TD 8

<u>ex du cours</u>:

$$PGL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \{\text{Homographies}\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \longmapsto \frac{a'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b'}{c'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+d'}$$

$$\frac{z(aa'+cb')+(a'b+db')}{z(c'a+cd')+(bc'+dd')}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & \_\_ \\ \_\_ & \_ \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{surj :}}$ OK $\quad z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \quad ad-bc \neq 0$

$$\uparrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

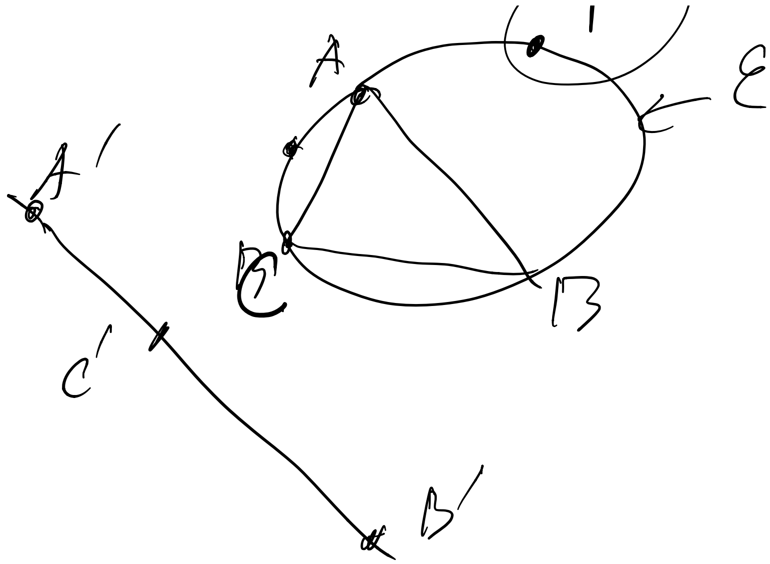
$\boxed{\text{inj :}}$ $\quad \dfrac{az+b}{cz+d} = z \qquad cz^2 + z(d-a) + b \overset{\shortparallel}{0}$

$$\Leftrightarrow c = 0 = b$$
$$a = d$$

$\leadsto a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ centre de $GL_2(\mathbb{C})$

$= \bar{0}$ dans $PGL_2(\mathbb{C})$

Ptolémée (exo 2 feuille 4)



si $P \in \mathcal{E}$

$\Updownarrow$

A', C', B' alignés dans cet ordre

$$\overline{A'B'} \underset{=}{\leq} \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$$

exo 1 : $A'B' = \ell^2 \dfrac{AB}{PA\cdot PB} = \ell^2 \dfrac{AC}{PA\cdot PC} + \ell^2 \dfrac{BC}{PB\cdot PC}$

$$\times \frac{PA\cdot PB\cdot PC}{\ell^2}$$

$$AB\cdot PC = AC\cdot PB + BC\cdot PA$$

Peaucellier

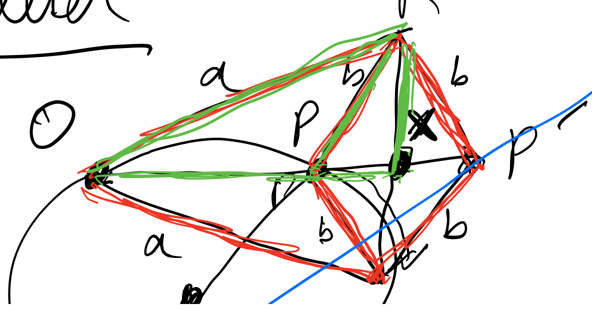
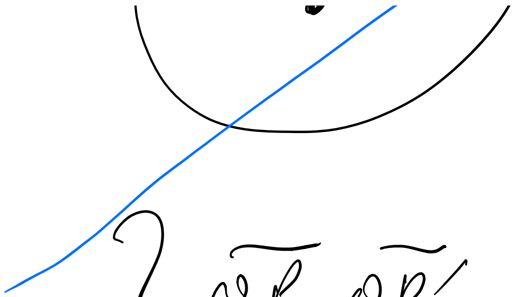


image de $\mathcal{E}$ par l'inversion de centre O



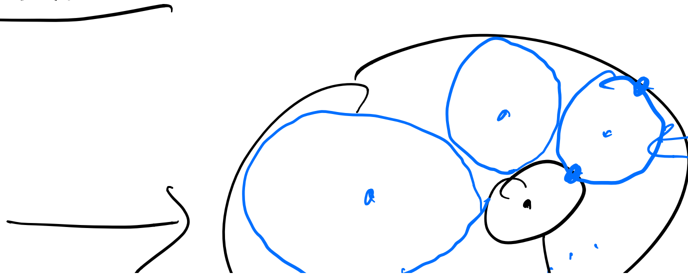
rapport a^2-b^2

? $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'} = a^2-b^2$?

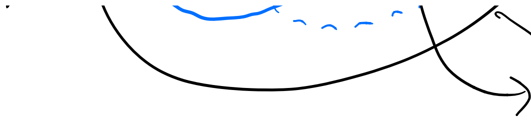
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'} = (\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XP})(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{XP})$$
$$= OX^2 - PX^2$$
$$= OX^2 + (RX^2 - RX^2) - PX^2$$
$$= \underbrace{(OX^2+RX^2)}_{OR^2} - \underbrace{(RX^2+PX^2)}_{PR^2}$$
$$= a^2 - b^2$$

Exo 3

Périodique ?

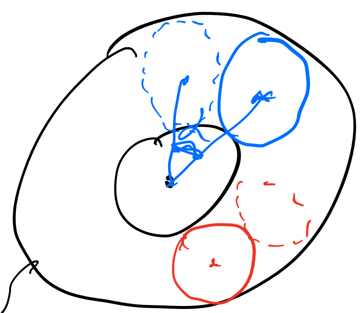


indépendant



$$c(\mathcal{E},\mathcal{E}') = \frac{1+\sin^2(\pi p/k)}{\cos^2(\pi p/k)}$$

<u>idée</u> : $\exists$ inversion $\underbrace{\mathcal{E} \text{ et } \mathcal{E}'}_{\text{2 cercles m̂ centre}}$



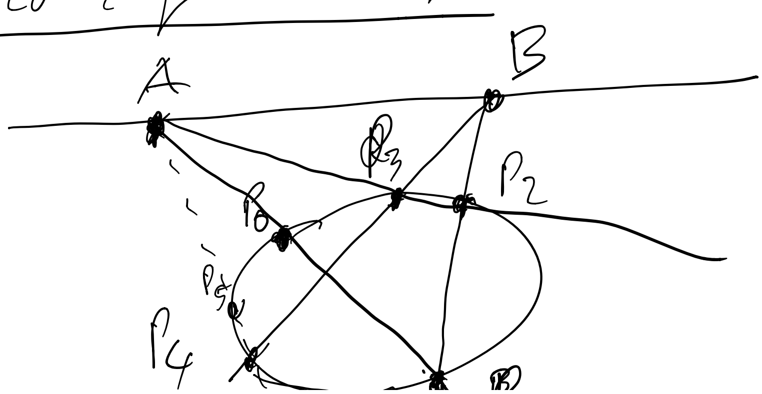
$\cancel{\alpha = 2\pi}$

$\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$

$\alpha = \pi \frac{p}{k}$

$c(\mathcal{E},\mathcal{E}') =$

<u>Exo 4 feuille 4</u>



$P_0 \xrightarrow{i_A} P_1$

$\downarrow i_B$

P_2

— " P_1

Question : (P_n) est-elle périodique ?
• réponse dépend de P_0 ?

i_A : inversion de centre A et de rapport la puissance de $A / \mathcal{E}$

i_B : —— B ——
—— $B / \mathcal{E}$

$P_0 \xrightarrow{i_A} P_1 \xrightarrow{i_B} P_2 \xrightarrow{i_A} P_3 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow P_0$?

$\downarrow i_A$

$\exists k$ tq

$$\boxed{(i_B \circ i_A)^k : P_0 \longrightarrow P_0}$$

Si c'est vrai : $P_1 \longmapsto P_1$
$\vdots$
$P_{2k-1} \longmapsto P_{2k-1}$

au moins 3 points fixes pour $(i_B \circ i_A)^k$

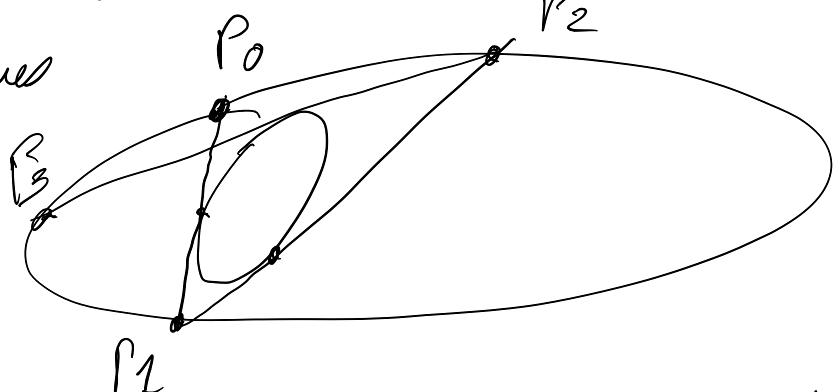
$$\Rightarrow \boxed{(i_B \circ i_A)^k = Id} \Leftarrow$$

indépendant de P_0

Calcul matriciel pour savoir si $i_B \circ i_A$ est d'ordre fini

Rem : Grand théorème de Poncelet

2 coniques

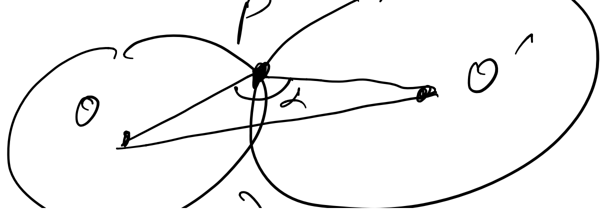


Si la suite est périodique alors c'est vrai $\forall P_0$ (critère explicite)

cas particulier : 2 cercles

Rem : sur $c(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \cos\alpha$

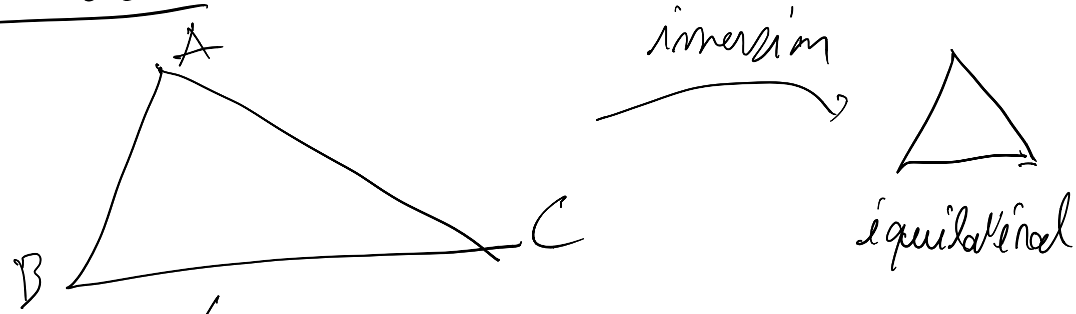
Al Kashi



inversion

l'angle est conservé

Feuille 6 exo 1



inversion i_2 : centre M
rapport ℓ^2

isocèle en $A' = i_2(A)$

$$A'B' = \ell^2 \frac{AB}{MA.MB} \qquad A'C' = \ell^2 \frac{AC}{MA.MC}$$

$$\boxed{A'B' = A'C'} \qquad \frac{AB}{\cancel{MA}.MB} = \frac{AC}{\cancel{MA}.MC}$$

$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}}$$

$\neq 1$

$\Longleftrightarrow$ $M \in$ ligne de niveau $\left\{ M \,/\, \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC} \right\}$

$\|$

cercle passant par

de diamètre $U = \mathrm{bar}((B,1),(C,r))$

$V = \mathrm{bar}((B,1),(C,-r))$

$r = \dfrac{AB}{AC}$

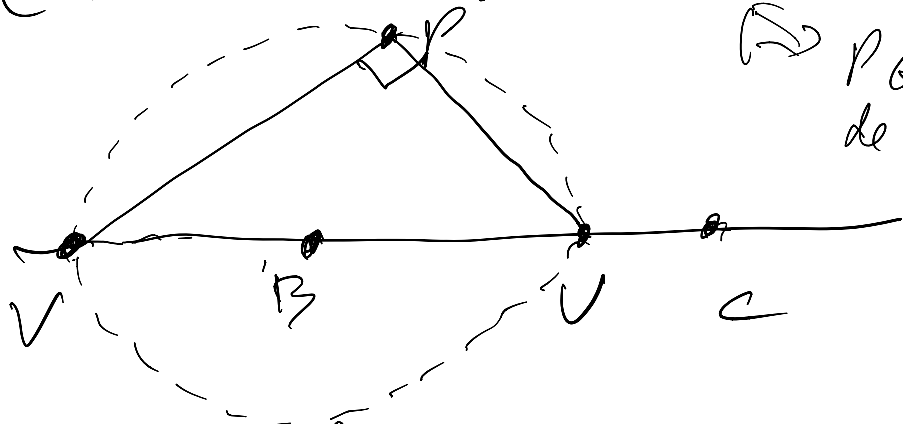
$(1+r)\,\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{PB} + r\,\overrightarrow{PC}$

$(1-r)\,\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{PB} - r\,\overrightarrow{PC}$

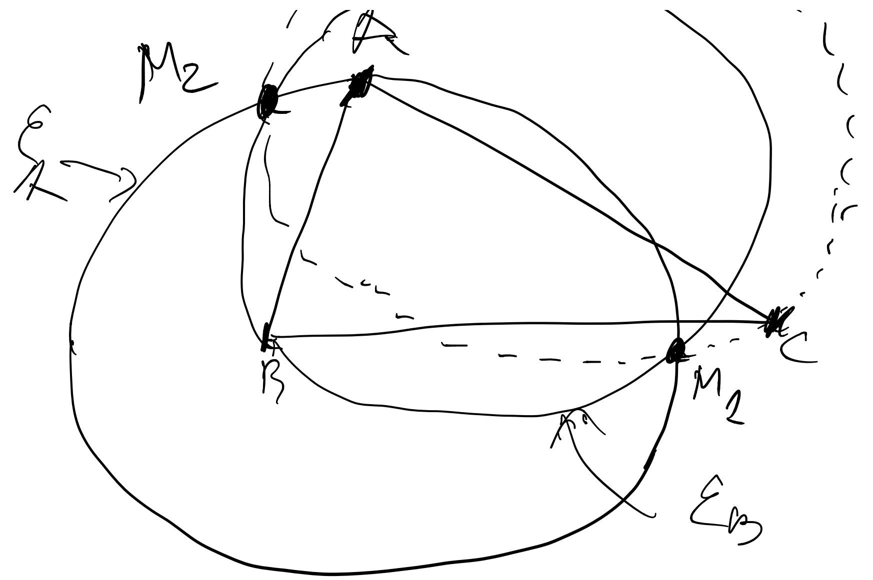
$P \,/\, \dfrac{PB}{PC} = r$

$(1-r^2)\,\overrightarrow{PU}\cdot\overrightarrow{PV} = PB^2 - r^2\,PC^2 = 0$

$\Longleftrightarrow$ $P \in$ cercle de diamètre $[U,V]$



cercle d'Apollonius en A de (A,B,C)



Hypo

AB, AC, BC sont ≠ 2 à 2

$M_i \in \mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B$

$$\frac{M_iB}{M_iC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{M_iA}{M_iC} = \frac{BA}{BC}$$

on divise

$$\frac{M_iB}{M_iA} = \frac{CB}{CA}$$

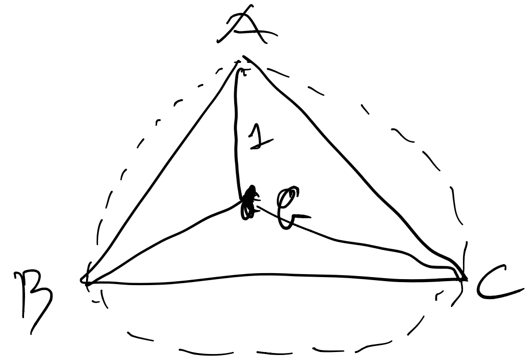
$M_i \in \mathcal{E}_C$

(points isodynamiques)

Conclusion ∃ exactement 2 points centres d'une inversion qui transforme ABC en un triangle équilatéral

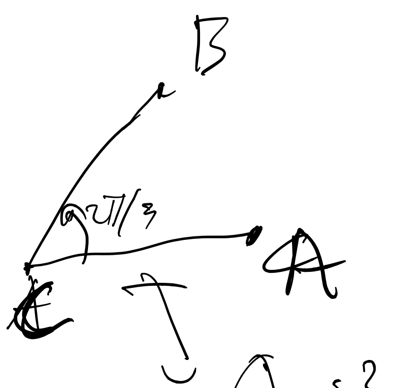
birapport : invariant par homographie
donc par inversion

⇝ on se ramène au cas d'un triangle équilatéral



* i_G = inversion de centre G de rapport 1

$$\begin{cases} A \longmapsto A \\ B \longmapsto B \\ C \longmapsto C \end{cases}$$



* ∞ i_∞ = similitude conserve les triangles équilatéraux

$$\frac{b-c}{a-c} = j, j^2 \qquad j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$$

$$\frac{c-b}{c-a} \in \{j, j^2\}$$

$$\frac{c-b}{c-a} : \underbrace{\frac{\infty-b}{\infty-a}}_{1} = [a, b, c, \infty] \in \{j, j^2\}$$

$$\Big\downarrow i_g$$

$$[a, b, c, g] \in \{j, j^2\}$$

$$\uparrow$$

$$\{c, g, \infty\}$$

$$[a, b, c, \underbrace{x}_{\text{inconnu}}]^3 = 1$$

équation de degré 3 $\Rightarrow$ 3 racines dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$\boxed{\{g, \infty\} = \{x : [a, b, c, x] \in \{j, j^2\}\}}$$

<u>Conclusion</u> : A, B, C triangle

les 2 points (isodynamiques) centres d'une inversion transformant A, B, C en 1 triangle équilatéral sont exactement $\{x : [a, b, c, x] \in \{j, j^2\}\}$