Feuille de TD 3

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 muni d'une forme quadratique q de signature $(1,1)$. On fixe une base (e_1,e_2) de E telle que la matrice de q y soit égale à* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— *Soit f un élément de $O^+(q)$ (resp. $O^-(q)$) montrer que sa matrice dans la base (e_1,e_2) est de la forme $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k & 0 \end{pmatrix}$) pour $k \in \mathbb{R}^*$. On note $O^{++}(q)$ la composante connexe de $O^+(E)$.*

— *On fait agir $O(q)$ sur les droites de E. Décrire les orbites sous $O(q)$, $O^+(q)$ et $O^{++}(q)$. Définir alors la notion d'angle hyperbolique de "deux" droites ainsi que sa mesure.*

Exercice 2. *Soit N sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$ qui n'est pas réduit à l'identité. On se propose de démontrer que $N = SO_3(\mathbb{R})$.*

— *Rappeler pourquoi il suffit de montrer que N contient un renversement.*

— *Soit N_0 la composante connexe de l'identité de N. Montrer que N_0 est un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$, puis montrer que N_0 n'est pas réduit à l'identité.*

— *En utilisant la fonction $g \in N \mapsto \frac{\mathrm{tr}(g)-1}{2}$, construire un renversement dan N_0.*

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 5$. On cherche à montrer que $PO_n(\mathbb{R})$ est simple.*

— *Soit $\bar{N}$ un sous-groupe distingué non réduit à l'identité et soit N son image inverse dans $SO_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il suffit de montrer que N contient un renversement.*

— *Supposons qu'il existe un sous-espace V de dimension 3 tel que $N \cap SO(V) \neq \{Id\}$. Montrer que $\bar{N} = PSO_n(\mathbb{R})$.*

— *Conclure en considérant un commutateur bien choisi.*

Exercice 4. *On note $\mathbb{Z}_{(2)} \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels dont le dénominateur est impair. Soit $G = O_3(\mathbb{Q})$.*

— *Montrer que $G \subset M_3(\mathbb{Z}_{(2)})$.*

— *Pour tout $n \geq 1$, soit $G_n = \{A \in G, \exists B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_{(2)}),\ A = I_3 + 2^n B\}$. Montrer que G_n est un sous-groupe distingué.*

— *Montrer que $\bigcap_{n\geq 1} G_n = \{I_3\}$.*

— *Montrer que $G_1 \neq G$ et $G_1 \not\subset SO_3(\mathbb{Q})$.*

— *Montrer que $G_{n+1} \subsetneq G_n$ et $G_n \subset SO_3(\mathbb{Q})$ pour tout $n \geq 2$.*

— *Pour tout $n \geq 2$, montrer que $G_n/G_{n+1} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.*

— *Montrer que $G/G_1 \simeq \mathfrak{S}_3$.*

— *Montrer que $G_1/G_2 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.*

1

2 (1) Les renversements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$ et sont tous conjugués.

(2) Tout d'abord N_0 est un sous-groupe (utiliser la continuité de la multiplication, del'inverse et de la conjugaison). Si on avait N_0 trivial alors pour $g \in N$ l'application $h \mapsto [h, g]$ est continue d'image contenu dans N_0 et donc N est contenu dans le centre i.e. N est trivial ce qui n'est pas.

(3) La fonction est continue égale à $\cos\theta$ et donc d'image contenue dans $[-1, 1]$. Par connexité et continuité, il suffit alors de construire g d'image négative, ce qui est simple en considérant la bonne puissance de $g \in N_0$ non trivial.

3 Soit $u \in N$ différent de $\pm Id$ et un plan P tel que $u(P) \neq P$. Soit alors r le renversement associé au plan P et $\rho = [u, r]$. Alors $P^\perp \cap u(P)^\perp$ qui est de dimension $\geq 5-4 = 1$ est stable par $\rho \neq \pm Id$. Soit alors a un vecteur stable par ρ et b tel que $\rho(b) \neq \pm b$. Soit $\sigma = s_b \circ s_a$ et $s = [\rho, \sigma] \in N$ avec $s = s_{\rho(b)} \circ s_b$ qui stabilise donc un sous-espace de dimension $n-2$....

4 (1) regarder un vecteur unitaire modulo 4

(2-3) facile

(4) La matrice permutation (12) n'appartient pas à G_1 et $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$ est dans G_1 sans être dans $SO_3(\mathbb{Q})$.

(5) $A_n = I_3 + \begin{pmatrix} -\frac{2^{n-1}}{1+4^{n-1}} & \frac{1}{1+4^{n-1}} & 0 \\ -\frac{1}{1+4^{n-1}} & -\frac{2^{n-1}}{1+4^{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $G_n \setminus G_{n+1}$. Pour $n = 1$, on considère $A = I_3 + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On écrit $\det A = \pm 1 = 1 + 4d$ avec $d \in \mathbb{Z}_{(2)}$...

(6) Soit $\pi(I_3 + 2^n B) = \bar{B} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}/.2\mathbb{Z})$. On écrit $AA^* = I_3$ ce qui donne $B + B^3 + 2^n B^* B = 0$...

(7) $A \mapsto \bar{A} \in O_3(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$...