Problème 1. *1. Soit $K = \mathbb{Q}(\theta)$ un corps de nombres de degré d tel que son anneau des entiers $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$; on note μ_θ le polynôme minimal de θ. Pour p un nombre premier, on factorise μ_θ en facteurs irréductibles*

$$\mu_\theta(X) \equiv \prod_{i=1}^{r} P_i(X)^{e_i} \mod p$$

où pour tout $i = 1, \cdots, r$, $P_i(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ est irréductible de degré f_i.

(a) Pour tout $i = 1, \cdots, r$, quels sont les α_i tel que le corps fini $\mathbb{F}_{p^{\alpha_i}}$ possède une racine θ_i de P_i ?

(b) Une racine $\theta_i \in \bar{\mathbb{F}}_p$ de P_i étant fixée, justifiez l'existence du morphisme

$$f_i : \mathbb{Z}[\theta] \longrightarrow \mathbb{F}_p[\theta_i]$$

défini par $f_i(\theta) = \theta_i$.

(c) On note $\mathcal{P}_i$ le noyau du morphisme f_i de la question précédente ; montrez que $\mathcal{P}_i$ est un idéal premier engendré par p et $P_i(\theta)$.

(d) Montrez que $\prod_{i=1}^r \mathcal{P}_i^{e_i} \subset p\mathcal{O}_K$ et concluez qu'il existe des entiers $0 \leq e'_i \leq e_i$ pour tout $i = 1, \cdots, r$ tels que

$$p\mathcal{O}_K = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i^{e'_i}.$$

(e) Quelle est la norme de l'idéal $\mathcal{P}_i$.

(f) Montrez en utilisant les questions précédentes que $p\mathcal{O}_K = \prod_{i=1}^r \mathcal{P}_i^{e_i}$.

2. On note $\omega = \sqrt[3]{2}$ et on pose $K = \mathbb{Q}(\omega)$.

(a) Montrez que le discriminant de $\mathbb{Z}[\omega] = -3^3 2^2$ et déduisez-en que $(\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\omega])$ est égal à 1 ou 3.

(b) Montrez que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$.

(c) Donnez la décomposition en produit d'idéaux premiers des idéaux suivants : $2\mathcal{O}_K$, $3\mathcal{O}_K$ et $5\mathcal{O}_K$.

(d) Montrez que $\mathbb{Z}[\omega]$ est principal.

3. On reprend les notations de la question précédente.

(a) Montrez que la norme $N_{K/\mathbb{Q}}(x + y\omega + z\omega^2) = x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz$.

(b) Soit p un nombre premier.

i. Montrez que ou bien p reste premier dans $\mathcal{O}_K$ ou bien il existe un idéal $\mathcal{P}$ de norme p.

ii. Montrez qu'il existe un idéal de $\mathcal{O}_K$ de norme p si et seulement si 2 est un cube de $\mathbb{F}_p^\times$.

iii. Montrez que si p reste premier alors $p \equiv 1 \mod 3$; en étudiant le cas $p = 31$ que pensez-vous de la réciproque ?

(c) Trouvez $\alpha \in \mathcal{O}_K$ (resp. $\beta \in \mathcal{O}_K$) tels que $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = 2$ (resp. $N_{K/\mathbb{Q}}(\beta) = 3$).

(d) *On considère l'équation*

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = m$$

et on écrit $m = \pm \prod_p p^{m_p}$. *Montrez que cette équation admet une solution* (x, y, z) *entière si et seulement si pour chaque* $p \neq 2, 3$ *premier tel que* 2 *n'est pas un cube dans* $\mathbb{F}_p^\times$, *l'entier* m_p *est divisible par* 3.

1 Solutions

1