Université Paris 13 L3 Algèbre et géométries

Partiel 27/2/19

Exercice 1. *(i) Soit ABC un triangle non plat et soit $D \in (BC)$ tel que (AD) est la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$. Montrer, en utilisant la loi des sinus, que $AB.DC = AC.BD$.*

(ii) Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien et $r \neq 1$ un réel positif. On note $U, V \in (AB)$ tels que $r = \frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = -\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$. Pour P tel que $\frac{PA}{PB} = r$, montrer, en utilisant la question précédente, que les droites (PU) et (PV) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{APB}$.

(iii) Déduire de la question précédente que l'ensemble des points du plan P tel que $\frac{PA}{PB} = r$ est le cercle de diamètre $[U, V]$.

Exercice 2. *1. On considère l'application $f : A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A^2) \in \mathbb{R}$ où tr est la fonction trace. Montrer que f est une forme quadratique et donner sa signature. Même question pour $g(A) = (\mathrm{tr}A)^2$.*

2. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de signature (r, s) avec $r + s = n$. On dit d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ qu'il est totalement isotrope *si tout $x \in E$ est isotrope. Montrer que pour un tel E, on a $\dim_{\mathbb{R}} E \leq \min(r, s)$ l'égalité étant possible.*

3. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tel que toute matrice $M \in E$ est nilpotente, i.e. il existe $k \geq 1$ tel que M^k est la matrice nulle. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\dim E \leq \frac{n(n-1)}{2}$ et donner un exemple où on a égalité.

Exercice 3. *On considère les rotations vectorielles R_1 et R_2 de $\mathbb{R}^3$ d'axes $\overrightarrow{u} = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{v} = (2, 2, 1)$ et d'angles respectifs $\pi/2$ et $2\pi/3$. Calculer, en utilisant les quaternions $e^{\pi u/4}$ et $e^{\pi v/3}$, l'axe et l'angle de la rotation $R_2 \circ R_1$.*

Exercice 4. *Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier.*

- *Combien a-t-il d'angles dièdres et quelles sont leurs mesures ?*
- *Décrire le sous-groupe des isométries affines qui conservent globalement l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des sommets du tétraèdre régulier.*

Exercice 5.

- *Écrire en complexe la symétrie glissée d'axe d'équation $x + y = 1$ et de vecteur $(2, -2)$.*
- *Déterminer la nature des applications affines dont l'application linéaire associée est*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

  On donnera la liste des différentes possibilités.
- *Décrire les éléments caractéristiques de l'application affine*

$$\begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = x \\ z' = y - 2 \end{cases}$$