Feuille de TD 1

Exercice 1. *Décomposer sous forme de combinaison linéaire de carrés, les formes quadratiques réelles suivantes : en déduire leur signature et leur rang*

(a) $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$.

(b) $f(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.

(c) $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

(d) $f(x,y,z) = xy + yz + zt + tx$.

(e) $f(A) = \mathrm{tr}(A^2)$ *pour* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(f) $f(A) = \mathrm{tr}({}^tAA)$ *pour* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(g) $f(A) = \mathrm{tr}(A)^2$ *pour* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. *Soit* $n \geq 1$ *et* $\mathbb{R}_n[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à* n*. Pour tous* $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$*, on pose*

$$B(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \qquad et \qquad f(P) = B(P,P).$$

(a) B *est-elle bilinéaire ? symétrique ? antisymétrique ?*

(b) La forme f *a-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?*

(c) Calculer la matrice de f *dans la base* $(1, X, \cdots, X^n)$.

(d) Pour $n = 2$*, déterminer la signature de* f.

Exercice 3. *1) Soit* ABC *un triangle non plat et soit* $D \in (BC)$ *tel que* (AD) *est la bissectrice intérieure de* $\widehat{BAC}$*. Montrer, en utilisant la loi des sinus, que* $AB.DC = AC.BD$.

2) Soient A *et* B *deux points distincts du plan affine euclidien et* $r \neq 1$ *un réel positif. On note* $U, V \in (AB)$ *tels que* $r = \frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = -\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$*. Pour* P *tel que* $\frac{PA}{PB} = r$*, montrer, en utilisant la question précédente, que les droites* (PU) *et* (PV) *sont les bissectrices de l'angle* $\widehat{APB}$.

3) Déduire de la question précédente que l'ensemble des points du plan P *tel que* $\frac{PA}{PB} = r$ *est le cercle de diamètre* $[U, V]$.

4) Dans un triangle ABC*,* le A-cercle d'Apollonius *est défini comme l'ensemble des points* P *du plan tels que* $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$*. On définit de même les* B *et* C*-cercles d'Apollonius. Montrer que si* ABC *n'est ni isocèle ni équilatéral, alors les* 3 *cercles d'Apollonius ont deux points en commun.*

5) Pour P *un point, on note* P_a *son projeté orthogonal sur* (BC) *; de même on note* P_b *et* P_c *ses projetés orthogonaux sur* (AC) *et* (AB) *respectivement. Montrer que* $P_aP_b = PC\sin\gamma$ *où* γ *est l'angle* $\widehat{BCA}$.

6) Déduire des questions précédentes que le A*-cercle d'Apollonius est le lieu des points* P *tels que* $P_aP_b = P_aP_c$.

1 On applique l'algorithme de Gauss.

(a) $f(x,y,z) = (x+z/2)^2 - 2(y-z/4)^2 - z^2/8$, de rang 3 et signature $(1,2)$.

(b) $f(x,y,z) = 2(x+3y/4-z)^2 - 25/8(y-8z/5)^2$, rang 2 et signature $(1,1)$.

(c) $f(x,y,z) = 3(x+y/3-z/3)^2 + 8/3(y-z/2)^2 - 2z^2$, rang 3 et signaure $(2,1)$.

(d) $f(x,y,z) = 1/4(x+z+y+t)^2 - 1/4(x+z-y-t)^2$ rang 2 et signaure $(1,1)$.

(e) Définie positive (resp. négative) sur les matrices symétriques (resp. anti-symétriques) et donc rang n^2 et signature $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$.

(f) Définie positive

(g) signature $(1,0)$.

2 (a) Elle est linéaire mais ni symétrique ni antisymétrique.

(b) On a $f(1) = 0$ et donc 1 est isotrope.

(c) La forme polaire de f est $B_f(P,Q) = \frac{1}{2}\big(B(P,Q)+B(Q,P)\big)$. La matrice de f dans la base indiquée est $M_n = \left(\frac{i+j-2}{2(i+j-1)}\right)_{0\leq i,j\leq n}$.

(d) La signature est $(1,2)$.

3 1) D'après la loi des sinus dans le triangle ABD (resp. ADC) on a :

$$\frac{\sin\widehat{BDA}}{AB} = \frac{\sin\widehat{BAD}}{BD} \text{ resp. } \frac{\sin\widehat{CDA}}{AC} = \frac{\sin\widehat{DAC}}{CD}$$

et comme $\sin\widehat{BDA} = \sin\widehat{CDA}$ et $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$, on en déduit

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

d'où le résultat.

2) D'après la question précédente, les points de (AB) qui sont sur une des deux bissectrices de $\widehat{APB}$ vérifient $\frac{UA}{UB} = \frac{PA}{PB} = r$. On conclut en notant qu'il existe au plus deux tels points.

3) Comme les bissectrices sont orthogonales, on en déduit que le triangle UPV est rectangle en P et donc P appartient au cercle de diamètre $[UV]$.

Réciproquement si P appartient au cercle de diamètre $[UV]$, des égalités barycentriques

$$(1+r)\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{PA} + r\overrightarrow{PB} \text{ et } (1-r)\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{PA} - r\overrightarrow{PB}$$

on obtient en prenant le produit scalaire,

$$0 = (1-r^2)\overrightarrow{PU}.\overrightarrow{PV} = PA^2 - r^2PB^2$$

et donc P appartient à l'ensemble cherché.

4) Comme ABC n'est ni équilatéral ni isocèle, les 3 cercles d'Apollonius sont bien des cercles, i.e. $r \neq 1$ avec les notations des questions précédentes. Le A et B-cercles d'Apollonius s'intersectent en deux points; pour P l'un de ces points on a $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$ et $\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{BA}$ et donc $\frac{PB}{PA} = \frac{CB}{CA}$, i.e. P appartient au C-cercle d'Apollonius.

5-6) D'après la loi des sinus, on a $P_aP_b = PC\sin\gamma$ et $P_aP_c = PB\sin\beta$ avec $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ et donc le A-cercle d'Apollonius est le lieu des points P tels que $P_aP_b = P_aP_c$.