (les pôles sont envoyés à l'infini!).
- *Projection cylindrique équidistante* : la condition est $(f'(\theta))^2 = 1$, ce qui donne $f(\theta) = \theta$; on l'appelle la projection des cartes plates carrées.
- *Projection cylindrique équivalente* : la condition est $f'(\theta) = \cos \theta$, soit $f(\theta) = \sin \theta$; concrètement, on projette orthogonalement la sphère sur le cylindre : cette projection s'appelle aussi la projection cylindrique de Lambert.
- *Projection cylindrique conforme* : la condition est $f'(\theta) = 1/\cos \theta$, soit $f(\theta) = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$; c'est la fameuse projection de Mercator.

III.6.3. Projections azimutales. — Il s'agit de projeter la sphère sur le plan tangent à son Pôle nord selon la coutume héritée de l'histoire; mathématiquement, on considère les applications $(\phi, \theta) \in S \mapsto \rho(\theta)e^{i\phi} \in \mathbb{R}^2$, point que l'on note avec ses coordonnées polaires $(\phi, \rho(\theta))$.

- *Projection gnomonique* : on considère l'intersection du plan avec la droite passant par O , soit $\rho(\theta) = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$. Elle ne peut représenter qu'un hémisphère, elle déforme beaucoup, mais l'image des grand-cercles sont des droites, et réciproquement, ce qui est particulièrement pratique pour trouver le plus court chemin, par exemple dans l'aviation.
- *Projection orthographique* : on projette la sphère orthogonalement sur le plan, soit $\rho(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$; en particulier, les parallèles ne sont pas déformés. C'est la vision qu'a de la Terre un extra-terrestre approchant du Pôle.
- *Projection azimutale équidistante* : on trouve $\rho(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$.
- *Projection azimutale équivalente* : la condition est $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)\rho'(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, ce qui donne

$$\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}.$$

Celle-ci est appelée *projection azimutale de Lambert* et s'obtient par report de la longueur de la corde joignant le point au pôle.

- *Projection azimutale conforme* : la première condition donne

$$\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)^2 = \sin^2(\frac{\pi}{2} - \theta) \times \rho'(\frac{\pi}{2} - \theta)^2,$$

et donc $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2 \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$. Il s'agit de la projection stéréographique, c'est-à-dire de l'intersection avec le plan de la droite passant par le pôle sud.

CHAPITRE IV

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Introduction

Comme précédemment notre présentation de la géométrie projective passera par l'utilisation de l'algèbre linéaire sur le corps des nombres réels ou un autre. Cette approche plus récente possède plusieurs avantages :

- elle permet de relier la géométrie affine, euclidienne ou non directement à la géométrie projective ;
- elle met en son coeur les nombres ;
- elle permet d'introduire rapidement les transformations de la géométrie au sens du programme d'Erlangen.

L'idée essentielle développée par Klein, c'est que toutes les géométries peuvent être obtenues à partir de la géométrie projective et d'une donnée supplémentaire. Le cas le plus simple est celui de la géométrie affine : le plan affine s'obtient à partir du plan projectif en regardant le complémentaire d'une droite projective. La structure euclidienne s'obtient ensuite en se donnant une forme quadratique définie positive, ou encore en se donnant deux points imaginaires à l'infini : les fameux points cycliques. On obtient aussi à partir du plan projectif $\mathbb{P}(E)$, les géométries non euclidiennes en se donnant une forme quadratique q non dégénérée sur E : pour q définie positive on obtient la géométrie elliptique, et sinon la géométrie hyperbolique.

Approche axiomatique du plan projectif : on appelle plan projectif la donnée d'un ensemble \mathbb{P} d'éléments appelé points et une famille non-vide de parties distinctes de \mathbb{P} et non vides, appelées droites. On suppose vérifiés les axiomes suivants dits d'incidence :

- par deux points distincts de \mathbb{P} passe une droite et une seule ;
- deux droites distinctes ont exactement un point commun ;
- il existe trois points non alignés ;
- toute droite contient au moins trois points.

Le plan est dit arguésien si le théorème de Desargues y est vérifié (c'est un axiome que l'on peut rajouter). On montre alors qu'un plan arguésien est isomorphe à $\mathbb{P}_2(K)$ où K est un corps lequel sera commutatif si et seulement si le théorème de Pappus est vérifié (c'est donc un axiome que l'on peut encore ajouter). Si on veut que le corps K soit le corps des nombres réels, on reprend les axiomes d'ordre présentés dans le cadre de la géométrie euclidienne.

IV.1. Généralités

IV.1.1. Espaces et sous-espaces projectifs. —

Définition IV.1.1. — Étant donné un espace vectoriel E , on appelle espace projectif associé à E et on note $\mathbb{P}(E)$, le quotient $E - \{0\}$ par la relation d'équivalence de proportionnalité. La dimension de $\mathbb{P}(E)$ est $\dim E - 1$.

Remarque : autrement dit $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E .

Notation IV.1.2. — On note p la projection $E - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$.

Définition IV.1.3. — On appelle sous-espace projective (sep) de $\mathbb{P}(E)$, l'image par p d'un sous-espace vectoriel V de E .

Remarque : on devrait dire $p(V - \{0\})$ mais on écrira $p(V)$.

Remarque : une droite (resp. un plan) projective de $\mathbb{P}(E)$ est un sep de dimension 1 (resp. 2). Des points de $\mathbb{P}(E)$ sont ainsi dits alignés (resp. coplanaires) s'il existe une droite (resp. un plan) projective les contenant.

Proposition IV.1.4. — Soit $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension $n \geq 2$. On a les propriétés suivantes :

- par deux points distincts a, b passe une droite projective et une seule que l'on note (ab) ;
- par trois points a, b, c non alignés passe un plan et un seul que l'on note (abc) .

Démonstration. — Notons \tilde{a} et \tilde{b} deux vecteurs de E relevant a et b . Comme $a \neq b$, les vecteurs \tilde{a} et \tilde{b} sont non colinéaires et déterminent donc un unique plan vectoriel dont l'image par p détermine l'unique droite projective contenant a et b . Le raisonnement est analogue dans le cas de 3 points. \square

Proposition IV.1.5. — Soit A une partie quelconque de $\mathbb{P}(E)$. L'ensemble des sep contenant A possède un plus petit élément relativement à l'inclusion que l'on note $\langle A \rangle$ et que l'on appelle le sep engendré par A .

Démonstration. — Comme d'habitude, il suffit de remarquer qu'une intersection quelconque de sep est un sep, éventuellement vide, de sorte que $\langle A \rangle$ est l'intersection de tous les sep contenant A . \square

Remarque : $\langle A \rangle$ est aussi l'image par p du sous-espace vectoriel de E engendré par $p^{-1}(A)$.

Proposition IV.1.6. — Si L et L' sont deux vlp de $\mathbb{P}(E)$, on a la formule des dimensions :

$$\dim L + \dim L' = \dim(L \cap L') + \dim v(L \cup L').$$

Démonstration. — C'est une simple traduction de la formule de Grassman pour les espaces vectoriels. \square

Corollaire IV.1.7. — Si $\dim L + \dim L' \geq \dim \mathbb{P}(E)$ alors $L \cap L'$ est non vide.

Remarque : on retrouve ainsi que dans le plan projectif toutes les droites s'intersectent, donc pas de droites parallèles. On peut dire en quelque sorte que la géométrie projective correspond au cas « générique » de la géométrie affine, le cas où il n'y a pas de parallèles.

IV.1.2. Repères projectifs. — Tout comme en géométrie vectorielle, les calculs relativement aux sep reposent sur les équations des hyperplans projectifs :

Définition IV.1.8. — Soit H un hyperplan vectoriel de E défini comme noyau d'une forme linéaire $f \in E^*$; on dit que f est une équation de l'hyperplan projectif $p(H)$, laquelle est définie à un scalaire multiplicatif près.

Remarque : un point $a \in \mathbb{P}(E)$ appartient à $p(H)$ si et seulement si $f(\tilde{a}) = 0$ pour un représentant quelconque $\tilde{a} \in E$ de a . La mise en place de calculs explicites nécessitera alors le choix d'un repère projectif .

Avant de donner la définition formelle d'un repère projectif, essayons d'en donner une justification vectorielle. Soit (e_0, e_1, \dots, e_n) une base de E ; si A est un point de $\mathbb{P}(E)$, il lui correspond une droite de E et donc un système de coordonnées homogènes de la forme $\{\lambda(x_0, \dots, x_n) : \lambda \in K^\times\}$. Pour décrire cette donnée purement intrinsèquement en termes de $\mathbb{P}(E)$ il suffit de se donner :

- des points P_0, \dots, P_n de $\mathbb{P}(E)$ qui sont les images des éléments d'une base de E ;
- un point P_{n+1} de coordonnées homogènes $(1, \dots, 1)$.

La donnée des points P_0, \dots, P_n détermine les droites Ke_i et donc la base cherchée est de la forme $(a_0e_0, \dots, a_n e_n)$. Le point P_{n+1} associé à $\sum_{i=0}^n a_i e_i$ détermine la droite $K(e_0 + \dots + e_n)$ ce qui impose que tous les a_i sont égaux. Ainsi les bases associées à ces données sont $\lambda(e_0, \dots, e_n)$ de sorte que si les coordonnées de M dans la base (e_0, \dots, e_n) est (x_0, \dots, x_n) , dans la base $\lambda(e_0, \dots, e_n)$ est $(\lambda^{-1}x_0, \dots, \lambda^{-1}x_n)$.

Définition IV.1.9. — Un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ consiste en la donnée de $n + 2$ points x_0, \dots, x_{n+1} tels qu'il existe une base (e_1, \dots, e_{n+1}) de E vérifiant :

- $p(e_i) = x_i$ pour $i = 1, \dots, n + 1$ et
- $p(e_1 + \dots + e_{n+1}) = x_0$.

On peut donner une caractérisation géométrique d'un repère.

Proposition IV.1.10. — *Un $n + 2$ -uplet de points de $\mathbb{P}(E)$ est un repère si et seulement si $n + 1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants, i.e. n'appartiennent pas à un même hyperplan.*

Démonstration. — Notons d'abord qu'il est équivalent de dire que (e_1, \dots, e_n) est une base de E ou que leurs images $x_i = p(e_i)$ ne sont pas dans un même hyperplan. Dans le sens direct, le résultat vient du fait que $n + 1$ quelconques vecteurs parmi $e_0 = e_1 + \dots + e_{n+1}$, e_1, \dots, e_{n+1} forment une base de E .

Réciproquement si x_0, \dots, x_{n+1} vérifient les conditions de la proposition, on note e_1, \dots, e_{n+1} des antécédents par p alors par hypothèse, ils forment une base de E . On relève x_0 en un vecteur e_0 qui se décompose alors en $e_0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1}$. On note alors que les λ_i sont tous non nuls car si $\lambda_{i_0} = 0$ alors la famille $(e_i)_{i \neq i_0}$ serait liée et les $(x_i)_{i \neq i_0}$ appartiendraient à un même hyperplan. Quitte à changer e_i en $\lambda_i e_i$, x_0, \dots, x_{n+1} vérifient bien la propriété d'être un repère. \square

Exemples Un repère projectif d'une droite projective est la donnée de trois points distincts ; un point y est repéré par un système $\{\lambda(x_0, x_1) ; \lambda \in K^\times\}$ de coordonnées homogènes. Pour le plan projectif il faut 4 points dont les 3 premiers forment un vrai triangle et le quatrième n'appartient à aucune des trois droites déterminées par les côtés de ce triangle.

Remarque : L'équation d'un hyperplan de E a une équation de la forme $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$; cette équation exprime que le point de coordonnées homogènes (x_0, \dots, x_n) de $\mathbb{P}(E)$ est dans l'hyperplan projectif $p(H)$. Un sep étant l'intersection d'hyperplans, sera définie par un système d'équations homogènes.

IV.1.3. Groupe projectif. — Pour définir les transformations d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$, il est naturel de partir des endomorphismes de E ; comme par ailleurs on ne veut pas obtenir 0, il faut se restreindre aux automorphismes. Ainsi, une application linéaire injective u stabilise $E - \{0\}$ et passe au quotient par la relation de proportionnalité; elle définit donc une application $\mathbb{P}(u)$ de $\mathbb{P}(E)$. Plus généralement pour E et E' deux espaces vectoriels on définit la notion d'homographie.

Définition IV.1.11. — Soit $u : E \rightarrow E'$ une application linéaire bijective, l'application bijective $\mathbb{P}(u) : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ définie par $\mathbb{P}(u)(a) = p(u(\tilde{a}))$ où $a = p(\tilde{a})$, est appelée une homographie.

Remarque : on a $\mathbb{P}(u \circ v) = \mathbb{P}(u) \circ \mathbb{P}(v)$, de sorte que l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(E)$ est un groupe noté $PGL(E)$.

Proposition IV.1.12. — *Le groupe projectif $PGL(E)$ de $\mathbb{P}(E)$ est isomorphe à $GL(E)/K^\times$.*

Démonstration. — L'application $\mathbb{P} : GL(E) \rightarrow PGL(E)$ est clairement surjective et son noyau est l'ensemble des applications linéaire $u \in GL(E)$ telles que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in K^\times$ avec $u(x) = \lambda_x x$. Montrons que la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est constante ce qui prouvera que le noyau de \mathbb{P} est K^\times identifié aux homothéties non nulles.

Si $y = \mu x$ alors $u(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$ et comme $u(y) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x$ on en déduit que $\lambda_y = \lambda_x$. Si désormais (x, y) est une famille libre, on a

$$\begin{aligned} u(x + y) &= \lambda_{x+y}(x + y) \\ &= u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \end{aligned}$$

et comme (x, y) est libre, on en déduit que $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$, d'où le résultat. \square

Remarque : l'image par une homographie d'un sep est un sep de même dimension. En particulier les homographies conservent l'alignement, on dit encore que ce sont des *collinéations*. La réciproque est donnée par le théorème fondamental de la géométrie projective dont le lecteur intéressé pourra trouver une preuve dans la bonne littérature, par exemple dans [?].

Théorème IV.1.13. — *Soient E et E' deux espaces vectoriels de même dimension et $f : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ une bijection conservant l'alignement, i.e. une collinéation. Alors f est une semi-homographie, i.e. de la forme $\mathbb{P}(u)$ pour $u : E \rightarrow E'$ une application semi-linéaire.*

Proposition IV.1.14. — *Soient $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E')$ deux espaces projectifs de même dimension n , (P_0, \dots, P_{n+1}) et (P'_0, \dots, P'_{n+1}) des repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E')$. Il existe alors une unique homographie h de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E')$ telle que $h(P_i) = P'_i$ pour $i = 0, \dots, n + 1$.*

Démonstration. — On relève P_0, \dots, P_n en une base (e_0, \dots, e_n) de E telle que $p(e_0 + \dots + e_n) = P_{n+1}$; idem pour (e'_0, \dots, e'_n) . Si h existe et est de la forme $\mathbb{P}(u)$ alors $u(e_i) = a_i e'_i$ avec $a_i \neq 0$. Comme $h(P_{n+1}) = P'_{n+1}$, on doit aussi avoir $u(e_0 + \dots + e_n) = a_0 e'_0 + \dots + a_n e'_n = b(e'_0 + \dots + e'_n)$ de sorte que tous les a_i sont égaux à b ce qui détermine u à homothétie près et donc $h = \mathbb{P}(u)$ est unique. \square

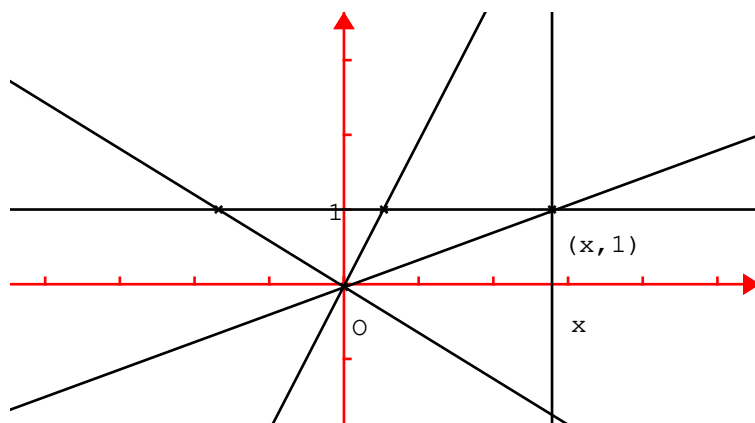


FIGURE 1. Bijection entre les droites vectorielles du plan et la droite projective

IV.1.4. Liaison affine-projectif. — Supposons que l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ est muni d'une base de sorte que l'on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^n(K)$ avec les coordonnées (x_0, \dots, x_n) . Soit H l'hyperplan vectoriel d'équation $x_0 = 0$ et posons $U = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$. On a alors une bijection $\phi : U \rightarrow K^n$ qui à un point $x = (x_0, \dots, x_n)$ associe $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$. Cette application est bien définie car sur U , x_0 est non nul et l'image de x par ϕ ne dépend pas du système de coordonnées homogènes choisi. Elle est évidemment bijective, la réciproque étant donnée par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$.

On a ainsi décrit $\mathbb{P}^n(K)$ comme la réunion disjointe de l'espace affine K^n et d'un espace projectif de dimension $n-1$, autrement dit on a plongé l'espace affine dans un espace projectif de même dimension en lui rajoutant des points « à l'infini ».

La droite projective : il s'agit du cas $n = 1$ et on appelle (x, t) les coordonnées de K^2 avec $t = 0$ comme hyperplan à l'infini ce qui donne un unique point $\infty = (1, 0)$ de $\mathbb{P}^1(K)$. Ainsi la droite projective est une droite affine à laquelle on a adjoint un unique point à l'infini. La figure 1 illustre la construction précédente : on associe à chaque droite de K^2 son intersection avec la droite affine D d'équation $t = 1$. En ce qui concerne les homographies, l'image de $(x, 1)$ par l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $(ax + b, cx + d)$ de sorte qu'en projectif l'image de $(x, 1)$ est le point $(\frac{ax+b}{cx+d}, 1)$ si $x \neq -d/c$ et sinon le point ∞ , lequel s'envoie sur a/c .

Les droites du plan projectif : utilisons les coordonnées (x, y, t) avec $t = 0$ comme hyperplan à l'infini de sorte que $\mathbb{P}^2(K)$ est la réunion du plan affine $U = \{(x, y, 1)\}$ et de la droite projective D_∞ d'équation $t = 0$. Soit alors D une droite projective de $\mathbb{P}^2(K)$ d'équation $ux + vy + wt = 0$ avec (u, v, w) non nul.

- Si $u = v = 0$ alors on peut imposer $w = 1$ et D n'est autre que la droite de l'infini D_∞ .
- Sinon, la trace de D sur le plan affine U de $\mathbb{P}^2(K)$ consiste en les points (x, y) tels que $ux + vy + w = 0$ et on retrouve bien une droite affine. La trace de D sur D_∞ est donnée par les points $(x, y, 0)$ tels que $ux + vy = 0$ ce qui correspond à un unique point de coordonnées homogènes $(v, -u, 0)$ que l'on peut appeler *la pente* de D . On remarque alors que les traces dans le plan affine U de deux droites projectives distinctes D et D' sont d'intersection vide si et seulement si elles ont la même pente ; dans ce cas D et D' se coupent à l'infini, au point de D_∞ défini par leur pente.

Remarque : la notion de point à l'infini n'est pas intrinsèque et dépend de l'hyperplan de E considéré qui n'est pas nécessairement donné par l'annulation d'une coordonnée dans un repère donné. Nous donnons à présent une construction générale quel que soit l'hyperplan H choisi.

Proposition IV.1.15. — Soit $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension n et $\mathbb{P}(H)$ un hyperplan de $\mathbb{P}(E)$. Alors $\mathcal{E} = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$ est un espace affine tel que $\vec{\mathcal{E}} \simeq H$.

Démonstration. — On définit tout d'abord une action de H sur \mathcal{E} comme suit : soit $A = \mathbb{P}(x) \in \mathcal{E}$ alors $h.A = \mathbb{P}(x+h)$. C'est licite car $x+h \notin H$ et donc $\mathbb{P}(x+h) \in \mathcal{E}$ et $h.(h'.A) = (hh').A$. Il faut ensuite vérifier que cette action est simplement transitive. Pour la transitivité, soit D tel que $E = H \oplus D$ de sorte que pour $B = \mathbb{P}(y) \in \mathcal{E}$, il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $\lambda y = x+h$ et donc $B = h.A$. Enfin si $h.A = h'.A$ alors il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $x+h = \lambda(x+h')$; or comme $x \notin H$, on doit avoir $\lambda = 1$ et donc $h = h'$. \square

Définition IV.1.16. — Soit \mathcal{E} un espace affine sur K ; la clôture projective de \mathcal{E} est l'espace $\hat{\mathcal{E}} = \mathbb{P}(\vec{\mathcal{E}} \times K)$.

Pour A un point de \mathcal{E} , on définit une injection $j_A : \mathcal{E} \hookrightarrow \hat{\mathcal{E}}$ par $j_A(M) = p(M - A, 1)$. L'image est le complémentaire de l'hyperplan $\mathbb{P}(\vec{\mathcal{E}} \times \{0\})$ de $\hat{\mathcal{E}}$.

Définition IV.1.17. — Soit f une application affine injective de \mathcal{E} sur \mathcal{F} ; on définit $\hat{f} = \mathbb{P}(\vec{f} \times \text{Id}_K) : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$.

Remarque : \hat{f} prolonge f au sens où $\hat{f}(j_A(M)) = j_{f(A)}(f(M))$.

Ainsi tout espace affine peut être vu comme le complémentaire $P - H$ d'un hyperplan projectif; cet hyperplan et ses points, droites etc, sont dits à l'infini. Dans ce langage deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement si ils ont les mêmes points à l'infini. Inversement lorsqu'on choisit un hyperplan H d'un espace projectif P et que l'on regarde la structure affine de $P - H$, on dit qu'on a envoyé H à l'infini; on choisit alors les systèmes de coordonnées homogènes (x_0, \dots, x_n) de sorte que H soit l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Ainsi pour un point M de $P - H$, $(x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$ est un système de coordonnées affines de M .

Si un sep non situé à l'infini est défini par le système d'équation homogènes

$$a_{j,0}x_0 + a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = 0, \quad j = 1, \dots, q$$

son intersection avec $P - H$ est le sous-espace affine défini par les équations $a_{j,0} + a_{j,1}y_1 + \dots + a_{j,n}x_n = 0$. Dans l'autre sens un sous-espace affine défini par les équations $a_{j,1}y_1 + \dots + a_{j,n}y_n = b_j$ pour $j = 1, \dots, q$, sa clôture projective a pour équations $a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = b_j x_0$.

IV.1.5. Dualité. — On rappelle que pour un espace vectoriel E de dimension $n + 1$, son dual E^* est l'espace des formes linéaires sur E . Un hyperplan de E s'identifie au noyau d'une forme linéaire ou plus exactement à une droite vectorielle de E^* . Plus généralement pour F un sous-espace vectoriel de E , on définit l'orthogonal de F comme le sous-espace vectoriel de E^* défini par

$$F^\perp = \{f \in E^* : \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

Réciproquement on définit l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E^* par

$$F^\perp = \{x \in E : \forall f \in F, f(x) = 0\}.$$

Dans les deux cas, on a les formules

$$\dim F^\perp = n + 1 - \dim F \text{ et } F^{\perp\perp} = F.$$

Rappelons enfin que si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire, elle induit une application linéaire transposée ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$ définie par la formule ${}^t u(f) = f \circ u$. La correspondance $u \mapsto {}^t u$ est fonctorielle, i.e. vérifie ${}^t \text{Id}_E = \text{Id}_{E^*}$ et ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$.

Définition IV.1.18. — Pour $p = 0, \dots, n-1$, on note $G_p(\mathbb{P}(E))$ la grassmannienne d'indice p , i.e. l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension p de $\mathbb{P}(E)$.

Proposition IV.1.19. — L'application $\Phi_E : \mathbb{P}(E^*) \rightarrow G_{n-1}(\mathbb{P}(E))$ qui associe à l'image f d'une forme linéaire non nulle le sous-espace projectif associé à $\text{Ker } f$, est une bijection.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ si et seulement si f et g sont proportionnelles. \square

Remarque : la bijection précédente permet donc de munir $G_{n-1}(\mathbb{P}(E))$ d'une structure d'espace projectif de dimension n .

Définition IV.1.20. — Si V est un sep de $\mathbb{P}(E)$, on pose

$$V^* = \{H \in G_{n-1}(\mathbb{P}(E)) : V \subset H\}.$$

Proposition IV.1.21. — On a les formules suivantes :

1. pour tout sous-espace vectoriel F non nul de E^* , $\Phi_E(p(F)) = (p(F)^\perp)^*$;
2. pour un sous-espace vectoriel G non nul de E ; $p(G)^* = \Phi_E(p(G)^\perp)$.

Démonstration. — (1) Soit $f \in F$; par définition de F^\perp , on a $F^\perp \subset \text{Ker } f$ d'où $\Phi_E(p(f)) \in (p(F)^{\text{perp}})^*$.

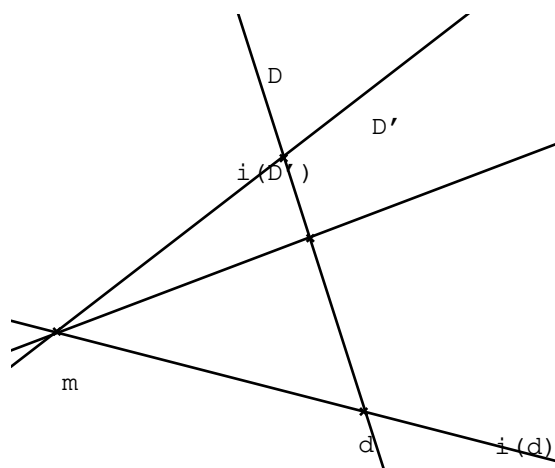
(2) Le résultat découle de (1) appliquée à G^\perp . \square

Remarque : dans le cas $n = 1$, l'ensemble des hyperplans de la droite projective n'est autre que l'ensemble de ses points. Ainsi $G_{n-1}(\mathbb{P}(E)) = \mathbb{P}(E)$ est déjà muni d'une structure projective que l'on peut comparer à celle provenant de Φ_E .

Proposition IV.1.22. — Pour $n = 1$, l'application $\Phi_E : \mathbb{P}(E^*) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ est une homographie.

Démonstration. — Soit (e_1, e_2) une base de E et (e_1^*, e_2^*) sa base duale. Soit $f = x_1 e_1^* + x_2 e_2^* \in E^*$ non nulle ; son noyau admet pour vecteur directeur $x_2 e_1 - x_1 e_2$ de sorte que Φ_E n'est autre que l'homographie associée à l'application linéaire $u : E^* \rightarrow E$ définie par $u(x_1 e_1^* + x_2 e_2^*) = x_2 e_1 - x_1 e_2$. \square

En dimension 2, i.e. dans le cas d'un plan projectif, un point m_* de $\mathbb{P}(E^*)$ correspond à une droite vectorielle $\langle f \rangle$ de E^* et on lui associe par Φ_E la droite projective $D_{m_*} = p(\text{Ker } f)$ de $\mathbb{P}(E)$. Une droite D_* de $\mathbb{P}(E^*)$ correspond à un plan vectoriel F de E^* dont l'orthogonal F^\perp est de dimension 1 dans E et définit donc un point $m_{D_*} = p(F^\perp)$ de $\mathbb{P}(E)$. Partant dans $\mathbb{P}(E^*)$, d'un point m_* appartenant à une droite D_* , dualement dans $\mathbb{P}(E)$, la droite D_{m_*} contiendra le point m_{D_*} . En utilisant la bidualité canonique $E \simeq (E^*)^*$, on obtient les constructions dans l'autre sens, i.e. on associe à un point m de $\mathbb{P}(E)$ appartenant à une droite D , une droite m^* de $\mathbb{P}(E^*)$ contenant le point D^* . Ainsi toute propriété dans $\mathbb{P}(E)$ admet par dualité sa traduction dans $\mathbb{P}(E^*)$. Par exemple, trois points a, b, c de $\mathbb{P}(E)$ sont alignés sur

FIGURE 2. Les incidences entre m^* et D

une droite D si et seulement si les trois droites duales a^*, b^*, c^* sont concourantes au point D^* de $\mathbb{P}(E^*)$. Ainsi pour chaque théorème portant sur les points et droites de $\mathbb{P}(E)$, on peut en obtenir une variante duale, appelé **théorème corrélatif**, en l'appliquant à $\mathbb{P}(E^*)$ et en traduisant l'énoncé sur les points et les droites de $\mathbb{P}(E^*)$.

IV.1.6. Incidences, perspectives et réfractions du plan projectif. — Dans ce paragraphe on suppose que $n = 2$, i.e. que $\mathbb{P}(E)$ est un plan projectif.

Définition IV.1.23. — Soit $m \in \mathbb{P}(E)$, un point de la droite projective m^* de $\mathbb{P}(E^*)$ définit une droite de $\mathbb{P}(E)$ passant par m et réciproquement toute droite projective de $\mathbb{P}(E)$ passant par m définit dans $\mathbb{P}(E^*)$ un point appartenant à m^* . La droite m^* s'appelle **le pinceau** des droites de $\mathbb{P}(E)$ passant par m .

Remarque : on renvoie au §IV.2.1 pour le cas de la dimension quelconque.

Définition IV.1.24. — Pour D une droite de $\mathbb{P}(E)$ et $m \notin D$, on définit l'application bijective

$$i : m^* \longrightarrow D$$

appelée **incidente**, en associant à une droite Δ passant par m l'unique point d'intersection d de D et Δ . La réciproque de cette application, appelée aussi incidence, associe à un point d de D la droite (md) .

Proposition IV.1.25. — *L'incidence est une homographie.*

Démonstration. — On choisit une base (x, y, z) de E avec $p(x) = m$ et $p(y), p(z) \in D$. Si (x^*, y^*, z^*) est la base duale, m^* est l'image par Φ_E du sous-espace de $\mathbb{P}(E^*)$ image de (y^*, z^*) . Soit $\delta = \lambda y^* + \mu z^*$ dans ce sous-espace avec (λ, μ) non nul. L'intersection d de la droite Δ définie par δ avec D est donnée par les $\alpha y + \beta z$ vérifiant $(\lambda y^* + \mu z^*)(\alpha y + \beta z) = \lambda \alpha + \mu \beta = 0$ ce qui donne $d = \mu y - \lambda z$ à un scalaire près, de sorte que i provient de l'application linéaire $\lambda y^* + \mu z^* \mapsto \mu y - \lambda z$ et est donc bien une homographie. \square

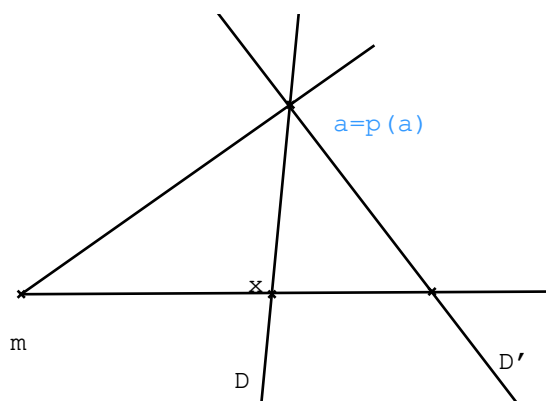


FIGURE 3. La perspective de centre m de D sur D'

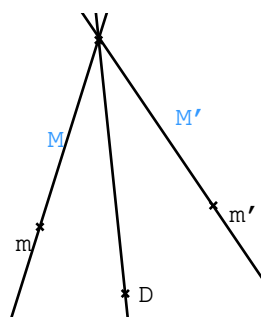


FIGURE 4. La réfraction d'axe D de m^* sur $(m')^*$

Corollaire IV.1.26. — Soient D et D' deux droites de $\mathbb{P}(E)$ et soit $m \notin D \cup D'$. L'application

$$p_m : D \rightarrow D'$$

qui à $x \in D$ associe l'unique point d'intersection de (mx) et de D' , est une homographie.

Démonstration. — Considérons la droite m^* de $\mathbb{P}(E^*)$, i.e. l'ensemble des droites de $\mathbb{P}(E)$ passant par m . L'application p_m est alors la composée des deux incidences suivantes :

- celle de D dans m^* qui à x associe (mx) ;
- celle de m^* dans D' qui à une droite Δ associe l'unique point de $\Delta \cap D'$.

Comme les incidences sont des homographies, le résultat en découle. □

Définition IV.1.27. — L'application p_m de la proposition précédente s'appelle **la perspective de centre m de D sur D'** .

Remarque : p_m est bijective, c'est l'identité si $D = D'$ et le point d'intersection de D et D' est fixe. Par dualité, on définit :

Définition IV.1.28. — Soient $m \neq m'$ deux points de $\mathbb{P}(E)$ et D une droite ne contenant ni m ni m' . **La réfraction d'axe D de m^* sur $(m')^*$** associe à une droite M passant par m , l'unique droite M' qui coupe M sur D .

Remarque : on peut évidemment définir des perspectives (resp. des réfractions) en dimension quelconque d'un hyperplan sur un autre en copiant les constructions précédentes ; ce sont encore des homographies.

IV.1.7. Preuves projectives des théorèmes de Desargues, Pappus, Brianchon. — Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème de Desargues.

Théorème IV.1.29. — de Desargues

Dans un plan projectif, soient D_1, D_2 et D_3 trois droites distinctes ayant en commun un point o . On prend sur chacune deux points distincts a_i, b_i tous distincts de o . Alors les trois points d'intersection $k = (a_1a_2) \cap (b_1b_2)$, $j = (a_1a_3) \cap (b_1b_3)$ et $i = (a_2a_3) \cap (b_2b_3)$ sont alignés.

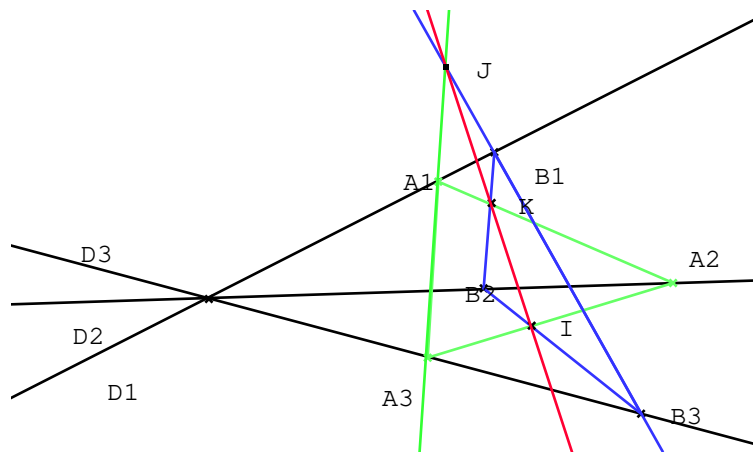


FIGURE 5. Desargues projectif

Démonstration. — par changement de géométrie

On envoie la droite (ij) à l'infini de sorte que dans le plan affine associé, les droites (a_1a_3) et (a_2a_3) sont respectivement parallèles à (b_1b_3) et (b_2b_3) . La nouvelle figure 6 est alors celle du §?? et on reprend la démonstration de ??.

□

Démonstration. — par un détour dans la troisième dimension

On considère l'énoncé en dimension 3 en supposant les trois droites non coplanaires ; ainsi les plans $a_1a_2a_3$ et $b_1b_2b_3$ ont une droite en commun qui contient i, j, k . Le résultat en dimension 2 s'obtient alors par projection.

□

Nous proposons désormais une preuve purement projective.

Lemme IV.1.30. — des trois perspectives

Soient A, B, C trois droites distinctes concourantes en un point o et soient u, v, w trois points distincts tels que $u \notin B \cup C$, $v \notin C \cup A$ et $w \notin A \cup B$. On considère les trois perspectives p_u, p_v et p_w respectivement de B sur C , C sur A et A sur B . Alors si on a $p_w \circ p_v \circ p_u = \text{Id}_B$ alors les points u, v, w sont alignés.

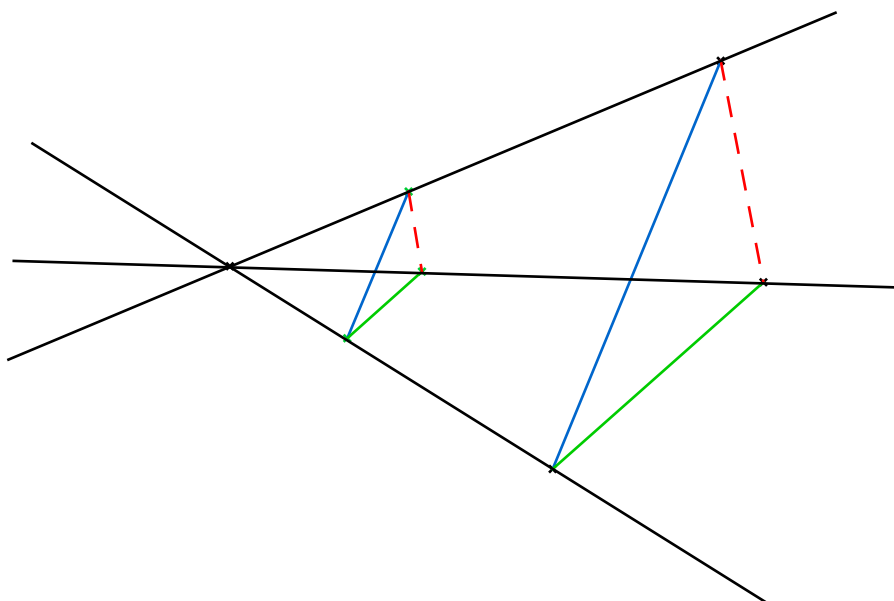


FIGURE 6. Desargues par changement de géométrie

Démonstration. — Si les droites (uv) et (vw) passent par o , elles sont toutes deux égales à (ov) et les trois points sont alignés. Sinon, supposons par exemple que (uv) ne passe pas par o , alors (uv) coupe A, B, C (car $u \notin B \cup C$ et $v \notin A$) en a, b, c respectivement et on a $a \neq b$ (sinon on aurait $a = b = o$), de sorte qu'on a $(uv) = (ab)$. Mais on a $p_u(b) = c$ et $p_v(c) = a$ et comme $p_w p_v p_u = \text{Id}_B$, on a aussi $p_w(a) = b$ et donc w est sur $(ab) = (uv)$. \square

Remarque : le fait que u, v, w soient alignés n'implique pas que la composée des perspectives soit l'identité, mais si pour un point $y \in B$ distinct de o et du point b défini dans la preuve du lemme, on a $p_w p_v p_u(y) = y$ alors la composée est l'identité (regarder sur le repère (o, b, y)); on est alors dans la configuration de Desargues.

Démonstration. — *projective du théorème de Desargues*

On considère la composée des perspectives $f = p_i \circ p_j \circ p_k$; on a $f(o) = o$, $f(a_2) = a_2$ et $f(b_2) = b_2$ de sorte que, les points o, a_2, b_2 définissant une base de D_2 , f est égale à l'identité et le résultat découle du lemme des trois perspectives. \square

Remarque : l'énoncé du théorème de Desargues est autodual.

Corollaire IV.1.31. — *réciproque du théorème de Desargues*

Soient deux triangles $a_1 a_2 a_3$ et $b_1 b_2 b_3$ tels que les points $i = (a_2 a_3) \cap (b_2 b_3)$, $j = (a_1 a_3) \cap (b_1 b_3)$ et $k = (a_1 a_2) \cap (b_1 b_2)$ sont alignés; alors les droites $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ et $(a_3 b_3)$ sont concourantes.

Démonstration. — Comme toujours dans ces situations d'énoncés réciproques, on utilise le sens direct. Notons $o = (a_1 b_1) \cap (a_2 b_2)$ et soit b'_3 l'intersection de (oa_3) avec $(b_1 j)$. On applique le théorème de Desargues aux triangles $a_1 a_2 a_3$ et $b_1 b_2 b'_3$; les points k et j restent les mêmes

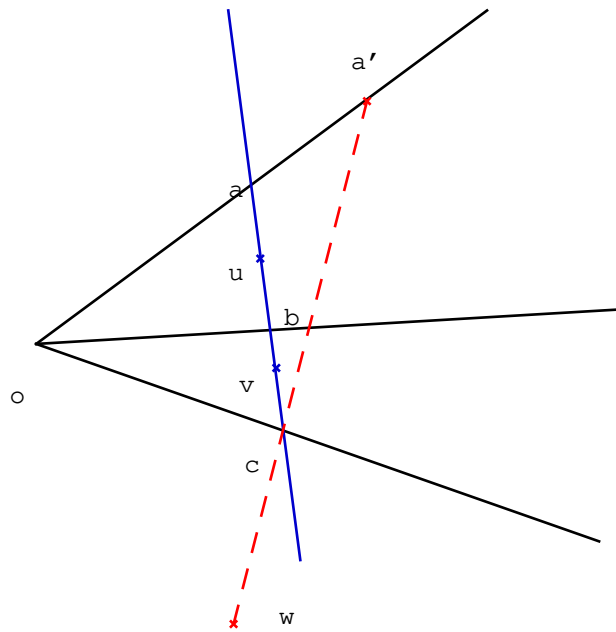


FIGURE 7. Lemme des trois perspectives

et le point i devient un point i' appartenant aux droites (jk) , (a_2a_3) et $(b_2b'_3)$. Comme $i = (jk) \cap (a_2a_3)$ on en déduit que $i = i'$ mais alors $(b_2b'_3) = (b_2b_3)$ soit $b'_3 = (b_2b_3) \cap (b_1b_3) = b_3$ et donc $o \in (a_3b_3)$. \square

Corollaire IV.1.32. — *Les médianes d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration. — Notons a', b', c' les milieux respectifs des segments $[bc]$, $[ac]$ et $[ab]$. D'après le théorème de Thalès les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles de même que (bc) et $(b'c')$ (resp. (ac) et $(a'c')$). Ainsi avec les notations du théorème de Desargues les points i, j, k sont alignés sur la droite de l'infini et donc, d'après la réciproque du théorème de Desargues, les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes. \square

Théorème IV.1.33. — **de Pappus**

Soient deux droites distinctes D et D' munis des points a, b, c et a', b', c' tous distincts. Les points $k = (ab') \cap (ba')$, $j = (ac') \cap (ca')$ et $i = (bc') \cap (cb')$ sont alignés.

Démonstration. — en envoyant la droite (ij) à l'infini

Dans le plan affine associé, les droites (bc') et (ac') sont respectivement parallèles à (cb') et (ca') ; la nouvelle figure est alors celle de ?? et on conclut via la proposition ??.

\square

Démonstration. — par composition d'application projective

Considérons la projection p_a de centre a de la droite $(a'b)$ sur D' ; en notant $u = (a'b) \cap (ac')$, le quadruplet (a', i, u, b) est envoyé sur (a', b', c', o) . La projection p_c de centre c de D' sur

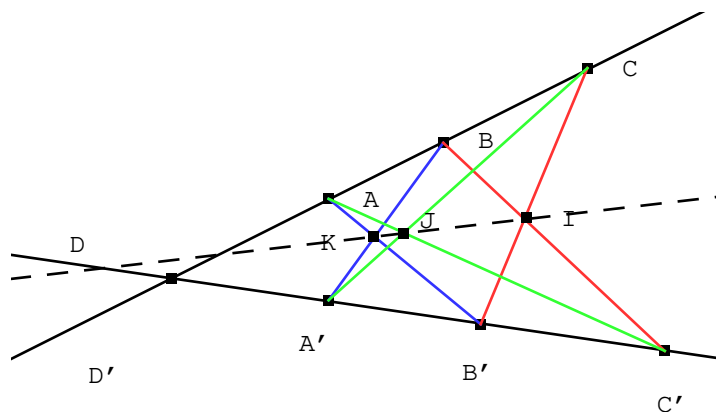


FIGURE 8. Pappus projectif

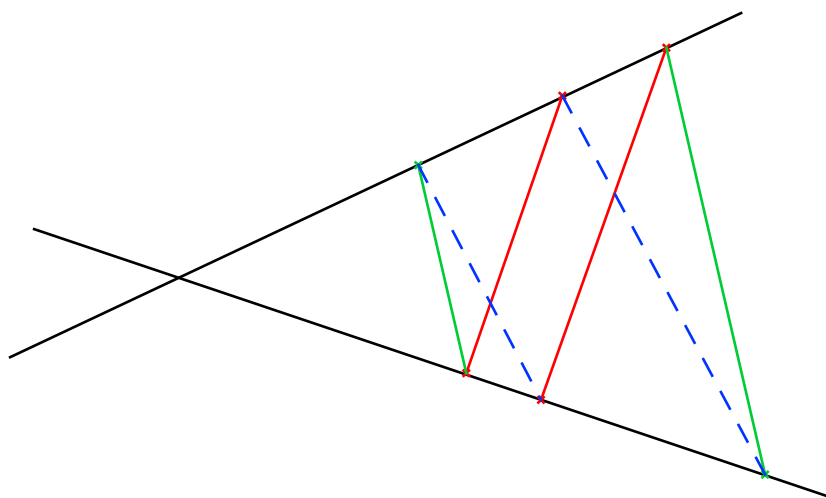


FIGURE 9. Pappus projectif par changement de géométrie

(bc') envoie (a', b', c', o) sur (v, k, c', b) où $v = (bc') \cap (ca')$. Ainsi $p_c \circ p_a$ envoie (a', i, u, b) sur (v, k, c', b) .

La projection p_j de centre j qui envoie $(a'b)$ sur (bc') envoie (a', i, u, b) sur (v, k', c', b) , où $k' = (ij) \cap (bc')$.

Ainsi comme p_j et $p_c \circ p_a$ coïncident sur trois points distincts a, u, b , elles sont égales et donc $k = k' \in (ij)$. \square

Remarque : le théorème corrélatif de Pappus est le théorème de Brianchon.

Théorème IV.1.34. — de Brianchon Soient d et d' deux points distincts de $\mathbb{P}(E)$ et $D = (dd')$. Soient A, B, C (resp. A', B', C') trois droites distinctes passant par d (resp. d') et

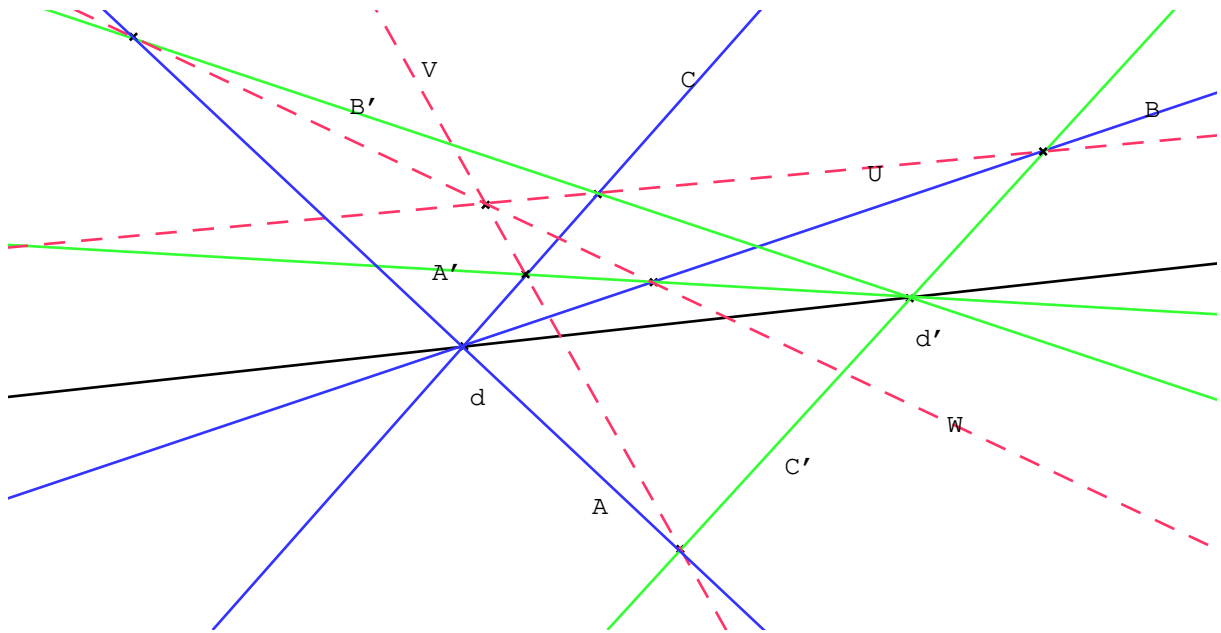


FIGURE 10. Le théorème de Brianchon

distinctes de D . On appelle respectivement U, V, W les droites qui joignent les points d'intersection de B, C' et de B', C et de C, A' et de C', A et de A, B' et de A', B . Alors U, V, W sont concourantes.

IV.2. Exemples

IV.2.1. Espaces projectifs d'hyperplans. — On rappelle que l'ensemble des hyperplans de E ou de $\mathbb{P}(E)$ s'identifie à $\mathbb{P}(E^*)$.

Définition IV.2.1. — Un sep S de $\mathbb{P}(E^*)$ s'appelle un **système linéaire d'hyperplans**; si $\dim S = 1$ on l'appelle un faisceau linéaire d'hyperplans.

Théorème IV.2.2. — *Étant donné un système linéaire S d'hyperplans de $\mathbb{P}(E)$, il existe un sep $B(S)$, appelé la base de S , telle que S soit l'ensemble des hyperplans contenant $B(S)$; on a $\dim B(S) = \dim \mathbb{P}(E) - \dim S - 1$.*

Remarque : ce résultat généralise le cas déjà étudié en dimension 2 où un faisceau de droite est l'ensemble des droites passant par un point $B \in \mathbb{P}(E)$.

Démonstration. — Raisonnons au niveau des espaces vectoriels; soit T le sous-espace de E^* associé à S . Par bidualité $E = (E^*)^*$, T' s'identifie à l'ensemble des zéros communs aux formes de T et $(T')' = T$. En posant $B(S) = p(T')$, on voit donc que les hyperplans de S ne sont autres que ceux qui contiennent $B(S)$. Comme $\dim B(S) = \dim T' - 1 = \dim e - \dim T - 1$, on obtient bien le résultat. \square

Remarque : comme dans le cas de la dimension 2 avec la dualité points-droites, tout théorème sur les sep d'un espace projectif s'applique aux systèmes linéaires d'hyperplans, i.e. à $\mathbb{P}(E^*)$.

IV.2.2. L'espace projectif des cercles : faisceaux de cercles. — Dans un repère orthonormé, un cercle du plan affine euclidien a une équation de la forme $x^2 + y^2 + bc + cy + d = 0$. Bien entendu une telle équation n'a pas toujours de solutions réelles, considérer par exemple $x^2 + y^2 + 1 = 0$; pour autant on aimerait bien identifier un cercle du plan euclidien à son équation, une façon de contourner le problème consiste à regarder les solutions complexes d'une telle équation. Mais alors s'introduisent naturellement de telles équations à coefficients complexes. Par ailleurs pour être certain que l'on aura tous les points, il est plus prudent de se placer dans le plan projectif. On introduit alors la notion suivante.

Définition IV.2.3. — Nous appellerons **cercle généralisé**, l'ensemble des points de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ dont les coordonnées homogènes (x, y, t) satisfont à une équation de la forme

$$a(x^2 + y^2) + bxt + cyt + dt^2 = 0$$

où $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ est défini à proportionnalité près.

Ainsi un cercle généralisé est soit

- un vrai cercle complexe si $a \neq 0$;
- la réunion de la droite de l'infini et d'une autre droite si $a = 0$ et $(b, c) \neq (0, 0)$;
- la droite de l'infini comptée deux fois si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Dans ce contexte l'ensemble des cercles généralisés est un espace projectif complexe de dimension 3.

Définition IV.2.4. — Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles généralisés de coordonnées homogènes respectives $(a : b : c : d)$ et $(a' : b' : c' : d')$. Leur **axe radical** est la droite d'équation :

- $bx + cy + dt$ si $a = 0$ (resp. $b(x + c'y + d't = 0$ si $a' = 0)$);
- pour $aa' \neq 0$

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)x + \left(\frac{c}{a} - \frac{c'}{a'}\right)y + \left(\frac{d}{a} - \frac{d'}{a'}\right)t = 0.$$

Remarque : cette définition généralise celle de ?? : en effet $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ est une équation du cercle de centre $O = (a, b)$ et de rayon r et la puissance d'un point $M = (x_0, y_0)$ par rapport à celui-ci est, par définition $MO^2 - r^2$ soit $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$. Ainsi pour deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' d'équations respectives $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ et $C'(x, y) = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$, l'ensemble des points (x_0, y_0) ayant même puissance par rapport à \mathcal{C} et \mathcal{C}' est ceux tels que $C(x_0, y_0) - C'(x_0, y_0) = (a - a')x_0 + (b - b')y_0 + c - c' = 0$.

Proposition IV.2.5. — Deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de coordonnées homogènes (a, b, c, d) et (a', b', c', d') sont orthogonaux si et seulement si

$$bb' + cc' - 2(ad' + da') = 0.$$

Démonstration. — Un cercle d'équation affine $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w = 0$ a (u, v) pour centre et $u^2 + v^2 - w$ pour carré du rayon. L'orthogonalité de ce cercle avec celui d'équation $x^2 + y^2 - 2u'x - 2v'y + w' = 0$ s'exprime par $(u - u')^2 + (v - v')^2 = u^2 + v^2 - w + (u')^2 + (v')^2 - w'$ soit $2(uu' + vv') - (w + w') = 0$, d'où le résultat. \square

En tenant compte des cercles dégénérés, on a :

- \mathcal{C} de rayon nul et \mathcal{C}' quelconque $\neq 2D_0$, sont orthogonaux si et seulement si le centre de \mathcal{C} est sur \mathcal{C}' ;
- un vrai cercle \mathcal{C} et $D + D_0$ sont orthogonaux si et seulement si D passe par le centre de \mathcal{C} ;

- $D + D_0$ et $D' + D_0$ sont orthogonaux si et seulement si D et D' sont orthogonales ;
- C est orthogonal à $2D_0$ si et seulement si C est de la forme $D + D_0$.

Définition IV.2.6. — Un faisceau de cercles est une droite de l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

Proposition IV.2.7. — Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles généralisés distincts d'un faisceau \mathcal{F} de cercles et soient D leur axe radical au sens de la définition IV.2.4. Alors \mathcal{F} est l'ensemble des cercles généralisés tels que D est l'axe radical de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C} .

Démonstration. — Si $(a_1 : b_1 : c_1 : d_1)$ et $(a_2 : b_2 : c_2 : d_2)$ sont respectivement les coordonnées homogènes de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 alors tout cercle \mathcal{C} de \mathcal{F} a pour coordonnées homogènes $(\alpha a_1 + \beta a_2 : \alpha b_1 + \beta b_2 : \alpha c_1 + \beta c_2 : \alpha d_1 + \beta d_2)$. Avec la définition IV.2.4, l'axe radical de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C} est donné par l'équation

$$\left(\frac{\alpha b_1 + \beta b_2}{\alpha a_1 + \beta a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right)x + \left(\frac{\alpha c_1 + \beta c_2}{\alpha a_1 + \beta a_2} - \frac{c_1}{a_1}\right)y + \left(\frac{\alpha d_1 + \beta d_2}{\alpha a_1 + \beta a_2} - \frac{d_1}{a_1}\right)t = 0$$

soit $\beta a_1 a_2 \left(\left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right)x + \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1}\right)y + \left(\frac{d_2}{a_2} - \frac{d_1}{a_1}\right)t\right) = 0$ d'où le résultat. \square

Étant donné un cercle \mathcal{C} , une droite D lui est soit sécante, tangente ou extérieure. On obtient ainsi trois types de faisceau de cercles \mathcal{F} contenant \mathcal{C} et d'axe radical D ; notons tout d'abord que tous les cercles de \mathcal{F} sont nécessairement centrés sur la droite D' perpendiculaire à D et passant par le centre o de \mathcal{C} .

- Si D est sécante à \mathcal{C} en $a \neq b$; alors tout cercle du faisceau \mathcal{F} doit passer par a et b puisque la puissance de a et b par rapport à chacun de ces cercles doit être nulle. Réciproquement si \mathcal{C}' est un cercle centré sur D' et passant par a et b , d'après ??, l'axe radical de \mathcal{C} et \mathcal{C}' est D et donc \mathcal{C}' appartient au faisceau \mathcal{F} . On dit que \mathcal{F} est le **faisceau de points base a et b et d'axe radical D** , cf. la figure 11.

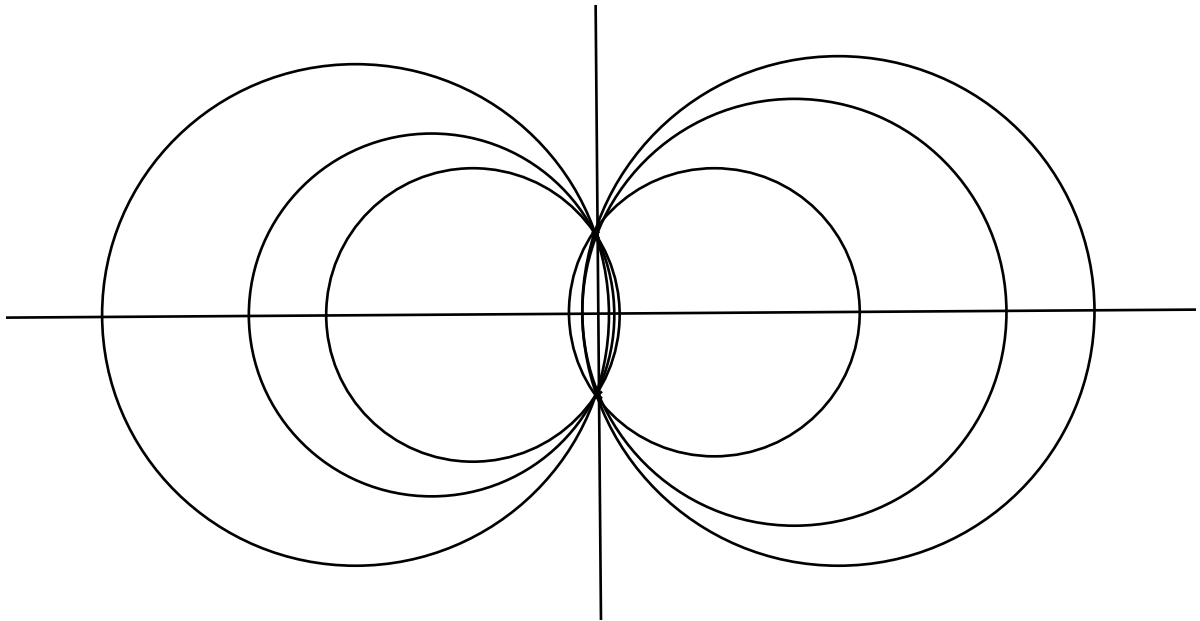


FIGURE 11. Faisceau de cercles à points base

- Si D est tangente à \mathcal{C} en un point a , le raisonnement précédent montre que tous les cercles de \mathcal{F} passent par $\{a\} = D \cap D'$ et comme ils sont centrés sur D' , ils sont alors obligatoirement tangents à D en a . Réciproquement si \mathcal{C}' est un cercle tangent à D en a alors l'axe radical de \mathcal{C} et \mathcal{C}' est D et donc \mathcal{C}' appartient à \mathcal{F} , cf. la figure 12.

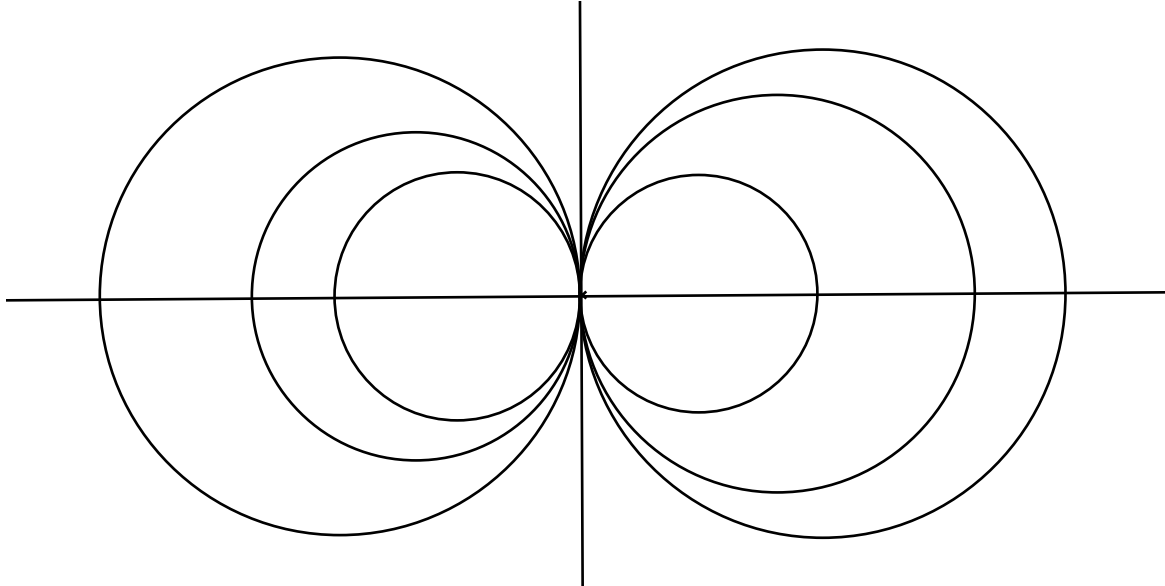


FIGURE 12. Faisceau de cercles tangents

- Si D ne rencontre pas \mathcal{C} d'après les cas précédents il en est donc de même pour tous les cercles de \mathcal{F} . On note h le projeté orthogonal de o sur D ; d'après ??, le cercle \mathcal{C}_0 de centre h et orthogonal à \mathcal{C} est orthogonal à tous les cercles de \mathcal{F} . Réciproquement si \mathcal{C}' est un cercle centré sur D' et orthogonal à \mathcal{C}_0 , d'après ??, le point h appartient à l'axe radical de \mathcal{C} et \mathcal{C}' et comme cet axe radical est orthogonal à D' , il est égal à D . Notons j, k les points d'intersection de \mathcal{C}_0 avec D' ; les cercles centrés en j, k et de rayon nul sont des cercles limites de \mathcal{F} , on dit que \mathcal{F} est le **faisceau de points limites j et k** , cf. la figure 13.

Remarque : dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, les **points cycliques** appartiennent à tous les cercles mais on ne les compte pas comme points base.

Lemme IV.2.8. — Soit $D(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ une équation cartésienne de D et $C(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ une équation de \mathcal{C} . L'équation d'un cercle \mathcal{C}' de \mathcal{F} est $C(x, y) + \lambda D(x, y)$.

Démonstration. — Rappelons que la puissance d'un point $M(x_0, y_0)$ par rapport à \mathcal{C} est donnée par $C(x_0, y_0)$ de sorte que tout cercle d'équation $C(x, y) + \lambda D(x, y)$ appartient à \mathcal{F} . Réciproquement si $C'(x, y)$ est une telle équation alors $C'(x, y) = C(x, y) + f(x, y) = 0$ où $f(x, y)$ est de la forme $\alpha'x + \beta'y + \gamma'$. Or pour tout point $M(x_0, y_0)$ on a $C'(x_0, y_0) = C(x_0, y_0)$ et donc $f(x_0, y_0) = 0$, autrement dit f est une équation de D et donc de la forme $\lambda D(x, y)$. \square

Remarque : en particulier par tout point (x_0, y_0, z_0) n'appartenant pas à D , il passe un cercle de \mathcal{F} , ce que l'on pouvait vérifier directement à partir de la description des trois types de faisceaux.

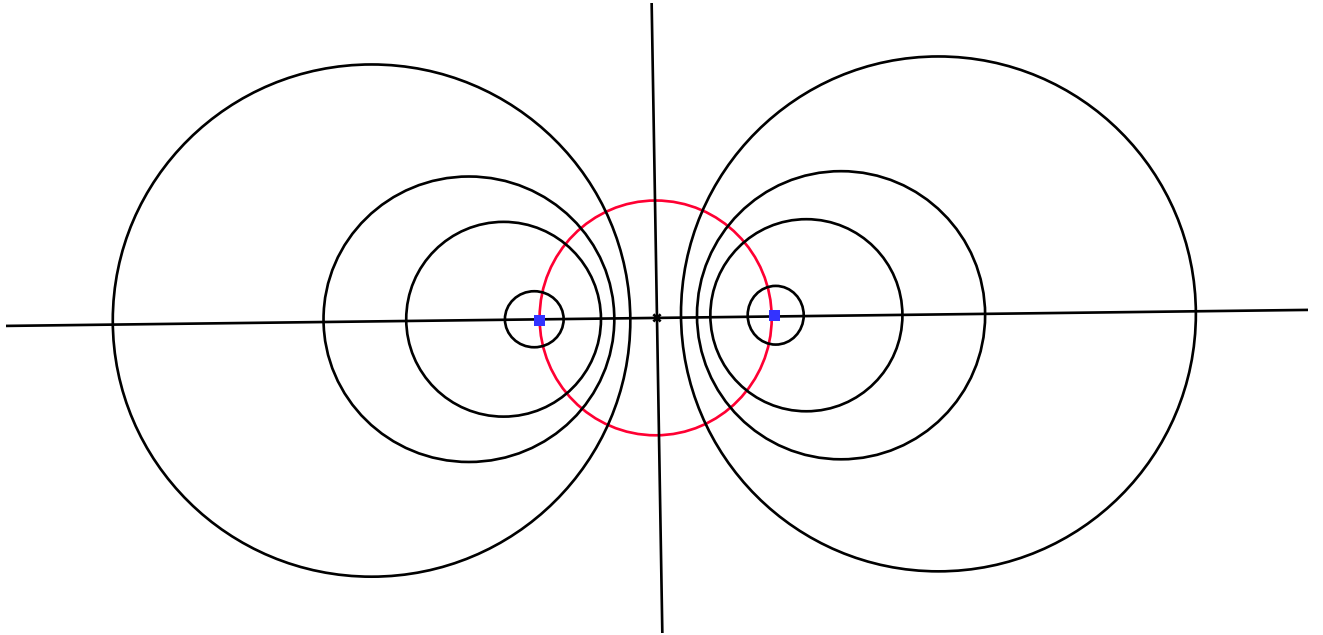


FIGURE 13. Faisceau de cercles à points limites

Lemme IV.2.9. — Soit \mathcal{C} un cercle orthogonal à deux cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ distincts d'un faisceau \mathcal{F} . Alors \mathcal{C} est orthogonal à tous les cercles de \mathcal{F} .

Démonstration. — D'après le corollaire ??, le centre de \mathcal{C} appartient à l'axe radical de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 qui est aussi l'axe radical de tout couple de cercles de \mathcal{F} et donc d'après loc. cit., \mathcal{C} est orthogonal à tout cercle de \mathcal{F} . \square

Proposition IV.2.10. — Soit \mathcal{F} un faisceau de cercles; l'ensemble \mathcal{F}' des cercles orthogonaux à tous les cercles de \mathcal{F} est un faisceau de cercles et on dit que \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux faisceaux orthogonaux ou conjugués.

Démonstration. — Soient \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}'_2 deux cercles orthogonaux à deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de \mathcal{F} . On a $O'_1 O_1^2 - (R'_1)^2 = R_1^2 = O'_2 O_1^2 - (R'_2)^2$, où O_1, O'_1 et O'_2 (resp. R_1, R'_1 et R'_2) sont les centres (resp. rayons) respectifs de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1$ et \mathcal{C}'_2 . On en déduit donc que O_1 appartient à l'axe radical de \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}'_2 . Il en est de même du centre O_2 de \mathcal{C}_2 de sorte que $(O_1 O_2)$ est l'axe radical de tout couple de cercles distincts de \mathcal{F}' ont $(O_1 O_2)$ comme axe radical; \mathcal{F}' est donc un faisceau de cercles. \square

Remarque : le conjugué d'un faisceau de cercles tangents (resp. à points base) est un faisceau de cercles tangents (resp. à points limites).

IV.3. Géométrie projective de dimension 1

IV.3.1. Birapport. — Désormais E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base (e_1, e_2) et $D = \mathbb{P}(E)$ désigne la droite projective associée. Dans le cas où $E = \mathbb{K}^2$ muni de la base canonique, tout point de $D = \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, admet des systèmes de coordonnées homogènes (x, y) tous non nuls et proportionnels. Si $x \neq 0$, ces systèmes sont uniquement

déterminés par le rapport $t = y/x$; d'autre part il y a un seul point de D tel que $x = 0$ et on pose $t = \infty$ pour celui-ci. L'élément t ainsi défini s'appelle l'abscisse projective dans le repère considéré. L'ensemble des abscisses projectives est donc la réunion du corps K et d'un symbole noté ∞ ; nous noterons cet ensemble \hat{K} qui est en bijection canonique avec $\mathbb{P}_1(K)$.

Exemples dans le cas d'un faisceau de droites du plan projectif, cette abscisse projective s'appelle la pente.

Remarque : si h est une homographie entre deux droites projectives, elle est alors donnée en termes d'abscisses projectives par une formule $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ avec $ad - bc \neq 0$.

Définition IV.3.1. — Étant donnés 4 points a, b, c, d d'une droite projective D , les 3 premiers étant distincts, on appelle birapport de ces points et on note $[a, b, c, d]$, l'élément $h(d) \in \hat{K}$ où h est l'unique homographie de D sur \hat{K} qui amène a, b, c en $\infty, 0, 1$.

Remarque : l'action du groupe projectif sur les triplets de points alignés distincts admet une unique orbite de sorte qu'on ne peut pas affecter un invariant associé à ces trois points. Pour 4 points dont 3 ne sont pas alignés, les orbites sont par contre en bijection avec \hat{K} , d'où la notion de birapport. Précisons ce résultat.

Proposition IV.3.2. — Soient D, D' deux droites projectives, a, b, c, d des points de D et a', b', c', d' des points distincts de D' . Alors il existe une homographie u de D sur D' telle que $u(a) = a', u(b) = b', u(c) = c', u(d) = d'$ ssi les birapports $[a, b, c, d]$ et $[a', b', c', d']$ sont égaux.

Démonstration. — Soit h (resp. h') l'unique homographie de D (resp. D') sur \hat{K} qui amène a, b, c (resp. a', b', c') en $\infty, 0, 1$. Si u est l'homographie qui amène a, b, c en a', b', c' , alors $h(m) = h'(u(m))$ pour tout $m \in D$ d'après l'unicité. Ainsi si $u(d) = d'$, on en déduit $[a, b, c, d] = h(d) = h'(d') = [a', b', c', d']$.

Réciproquement si ces birapports sont égaux on a $h(d) = h'(d')$ et aussi $h(d) = h'(u(d))$ d'où $u(d) = d'$ car h' est injective. □

Notation IV.3.3. — Pour $x, y \in E - \{0\}$ avec $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ on pose

$$\overline{xy} = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = y_1x_2 - y_2x_1.$$

Remarque : la quantité \overline{xy} dépend du choix de la base; par un changement de base de matrice P , \overline{xy} est alors multiplié par $\det P$. En outre si on remplace x, y par λx et μy alors \overline{xy} est multiplié par $\lambda\mu$.

Proposition IV.3.4. — Soient $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ quatre points de $\mathbb{P}(E)$, les trois premiers étant distincts, on a la formule

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}] = \frac{\overline{c\bar{a}}}{\overline{c\bar{b}}} : \frac{\overline{d\bar{a}}}{\overline{d\bar{b}}} \in \hat{K}$$

avec la convention $\lambda/0 = \infty \in \hat{K}$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Remarque : d'après la remarque précédente la quantité $\frac{\overline{c\bar{a}}}{\overline{c\bar{b}}} : \frac{\overline{d\bar{a}}}{\overline{d\bar{b}}}$ ne dépend pas des représentants a, b, c, d choisis ni de la base de E dans laquelle on le calcule.

Démonstration. — Notons $r = [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}]$ et $r' = \frac{\bar{c}\bar{a}}{\bar{c}\bar{b}} : \frac{\bar{d}\bar{a}}{\bar{d}\bar{b}}$. Comme $\bar{b} \neq \bar{c}$, on en déduit que $\bar{c}\bar{b}$ est non nul de sorte que r et r' sont tous deux infinis si et seulement si $\bar{a} = \bar{d}$ cas que l'on écarte à présent.

Comme $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ forment un repère, on choisit des représentants a, b, c de telle sorte que $c = a + b$ et (a, b) est une base de E dans laquelle nous travaillons désormais. On a ainsi $d = \lambda a + \mu b$ avec $\mu \neq 0$. On considère l'homographie $h : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K})$ qui définit le birapport : $h(\bar{a}) = \infty$, $h(\bar{b}) = 0$, $h(\bar{c}) = 1$ et $h(\bar{d}) = r$. Elle provient de l'application linéaire u définie par $u(xa + yb) = (x, y)$; on a donc $u(d) = (\lambda, \mu)$ et $h(\bar{d}) = r = \frac{\lambda}{\mu}$.

En ce qui concerne r' , on a $\bar{c}\bar{a} = 1$, $\bar{c}\bar{b} = -1$, $\bar{d}\bar{a} = \mu$, $\bar{d}\bar{b} = -\lambda$ et donc $r' = \frac{\lambda}{\mu}$ d'où le résultat. \square

Remarque : dans le cas où $E = \mathbb{K}^2$ muni de la base canonique et x, y des éléments de la forme $(x, 1)$, $(y, 1)$, on a $\bar{x}\bar{y} = y - x$; la proposition précédente s'écrit alors comme suit.

Corollaire IV.3.5. — Soient a, b, c, d quatre éléments de \hat{K} , les trois premiers étant distincts. Le birapport $[a, b, c, d]$ est donné par la formule

$$[a, b, c, d] = (c - a)(d - b)/(c - b)(d - a)$$

avec les conventions de calcul usuelles sur 0 et ∞ .

Démonstration. — L'homographie h de \hat{K} sur \hat{K} qui amène a, b, c en $\infty, 0, 1$ admet a pour pôle et b pour zéro. Elle est donc de la forme $h(t) = k(t - b)/(t - a)$. Comme $h(c) = 1$, on a nécessairement $k = (c - a)/(c - b)$ d'où le résultat. \square

Corollaire IV.3.6. — Soient a, b, c, d quatre points distincts de D et $r = [a, b, c, d] \in \mathbb{K} \subset \hat{\mathbb{K}}$. On a les formules suivantes :

1. $[b, a, c, d] = [a, b, d, c] = \frac{1}{r}$;
2. $[a, c, b, d] = 1 - r$.

Démonstration. — Plutôt que d'établir ces formules à partir de l'expression précédente, considérons l'homographie $u : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ qui à z associe $1/z$. Cette homographie échange ∞ et 0 et fixe 1. Si h (resp. h') est l'homographie de D dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ qui envoie a, b, c (resp. b, a, c) en $\infty, 0, 1$, on a $h' = u \circ h$. Comme par définition $[a, b, c, d] = h(d)$ et $[b, a, c, d] = h'(d)$ on en déduit $[b, a, c, d] = u([a, b, c, d])$.

En ce qui concerne le calcul de $[a, b, d, c]$ (resp. $[a, c, b, d]$), le raisonnement est analogue en considérant l'homographie $v(z) = z/[a, b, c, d]$ (resp. $w(z) = 1 - z$). \square

Remarque : lorsque $d = \infty$ la relation $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$ s'écrit $\bar{b}\bar{a} = \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a}$: c'est la relation de Chasles sur les mesures algébriques.

Remarque : l'action des permutations sur les birapports donne une opération du groupe des permutations \mathfrak{S}_4 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) - \{\infty, 0, 1\}$ tel que le groupe de Klein formé des permutations (12)(34), (13)(24), (14)(23) et de l'identité, opère trivialement. Les orbites dans cette actions sont formées de six éléments :

$$\left\{ r, \frac{1}{r}, 1 - r, \frac{1}{1 - r}, \frac{r - 1}{r}, \frac{r}{r - 1} \right\}$$

sauf pour deux orbites exceptionnelles : $\{-1, 2, \frac{1}{2}\}$ (si \mathbb{K} n'est pas de caractéristique 2) et $\{-j, -j^2\}$ (si \mathbb{K} contient une racine cubique primitive de l'unité notée j).

Corollaire IV.3.7. — Birapport de quatre droites

Soit m un point d'un plan projectif $\mathbb{P}(E)$ et soient A, B, C, D quatre droites du faisceau linéaire m^* . Pour Δ une droite ne passant pas par m , le birapport $[a, b, c, d]$ des traces de A, B, C, D sur Δ ne dépend pas de la droite Δ considérée.

Démonstration. — On rappelle que m^* est muni d'une structure de droite projective ce qui permet de définir le birapport $[A, B, C, D]$ des quatre droites. Comme l'incidence est une homographie, on en déduit alors que $[a, b, c, d] = [A, B, C, D]$ d'où le résultat. \square

Remarque : on aurait pu aussi utiliser une autre droite Δ' et considérer la perspective p_m de centre m de Δ sur Δ' qui est une homographie.

Toute fraction rationnels sur K définit une application partout définie de \hat{K} dans \hat{K} prolongeant la fonction rationnelle usuelle. Si $r = p/q$ est écrite sous forme réduite, on note $\deg r = \max(\deg p, \deg q)$ le degré de r . On vérifie aisément que $\deg r \circ s = \deg r \deg s$ et que $K(T)$ est une extension de $K(r(T))$ de degré $\deg r$. Ainsi on en déduit le résultat fort pratique suivant.

Théorème IV.3.8. — Si une application rationnelle de \hat{K} dans \hat{K} admet une application réciproque qui est rationnelle, alors elle est homographique.

IV.3.2. Homographies involutives. — Comme trois points d'une droite projective forment un repère, nous avons vu qu'une homographie de la droite projective distincte de l'identité admet au plus deux points fixes. Par ailleurs en écrivant l'homographie sous la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec $c \neq 0$ si on choisit comme point infini un point non fixe par f , les points fixes sont donnés par la relation

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

de sorte que sur un corps algébriquement clos, on a exactement deux points fixes comptés avec multiplicité. Précisons les différentes situations.

Proposition IV.3.9. — Soit f une homographie de $\mathbb{P}^1(K)$:

- si f admet un unique point fixe, elle est conjuguée, dans $PGL(2, K)$, d'une translation $z \mapsto z + b$ avec $b \neq 0$;
- si f admet deux points fixes distincts a, b , elle est conjuguée d'une homothétie $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \neq 0, 1$. Dans ce cas on a $[a, b, m, f(m)] = \lambda$ pour tout m distinct de a, b ou encore avec les conventions usuelles :

$$\frac{f(m) - b}{f(m) - a} = \lambda \frac{m - b}{m - a}.$$

Démonstration. — Si f admet un unique point fixe m , on choisit une homographie qui envoie m sur ∞ , par exemple $h(z) = \frac{1}{z-m}$. Alors $g = hfh^{-1}$ a pour unique point fixe ∞ de sorte que $c = 0$ et donc $g(z) = az + b$. Comme g n'a que ∞ comme point fixe alors $a = 1$ et g est bien une translation.

Si f fixe a et b , on choisit h telle que $h(a) = \infty$ et $h(b) = 0$, par exemple $h(z) = \frac{z-b}{z-a}$. Alors $g = hfh^{-1}$ a pour points fixes ∞ et 0 et on vérifie que g est une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$. On a alors $[a, b, m, f(m)] = [h(a), h(b), h(m), hf(m)] = [\infty, 0, z, \lambda z] = \lambda$. \square

Remarque : pour une application de ce résultat aux suites récurrentes homographiques, cf. l'exercice ??.

Définition IV.3.10. — Une involution est une homographie $h \neq 1$ telle que $h^2 = 1$.

Proposition IV.3.11. — Soit h une homographie d'une droite projective D sur elle-même. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) h est une involution ;
- (b) si K n'est pas de caractéristique 2, h est de la forme $\mathbb{P}(u)$ où u est une application linéaire de trace nulle ;
- (c) il existe un point $m \in D$ tel que $h(m) \neq m$ et $h^2(m) = m$.

Démonstration. — Les applications linéaires u telles que $h = \mathbb{P}(u)$ ont des matrices proportionnels à $M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ où en termes d'abscisses projectives $h(t) = (at + b)/(ct + d)$. Ainsi h est une involution si et seulement si l'expression $ctt' + dt' - at - b = 0$ est symétrique en t et t' soit ssi $d = -a$ d'où l'équivalence entre (a) et (b).

Il est clair que (a) implique (c) ; supposons donc (c) vraie. On prend $m, h(m)$ pour points base $\infty, 0$: $h(\infty) = 0$ et $h(0) = \infty$. On a alors $a = d = 0$ ce qui s'écrit $tt' = b/c$ relation qui est bien symétrique en t et t' . \square

Corollaire IV.3.12. — Soit D une droite projective et $f : D \rightarrow D$ une homographie. Alors f est produit d'au plus deux involutions.

Démonstration. — Le résultat est évident si f est l'identité. Sinon comme f a au plus deux points fixes, on choisit $a \neq b$ non fixes par f ; en caractéristique 2 il ne reste qu'un point qui est obligatoirement fixe. Soit c un troisième point et on note a', b', c' leur image par f . Si on a $a = b'$ et $b = a'$ alors $f^2(b) = f(b') = f(a) = a' = b$ et $f(b) \neq b$ de sorte que f est une involution.

Sinon on a, disons, $a \neq b'$ et on définit l'homographie i sur le repère a, b, b' par $i(a) = b'$, $i(b) = a'$ et $i(b') = a$. Comme i échange a et b' c'est une involution. Soit alors $c'' = i(c)$ qui est donc distinct de b' et a' . On peut donc définir j sur le repère b', a', c'' par $j(b') = a'$, $j(a') = b'$ et $j(c'') = c'$. Comme j échange a' et b' , c'est une involution et on a $j \circ i(a) = a'$, $j \circ i(b) = b'$ et $j \circ i(c) = c'$ ce qui montre que $f = j \circ i$. \square

Corollaire IV.3.13. — Une involution h est uniquement déterminée par la donnée de deux couples (p, p') , (q, q') de points homologues non fixes.

Démonstration. — Il existe une unique homographie qui envoie (p, p', q) sur (p', p, q') qui est donc h ; le fait que h soit une involution découle alors du point (c) de la proposition précédente. \square

Remarque : les points fixes d'une homographie ont pour abscisses projectives les racines finies ou infinies de l'équation $ct^2 + (d - a)t - b = 0$ de sorte que pour $h \neq 1$, il y en a au plus deux.

Corollaire IV.3.14. — L'unique homographie h d'une droite projective D vers une autre D' qui envoie le repère projectif (P_1, P_2, P_3) sur un repère (P'_1, P'_2, P'_3) , où $P_1 \neq P'_1$, est une involution si et seulement si

$$[P_1, P_2, P_3, P'_1] = [P'_1, P'_2, P'_3, P_1].$$

Démonstration. — Dans le sens direct, comme h conserve le birapport, on a

$$[P_1, P_2, P_3, P'_1] = [h(P_1), h(P_2), h(P_3), h(P'_1)] = [P'_1, P'_2, P'_3, P_1].$$

Réciproquement si $[P_1, P_2, P_3, P'_1] = [P'_1, P'_2, P'_3, P_1]$, alors comme h préserve le birapport on en déduit que $P_1 = h(P'_1)$ et donc h est une homographie avec un couple de points homologues distincts, c'est donc une involution d'après la troisième propriété de la proposition IV.3.11. \square

Corollaire IV.3.15. — Soit abc un triangle non dégénéré et D une droite ne passant pas par a, b, c ; on note p, q, r son intersection avec respectivement (bc) , (ac) et (ab) . Étant donnés trois points distincts a', b', c' de respectivement (bc) , (ca) et (ab) , on note p', q', r' les points d'intersection de D avec respectivement (aa') , (bb') et (cc') . Alors l'unique homographie de D qui envoie (p, q, r) sur (p', q', r') est une involution si et seulement si les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes.

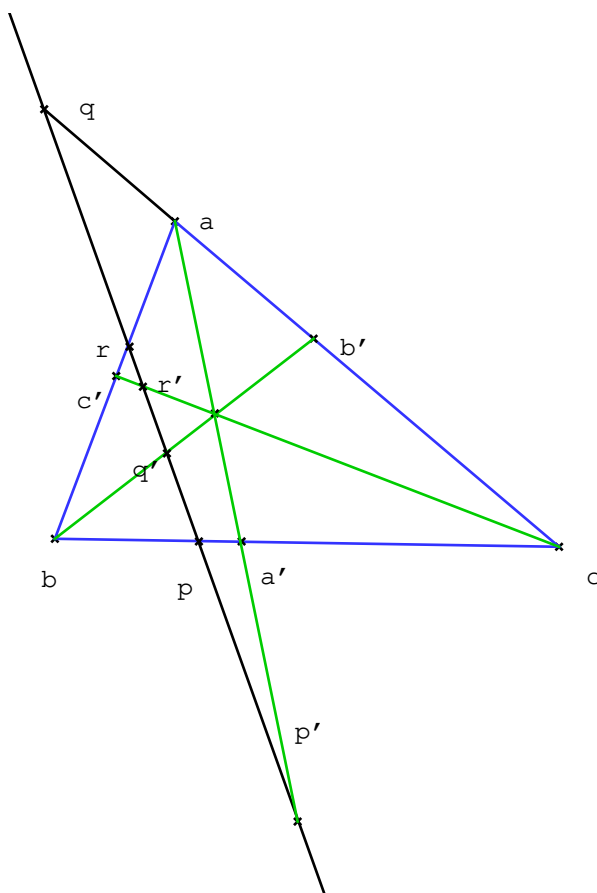


FIGURE 14. Involution sur une droite projective

Démonstration. — Supposons tout d'abord que les droites sont concourantes en un point m . La projection de centre m de D sur (ac) envoie (p', q', r', r) sur (a, b', c, q) . La projection de centre b de (ac) sur D envoie alors (a, b', c, q) sur (r, q', p, q) de sorte qu'au final

$$[p', q', r', q] = [a, b', c, q] = [r, q', p, q] = [p, q, r, q']$$

et on conclut en utilisant la proposition précédente. \square

Corollaire IV.3.16. — *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration. — L'orthogonalité induit un homographie involutive $tt' = -1$ sur la droite à l'infini; le résultat découle alors directement du corollaire précédent. \square

IV.3.3. Division harmonique. —

Définition IV.3.17. — On dit que 4 points forment une division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$.

Remarques :

— si on a $[a, b, c, d] = -1$ alors on a aussi $[b, a, c, d] = [a, b, d, c] = [c, d, a, b] = -1$ de sorte que le fait pour a, b, c, d d'être une division harmonique est une propriété de la double paire : $\{a, b\}, \{c, d\}$. On dit que a et b sont **conjugués harmoniques** par rapport à c et d .

— dans $\mathbb{P}^1(K)$ avec $a = \infty$, on a

$$[\infty, b, c, d] = \frac{d-b}{c-b} = -1 \Leftrightarrow c+d = 2b$$

autrement dit b est alors le milieu du segment $[cd]$: le conjugué harmonique de ∞ par rapport à c, d est le milieu de c, d .

— si a, b, c, d sont tous dans la droite affine K , leur birapport vaut -1 si et seulement si on a $\frac{c-a}{c-b} = -\frac{d-a}{d-b}$ ou encore en termes de mesures algébriques

$$\frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} = -\frac{\overline{da}}{\overline{db}}.$$

On peut aussi l'écrire sous la forme moins mnémotechnique suivante : $2(ab + cd) = (a+b)(c+d)$.

— $[a, -a, c, d] = -1$ équivaut à $cd = a^2$.

— dans le plan projectif, pour m un point, quatre droites A, B, C, D de m^* sont en division harmonique si et seulement si pour toute droite $\Delta \notin m^*$, les traces a, b, c, s le sont sur Δ . On parle alors de *pinceau harmonique* : un exemple classique en géométrie euclidienne est celui de deux droites et de leurs deux bissectrices, cf. l'exercice ??.

Proposition IV.3.18. — *Soit $f : D \rightarrow D$ une homographie admettant deux points fixes a, b distincts.*

1) *Si f est une involution on a , pour tout $m \in D$ distinct de a et b :*

$$[a, b, m, f(m)] = -1$$

autrement dit m et $f(m)$ sont conjugués harmoniques par rapport à a, b .

2) *Réciproquement s'il existe $m \neq a, b$ tel que l'on ait $[a, b, m, f(m)] = -1$ alors f est une involution.*

Démonstration. — 1) Posons $r = [a, b, m, f(m)]$ et appliquons f : on a $r = [a, b, f(m), m] = 1/r$ de sorte que $r = \pm 1$ et comme $f(m) \neq m$, on a $r = -1$.

2) Le même argument montre que l'on a $f^2(m) = m$ et on conclut par la proposition IV.3.11. \square

Corollaire IV.3.19. — Soient $a \neq b \in \mathbb{P}^1(K)$, il existe alors une unique involution f admettant a et b comme points fixes. Cette involution est conjuguée de l'application $z \mapsto -z$, symétrie de centre 0.

Proposition IV.3.20. — *Polaires et construction du quatrième harmonique* Soit a, b, c trois points alignés du plan projectif; avec les notations de la figure 15, on joint a et b à un point m hors de D ; une droite par c coupe (ma) et (mb) en a' et b' ; si p est le point commun à (ab') et (ba') alors (mp) coupe D en un point d tel que $[a, b, c, d] = -1$.

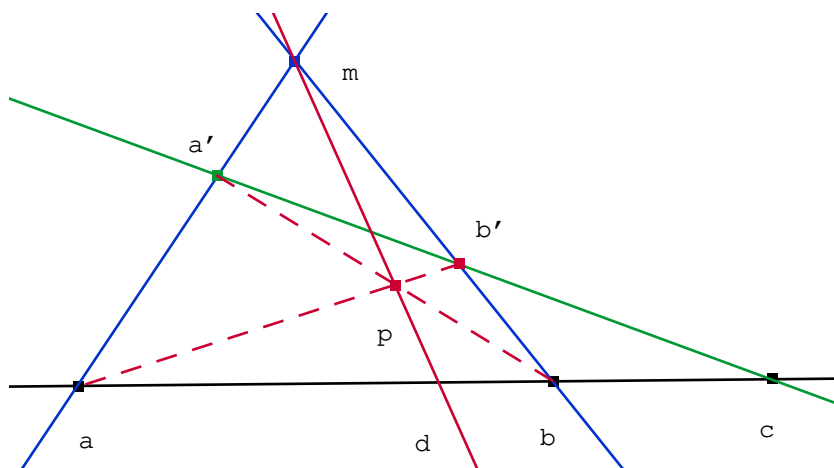


FIGURE 15. Construction du quatrième harmonique

Démonstration. — On prend a, b, m pour point base et on envoie (am) à l'infini; en notant $(-u, 0)$ les coordonnées affines de c et $(0, v)$ celles de b' , l'équation de (cb') est $y = (x+u)u^{-1}v$; celle de (bp) qui lui est parallèle est $y = xu^{-1}v$; les coordonnées de p sont donc (u, v) et donc celles de d sont $(u, 0)$ et on a $[a, b, c, d] = [\infty, 0, -u, u] = -1$. \square

IV.3.4. Preuves projectives de Ménélaüs et Céva. —

Lemme IV.3.21. — Soient a, b, c, d, e cinq points d'une droite projective, on a alors la formule

$$[b, c, d, e] \times [c, a, d, e] \times [a, b, d, e] = 1.$$

Démonstration. — Cela résulte de la formule qui donne le birapport

$$[b, c, d, e] \times [c, a, d, e] \times [a, b, d, e] = \frac{\overline{db}}{\overline{dc}} : \frac{\overline{eb}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{dc}}{\overline{da}} : \frac{\overline{ec}}{\overline{ea}} \times \frac{\overline{da}}{\overline{db}} : \frac{\overline{ea}}{\overline{eb}} = 1.$$

\square

Lemme IV.3.22. — *dit des trois birapports* Soient a, b, c trois points non alignés d'un plan projectif. On considère deux droites distinctes D et Δ ne passant pas par a, b, c et coupant respectivement (bc) , (ca) et (ab) en a', b', c' et α, β, γ . On a alors l'égalité

$$[b, c, a', \alpha] \times [c, a, b', \beta] \times [a, b, c', \gamma] = 1.$$

Réciproquement si on a trois points a, b, c non alignés et des points a', α, b', β et c', γ situés respectivement sur (bc) , (ca) et (ab) tels que a', b', c' soient alignés et que le produit des birapports ci-dessus soit égal à 1 alors les points α, β, γ sont alignés.

Démonstration. — Soit $o = D \cap \Delta$ et posons $A = (oa)$, $B = (ob)$ et $C = (oc)$. L'incidence entre o^* et les droites (bc) , (ca) et (ab) donne :

$$[b, c, a', \alpha] = [B, C, D, \Delta], \quad [c, a, b', \beta] = [C, A, D, \Delta], \quad [a, b, c', \gamma] = [A, B, D, \Delta]$$

et le résultat découle du lemme précédent.

La réciproque s'obtient en appliquant le sens direct avec $\gamma' = (ab) \cap (\alpha\beta)$. \square

Application à la preuve du théorème de Ménélaüs : dans le sens direct, on applique le lemme des trois rapports avec $c' \in D = (a'b')$ et Δ la droite de l'infini. Le produit des trois birapports du lemme précédent s'écrit alors

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1$$

ce qui est le résultat cherché.

Réciproquement si on a cette relation, appelons $c'' = (ab) \cap (a'b')$; le sens direct et l'hypothèse donnent $[a, b, c', \gamma] = [a, b, c'', \gamma]$ où $\gamma = (ab) \cap \Delta$ et donc $c' = c''$ d'où le résultat.

En ce qui concerne le théorème de Céva, nous allons utiliser le corollaire suivant de IV.3.15.

Corollaire IV.3.23. — Avec les notations du corollaire IV.3.15, les droites (ap') , (bq') et (cr') sont concourantes si et seulement si on a la relation

$$[p, q, r, r'] \times [q, r, p, p'] \times [r, p, q, q'] = -1.$$

ou encore

$$(1) \quad [b, a, r, c'] \times [c, b, p, a'] \times [a, c, q, b'] = -1$$

Démonstration. — Considérons l'homographie f qui envoie p, q, r sur p', q', r' . La première relation de l'énoncé s'écrit

$$\frac{\overline{r'q}}{\overline{r'p}} \times \frac{\overline{p'r}}{\overline{p'q}} \times \frac{\overline{q'p}}{\overline{q'r}} = 1$$

ce qui en multipliant en haut et en bas par $\overline{r'r}$ conduit à

$$[r', p', q, r] = [r', q', r, p]^{-1} = [r', q', p, r] = [r, p, q', r']$$

de sorte que l'homographie qui envoie r', p', q sur r, p, q' envoie aussi r sur r' ; c'est donc une involution mais alors elle envoie aussi p sur p' et donc est égale à f et le résultat découle de IV.3.15.

Pour la seconde relation, on montre successivement les égalités :

$$[p, q, r, r'] = [b, a, r, c'], \quad [q, r, p, p'] = [c, b, p, a'], \quad [r, p, q, q'] = [a, c, q, b']$$

en utilisant les perspectives de centre c, a, b . \square

Application à la preuve projective du théorème de Céva : on applique le corollaire précédent en prenant pour D la droite à l'infini. La formule (1) s'écrit alors

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1,$$

d'où le résultat.

Remarque : afin de projectiver la conclusion du théorème de Ceva, on choisit une droite D quelconque et on note p, q, r ses intersections avec les côtés de abc . D'après Ménélaüs on a

$$\frac{\overline{rb}}{\overline{ra}} \times \frac{\overline{pc}}{\overline{pb}} \times \frac{\overline{qa}}{\overline{qb}} = 1$$

de sorte qu'en multipliant la conclusion de Ceva par cette quantité, on obtient le produit de birapport de (1).