Université de Paris VI
D. Bertrand

Master 2005-2006
Théorie des nombres

CHAPITRE VII

THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

§1. Séries de Dirichlet.

Une série de Dirichlet est une série de fonctions de la variable complexe s, de la forme $\Sigma_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$, où les a_n sont des nombres complexes, et $n^s = exp(sLogn)$. On pose souvent $s = \sigma + it$, où $\sigma = Re(s) \in \mathbf{R}$.

Proposition 1 : *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série de Dirichlet $f = \Sigma\frac{a_n}{n^s}$ converge au point $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Alors:*

i) elle converge uniformément sur tout secteur angulaire fermé de sommet s_0, de bissectrice $s_0 + \mathbf{R}_{\geq 0}$ et d'angle $< \pi$.

ii) en particulier, elle converge sur le demi-plan ouvert $Re(s) > \sigma_0$, et sa somme $f(s)$ y est holomorphe.

iii) il existe un plus petit nombre réel σ_c (eventuellement égal à $-\infty$), appelé abscisse de convergence de la série de Dirichlet, tel que $f(s)$ converge si $\sigma > \sigma_c$, et diverge si $\sigma < \sigma_c$.

On pose $\sigma_c = +\infty$ si la série ne converge nulle part. L'abscisse de convergence σ_a de la série $\Sigma_{n\geq 1}\frac{|a_n|}{n^s}$ s'appelle l'abscisse de convergence absolue de f. Bien sûr, $\sigma_a \geq \sigma_c$.

La preuve de la proposition 1 repose sur l'analogue discret suivant de l'intégration par partie.

Lemme d'Abel : *Soien (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. Posons $A_{n,n'} = \Sigma_{k=n,\ldots,n'} a_n$. Alors,*

$$\Sigma_{k=n,\ldots,n'} a_n b_n = A_{n,n'} b_{n'} - \Sigma_{k=n,\ldots,n'-1} A_{n,k}(b_{k+1} - b_k)).$$

On utilisera également la majoration élémentaire suivante: pour tout $\beta > \alpha > 0$, et s de partie réelle $\sigma > 0$,

$$|e^{-\alpha s} - e^{-\beta s}| \leq |\frac{s}{\sigma}|(e^{-\alpha\sigma} - e^{-\beta\sigma}).$$

Démonstration de la proposition 1 : i) On se ramène par translation au cas $s_0 = 0$, où l'hypothèse revient à la convergence de la série Σa_n. On doit montrer que pour tout T arbitrairement grand, et tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n' > n > N$, le reste de Cauchy $S_{n,n'}(s) = \Sigma_{k=n,\ldots,n'} \frac{a_k}{k^s}$ est de module $< \epsilon$ pour tout s dans le secteur $\{\sigma \geq 0, \frac{|s|}{\sigma} \leq T\}$. Par hypothèse, il existe un tel N pour $s = 0$, i.e. pour la somme $A_{n,n'}$ (notation du lemme d'Abel). En appliquant ce lemme à $b_n = n^{-s}$, et la majoration élémentaire, on obtient:

$$|S_{n,n'}(s)| \leq \epsilon(1 + \frac{|s|}{\sigma}(\Sigma_{k=n,\ldots,n'-1}\ (\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma})))$$

d'où $|S_{n,n'}(s)| \leq \epsilon(1+T)$ pour tout s dans le secteur considéré.

ii) et iii) D'après le théorème de Weiestrass, la somme $f(s)$ de la série est holomorphe sur tout domaine où elle converge uniformément, donc est holomorphe sur $Re(s) > \sigma_0$. Les autres assertions découlent de i).

Exemples: i) la série $\zeta(s) = \Sigma_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ admet $\sigma_c = 1 = \sigma_a$ pour abscisse de convergence. Sa somme s'appelle la fonction zeta de Riemann. Elle admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ (voir bibliographie), avec pour unique pôle $s = 1$, de résidu 1 (voir Proposition 3 ci-dessous). Elle s'annule en tous les nombres entiers < 0 pairs. L'hypothèse de Riemann, ouverte au concours pour un million de dollars, affirme que ses seuls autres zéros sont situés sur la droite $Re(s) = 1/2$.

ii) (Exercices) si les a_n sont bornés, la série de Dirichlet admet une abscisse de convergence absolue $\sigma_a \leq 1$. Si toutes les sommes partielles $A_{n,n'}$ sont bornées, elle admet une abscisse de convergence $\sigma_c \leq 0$.

iii) Si sa somme $f(s)$ est identiquement nulle sur son demi-plan de convergence, alors tous les coefficients a_n de la série de Dirichlet sont nuls.

On dit qu'un point s_0 de la droite $Re(s) = \sigma_c$ est une singularité de f si pour tout voisinage ouvert Ω de s_0 dans $\mathbf{C}$, la restriction de f à $\Omega \cap \{Re(s) > \sigma_c\}$ n'admet pas de prolongement holomorphe sur Ω.

Proposition 2 (Landau) : *Soit $f(s) = \Sigma_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet à coefficients $a_n \geq 0$, et d'abscisse de convergence $\sigma_c \in]-\infty, +\infty[$. Alors le point $s = \sigma_c$ est une singularité de f.*

Démonstration : par translation, on peut supposer que $\sigma_c = 0$. On raisonne par l'absurde. Si 0 n'est pas une singularité, f est holomorphe sur un disque de centre 1 et de rayon $1+2\eta$, pour un $\eta > 0$, donc $f(-\eta)$ est somme de la série de Taylor $\Sigma_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(-1)^k(1+\eta)^k$ de

f en 1, qui est absolument convergente. Par ailleurs, le théorème de Weiestrass permet de dériver terme à terme la série de Dirichlet de f, et $(-1)^k f^{(k)}(1)$ est somme de la série $\Sigma_{n\geq 1} a_n (Logn)^k n^{-1}$, qui est une série convergente à termes positifs. La série double à termes positifs $f(-\eta) = \Sigma_{n,k} a_n (Logn)^k (1+\eta)^k/(n.k!)$ est donc convergente, et vaut par Fubini

$$f(-\eta) = \Sigma_n \frac{a_n}{n} (\Sigma_k \frac{[(1+\eta)Logn]^k}{k!}) = \Sigma_n \ \frac{a_n}{n} e^{(1+\eta)Logn} = \Sigma_{n\geq 1} \ a_n n^{\eta}.$$

Ainsi, la série de Dirichlet converge en $s = -\eta$. Son abscisse de convergence serait donc $\leq -\eta$, en contradiction avec l'hypothèse.

Des propriétés énoncées plus haut sur la fonction ζ de Riemann, nous n'aurons besoin que de la

Proposition 3 : *La fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ admet un prolongement holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 0$.*

Démonstration : Notons $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire du nombre réel x. On a

$$\zeta(s) = \Sigma_{n\geq 1} n^{-s} = \Sigma_n \ s \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} = s \int_1^{+\infty} (\Sigma_{n\leq x} 1) \frac{dx}{x^{s+1}} = s \int_1^{+\infty} \frac{[x]dx}{x^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - g(s),$$

où $g(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}dx}{x^{s+1}}$. Comme $\{x\}$ est bornée, cette dernière intégrale converge pour $Re(s) > 0$, et définit sur ce demi-plan une fonction holomorphe. Il en est donc de même de $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 - g(s)$.

Fonctions multiplicatives et produits eulériens.

Définition 1 : une fonction $a : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ est dite *multiplicative* si $a(nm) = a(n)a(m)$ pour tout couple d'entiers n, m *premiers entre eux*; exemples : les fonctions ϕ et μ du chapitre I, §1. Elle est dite *strictement multiplicative* si cette propriété est vérifiée pour tout n, m; exemples: la fonction 1, ou les caractères de Dirichlet (voir §2). On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Lemme 2 : *Soit a une fonction multiplicative bornée.*

i) La série de Dirichlet $f(s) = \Sigma_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s}$ converge absolument sur le demi-plan $Re(s) > 1$, et y est égale au produit infini convergent $\Pi_{p\in\mathcal{P}} f_p(s)$, où $f_p(s)$ désigne la somme de la série absolument convergente $\Sigma_{k\geq 0} \frac{a(p^k)}{p^{ks}}$.

ii) En particulier, si a est strictement multiplicative, $f(s) = \Pi_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-a(p)/p^s}$ (produit infini convergent sur $Re(s) > 1$). Par exemple, sur ce demi-plan, $\zeta(s) = \Pi_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-1/p^s}$.

iii) Pour σ tendant vers 1^+, on a $\Sigma_{p\in\mathcal{P}}\ p^{-\sigma} \sim Log(\frac{1}{\sigma-1})$ et $\Sigma_{p\in\mathcal{P},k\geq 2}p^{-k\sigma} = O(1)$.

Démonstration : i) la convergence absolue résulte de ce que les $a(n)$ sont bornés. Soit alors F un ensemble fini de nombres premiers, et $< F >$ l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers appartiennent à F. De la multiplicativité de a, on tire $\Sigma_{n\in<F>} \frac{a(n)}{n^s} = \Pi_{p\in F}\ f_p(s)$. Quand F croît, le terme de gauche tend vers $f(s)$ si $Re(s) > 1$. Le produit infini est donc convergent, et tend vers $f(s)$.

ii) Dans ce cas, $f_p(s) = \Sigma_{k\geq 0}(\frac{a(p)}{p^s})^k = \frac{1}{1-a(p)/p^s}$.

iii) $Log(\zeta(\sigma)) = \Sigma_{p\in\mathcal{P},k\geq 1}\frac{1}{kp^{k\sigma}} = \Sigma_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^\sigma} + g_2(\sigma)$, où $g_2(\sigma) < g_3(\sigma) := \Sigma_{p\in\mathcal{P},k\geq 2}\frac{1}{p^{k\sigma}}$. Pour $\sigma > 1$, cette série est majorée par la série $\Sigma_{n\geq 2,k\geq 2}\frac{1}{n^k}$, qui converge. Donc g_3 et g_2 sont bornées, et on conclut par la proposition 3.

§2. Nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Caractères de Dirichlet et fonctions L.

La définition 2 ci-dessous fournit un exemple important de fonctions strictement multiplicatives. Rappelons qu'on appelle *caractère* d'un groupe fini G tout homomorphisme de groupe $\chi : G \to \mathbf{C}^*$, i.e. vérifiant $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ pour tout (x, y) dans G. Les caractères de G forment eux-mêmes un groupe pour la loi $(\chi_1\chi_2)(x) := \chi_1(x)\chi_2(x)$, appelé groupe dual de G, et noté $\hat{G}$. L'élément neutre de $\hat{G}$ est le caractère unité χ_0, défini par $\chi_0(x) = 1$ pour tout $x \in G$. On a $\Sigma_{x\in G}\chi_0(x) = |G|$, tandis que pour tout

$$\chi \neq \chi_0\ ,\ \Sigma_{x\in G}\ \chi(x) = 0.$$

(Preuve: choisir $y \in G$ tel que $\chi(y) \neq 1$; le premier membre, multiplié par $\chi(y) - 1$, vaut 0.)

Soit G un groupe cyclique, d'ordre $|G| = n$, dont on fixe un générateur γ. Un caractère χ de G est entièrement déterminé par $\chi(\gamma) = w \in \mu_n(\mathbf{C})$. Inversément, toute racine n-ième de l'unité w détermine par cette formule un caractère de G. Ainsi, $\hat{G} \simeq \mu_n(\mathbf{C})$ est un groupe cyclique d'ordre n, donc isomorphe (non canoniquement) à G. Plus généralement, soit G un groupe *abélien* fini G. On a vu au chap. 4, §1, qu'il est isomorphe à un produit de groupes cycliques. On en déduit que $\hat{G}$ est encore isomorphe à G, et en particulier, qu'ils ont le même ordre. L'application $x \mapsto \{\chi \mapsto \chi(x)\}$ fournit alors un isomorphisme canonique de G avec le dual de $\hat{G}$, et la relation précédent entraîne, pour tout x différent de l'élément neutre e de G:

$$x \neq e,\ \Sigma_{\chi\in\hat{G}}\ \chi(x) = 0.$$

(et bien sûr, $\Sigma_{\chi\in\hat{G}}\ \chi(e) = |G|$.) On en déduit, en notant que $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1} = \overline{\chi(x)}$ (puisque χ prend ses valeurs dans le cercle unité):

Lemme 3 (relations d'orthogonalité) : *Soient G un groupe abélien fini, et x, y deux éléments de G. Alors, $\Sigma_{\chi\in\hat{G}}\ \overline{\chi(y)}\chi(x)$ vaut 0 si $x \neq y$, et 1 si $x = y$.*

Définition 2 : soit m un entier ≥ 1, et $U = U_m$ le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, d'ordre $\phi(m)$. On appelle *caractère de Dirichlet (modulo m)* tout caractère du groupe U_m. On étend un tel caractère χ en une fonction $\chi : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ en posant $\chi(n) = \chi($classe de n mod. $m)$ si n est premier à m, et $\chi(n) = 0$ sinon. Une telle fonction est strictement multiplicative. Comme elle est m-périodique, elle est bornée; mieux, la relation donnée au début du paragraphe entraîne que les sommes $A_{n,n'} = \Sigma_{k=n,\ldots,n'}\chi(k)$ sont bornées si $\chi \neq \chi_0$.

On déduit donc de l'exemple ii) du §1 que *si* $\chi \neq \chi_0$, la série de Dirichlet associée

$$L(s, \chi) = \Sigma_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

admet a une abscisse de convergence $\sigma_c(L(s,\chi)) \leq 0$; on a $\sigma_a(L(s,\chi)) \leq 1$ et $L(s,\chi) = \Pi_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-\chi(p)/p^s}$ si $Re(s) > 1$. En revanche, $\sigma_c(L(s,\chi_0)) \leq 1$; en fait,

$$\zeta(s) = L(s, \chi_0).\Pi_{p|m}\frac{1}{1 - 1/p^s},$$

de sorte que $\sigma_c(L(s,\chi_0)) = 1$.

Posons

$$\zeta_m(s) = \Pi_{\chi\in\hat{U}}L(s, \chi),$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet modulo m, et désignons, pour tout nombre premier p ne divisant pas m, par f_p l'ordre de la classe $\overline{p}$ de p dans U_m; alors, $g_p := \phi(m)/f_p$ est l'ordre du groupe quotient $U_m/ < \overline{p} >$, et l'on a:

Proposition 4 : *i) $\zeta_m(s) = \Pi_{(p,m)=1}(\frac{1}{1-p^{-f_p s}})^{g_p}$ pour $Re(s) > 1$;*
ii) pour tout $\chi \neq \chi_0$, $L(1,\chi) \neq 0$, et $\zeta_m(s)$ admet un pôle simple en $s = 1$.

Démonstration : i) On a $\Pi_{w\in\mu_{f_p}(\mathbf{C})}(1 - wT) = 1 - T^{f_p}$. De plus, g_p caractères de U_m prennent la valeur w en $\overline{p}$. Donc $\Pi_{\chi\in\hat{U}}(1 - \chi(p)T) = (1 - T^{f_p})^{g_p}$. On conclut en posant $T = p^{-s}$.

ii) Comme $L(s, \chi_0)$ admet un pôle simple en $s = 1$, il suffit de montrer la première assertion. Si elle n'était pas satisfaite, la fonction ζ_m serait holomorphe en $s = 1$, donc sur

$Re(s) > 0$. Mais vu i), c'est la somme d'une série de Dirichlet à coefficients réels positifs. D'après la Proposition 2, cette série admettrait donc une abscisse de convergence $\sigma_c \leq 0$. Or elle est minorée par la série $\Pi_{(p,m)=1}(1 + p^{-f_p s} + ...)^{g_p}$, donc aussi par $\Pi_{(p,m)=1}(1 + p^{-\phi(m)s} + ...)$, donc aussi par $\Sigma_{(n,m)=1} n^{-\phi(m)s}$, qui diverge pour $\sigma = 1/\phi(m)$.

Le théorème de Dirichlet

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Théorème (Dirichlet) *Soient m et a deux entiers naturels premiers entre eux. Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv a$ mod m.*

On va en fait obtenir un énoncé plus précis sur la répartition de ces nombres premiers, au moyen de la notion suivante. Rappelons que $\Sigma_{p\in\mathcal{P}}\ p^{-\sigma} \sim Log(1/(\sigma-1))$ quand $\sigma \to 1^+$ (Lemme 2). On dit qu'une partie X de $\mathcal{P}$ admet une densité de Dirichlet δ si $\Sigma_{p\in X}\ p^{-\sigma} \sim \delta Log(1/(\sigma-1))$ quand $\sigma \to 1^+$. Nous allons montrer que pour tout a premier à m, l'ensemble $\mathcal{P}_{a,m} := \mathcal{P}_a$ des nombres premiers congrus à a modulo m admet une densité de Dirichlet $\delta = 1/\phi(m)$ (et est donc bien infini).

Dans le cas du groupe U_m, les relations d'orthogonalité montrent que la fonction

$$n \mapsto \frac{1}{\phi(m)}\Sigma_{\chi\in\hat{U}}\ \overline{\chi(a)}\chi(n)$$

vaut 1 si $n \equiv a$ mod m, et 0 sinon. Par conséquent, sa restriction à l'ensemble $\mathcal{P}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}_a$.

Démonstration du Théorème : soit χ un caractère de Dirichlet modulo m. En prenant la dérivée logarithmique de $L(s,\chi)$ sur le domaine de convergence $Re(s) > 1$ de son développement en produit eulérien, on obtient

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \Sigma_{p\in\mathcal{P}}\ \frac{\chi(p)p^{-s}Logp}{1-\chi(p)p^{-s}} = \Sigma_p\Sigma_{k\geq 1}\frac{\chi(p^k)Logp}{p^{ks}} = \Sigma_{n\geq 1}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s},$$

où Λ désigne la fonction de von Mangoldt, définie par $\Lambda(n) = Log\ p$ si n est une puissance pure p^k d'un nombre premier p, $\Lambda(n) = 0$ sinon.

Multiplions la relation précédente par $\overline{\chi(a)}$, et sommons sur tous les $\chi \in \hat{U}$. De la relation d'orthogonalité, on déduit:

$$\Sigma_{n\equiv a \text{ mod } m}\ \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{1}{\phi(m)}\Sigma_{\chi\in\hat{U}}\ \overline{\chi(a)}\frac{L'}{L}(s,\chi).$$

Pour $s = \sigma \to 1^+$, le membre de gauche de cette égalité est de la forme

$$\Sigma_{p \equiv a \bmod m} \frac{Logp}{p^\sigma} + O(1).$$

Les termes du membre de droite correspondant à des caractères $\chi \neq \chi_0$ sont tous bornés, puisque $L(1, \chi)$ ne s'annule pas. Quant à celui de χ_0, il se comporte comme la dérivée logarithmique de la fonction ζ, donc est de la forme

$$\frac{1}{\phi(m)} \frac{1}{\sigma - 1} + O(1).$$

Par conséquent, pour $\sigma \to 1^+$:

$$\Sigma_{p \in \mathcal{P}_a} \frac{Logp}{p^\sigma} = \frac{1}{\phi(m)} \frac{1}{\sigma - 1} + O(1),$$

ce qui entraîne déjà que $\mathcal{P}_a$ est infini. Mais mieux: en intégrant cette relation entre $\sigma > 1$ et 2, on obtient

$$\Sigma_{p \in \mathcal{P}_a} \frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{\phi(m)} Log(\frac{1}{\sigma - 1}) + O(1),$$

et $\mathcal{P}_a$ admet bien une densité de Dirichlet, égale à $\frac{1}{\phi(m)}$.

Remarque: d'après le théorème des nombres premiers (Hadamard - La Vallée Poussin), pour tout nombre réel x suffisamment grand, le nombre

$$\pi(x) = card\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}$$

de nombres premiers $\leq x$ est de l'ordre de $\frac{x}{Logx}$. Pour a et m premiers entre eux, soient alors

$$\pi(x; a, m) = card\{p \in \mathcal{P}, p \equiv a \bmod m, p \leq x\}$$

le nombre d'éléments $\leq x$ de $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_{a,m}$. On peut préciser le théorème de Dirichlet sous la forme

$$lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x; a, m)}{\pi(x)} = \frac{1}{\phi(m)},$$

ce qu'on exprime en disant que $\mathcal{P}_a$ admet une densité naturelle égale à $\frac{1}{\phi(m)}$.

Bibliographie complémentaire

G. Tennenbaum et M. Mendès-France : *Les nombres premiers*; PUF, coll. “Que sais-je ?”, No 571, 1997.