Feuille de TD 6

Exercice 1. *Soit ABC un triangle.*

- *Montrer que P est le centre d'une inversion transformant ABC en un triangle isocèle en A' l'image de A, si et seulement si P appartient au A-cercle d'Apollonius défini comme l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.*
- *Quels sont les points du plan centre d'une inversion transformant ABC en un triangle équilatéral ?*
- *Les points du tiret précédents sont dits isodynamiques pour ABC. Montrer que ces points sont exactement les points $m \in \mathbb{C}$ tels que $[a, b, c, m] \in \{j, j^2\}$ où j est une racine cubique primitive de l'unité.*

Exercice 2. ***L'arbelos***

Soient deux demi cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ le premier de diamètre $[AB]$ et le deuxième $[AC]$ avec $C \in [AB]$. Montrer qu'on peut construire une chaine infinie de cercles $\mathcal{C}_n$ avec $n \geq 0$, avec $\mathcal{C}_0$ le cercle de diamètre $[CB]$, où $\mathcal{C}_n$ est tangent à $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_{n-1}$. On note d_n le diamètre de $\mathcal{C}_n$ et h_n l'ordonnée de son centre. Montrer que $h_n = nd_n$.