Feuille d'exercices 3

Remarque : Tous les exercices ne seront pas traités en séance de TD, j'indiquerai au fur et à mesure sur la page du forum (http ://cours-jussieu-nombres.monforum.com/cours-et-td-2009-vf7.html) les exercices que nous aurons abordés.

1. Corps finis

Exercice 1.1. — *Montrer les isomorphismes suivant et donner un générateur du groupe des inversibles des corps en question :*

(i) $\mathbf{F}_4 \simeq \mathbf{F}_2[X]/(X^2+X+1)$ *;*

(ii) $\mathbf{F}_8 \simeq \mathbf{F}_2[X]/(X^3+X+1)$ *;*

(iii) $\mathbf{F}_{16} \simeq \mathbf{F}_2[X]/(X^4+X+1)$ *; donner dans cet isomorphisme l'image de* $\mathbf{F}_4 \subset \mathbf{F}_{16}$ *et en déduire* $\mathbf{F}_{16} \simeq \mathbf{F}_2[X,Y]/(Y^2+Y+1, X^2+X+Y)$.

(iv) $\mathbf{F}_9 \simeq \mathbf{F}_3[X]/(X^2+X-1)$.

Exercice 1.2. — *On dira d'une extension de corps* $k \subset \bar{k}$ *qu'elle est une clôture algébrique si :*

(a) tout élément $x \in \bar{k}$ *est algébrique sur* k*, i.e. il existe une polynôme* $P \in k[X]$ *tel que* $P(x) = 0$ *;*

(b) tout polynôme $P \in \bar{k}[X]$ *est totalement décomposé dans* $\bar{k}$.

Pour tout n *divisant* n' *on fixe une injection* $\mathbf{F}_{p^n} \subset \mathbf{F}_{p^{n'}}$. *Montrez alors que* $\bar{\mathbb{F}}_p := \bigcup_{n>1} \mathbb{F}_{p^{n!}}$ *est une cloture algébrique de* $\mathbf{F}_p$.

Exercice 1.3. — *(i) Donner tous les polynômes irréductibles de degré inférieur à* 4 *sur* $\mathbf{F}_2$.

(ii) Quelle est la factorisation sur $\mathbb{F}_4$ *d'un polynôme de* $\mathbb{F}_2[X]$ *irréductible de degré* 4 *?*

(iii) Déduire des questions précédentes, le nombre de polynômes irréductibles de degré 2 *sur* $\mathbf{F}_4$.

(iv) Expliciter les polynômes irréductibles de degré 2 *sur* $\mathbb{F}_4$.

Exercice 1.4. — *Polynômes irréductibles sur* $\mathbb{F}_q$. *soient* $A(n,q)$ *l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré* n *sur* $\mathbb{F}_q$ *et* $I(n,q)$ *le cardinal de cet ensemble.*

(a) Montrer que si $d|n$ *alors si* $P \in A(d,q)$ *on a* P *qui divise* $X^{q^n} - X$.

(b) Montrer que si $P \in A(d,n)$ *divise* $X^{q^n} - X$ *alors* d *divise* n.

(c) En déduire la formule

$$\sum_{d|n} dI(d,q) = q^n,$$

puis en appliquant la formule d'inversion de Moebius

$$I(n,q) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) q^d.$$

(d) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I(n,q) \geq 1$ *et trouver un équivalent de* $I(n,q)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 1.5. — *(1) Le nombre* 2 *est-il un carré dans* $\mathbf{F}_5$ *? Montrer que* X^2+X+1 *est irréductible sur* $\mathbf{F}_5$.

(2) Soit $P(X) \in \mathbf{F}_5[X]$ *un polynôme unitaire irréductible de degré deux . Montrer que le quotient*

$$\frac{\mathbf{F}_5[X]}{(P(X))}$$

est isomorphe au corps $\mathbf{F}_{25}$ *et que* P *a deux racines dans* $\mathbf{F}_{25}$.

(3) On note α *une racine de* X^2+X+1 *dans* $\mathbf{F}_{25}$. *Montrer que tout* $\beta \in \mathbf{F}_{25}$ *peut s'écrire* $a\alpha + b$ *avec* a *et* b *dans* $\mathbf{F}_5$.

(4) Soit $P = X^5 - X + 1$. *Montrer que pour tout* $\beta \in \mathbf{F}_{25}$, *on a* $P(\beta) \neq 0$. *En déduire que* P *est irréductible sur* $\mathbf{F}_5$. P *est-il irréductible sur* $\mathbf{Q}$ *?*

Exercice 1.6. — *On considère le polynôme* $Q(X) = X^9 - X + 1$ *sur* $\mathbf{F}_3$.

(a) Montrer que le polynôme Q *n'a pas de racines dans* $\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_9$.

(b) Montrer que $\mathbb{F}_{27} \simeq \frac{\mathbb{F}_3[X]}{(X^3-X-1)}$.
(c) Montrer que toute racine $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ *du polynôme* $X^3 - X - 1$ *est une racine du polynôme* Q.
(d) Déterminer toutes le racines de Q *dans* $\mathbb{F}_{27}$.
(e) Factoriser le polynôme Q *sur le corps* $\mathbb{F}_3$.

Exercice 1.7. — *A quelle condition un polynôme* P *à coefficients dans* $\mathbf{F}_p$ *de degré* n *est-il irréductible sur* $\mathbf{F}_{p^m}$ *? Dans le cas où* P *est irréductible sur* $\mathbf{F}_p$*, on donnera des précisions sur les degrés des facteurs irréductibles de* P *sur* $\mathbf{F}_{p^m}$*. En particulier pour* $n = 5$*, donner* m *minimal tel que tout polynôme de degré* 5 *à coefficients dans* $\mathbf{F}_p$ *soit totalement décomposé (resp. possède une racine) sur* $\mathbf{F}_{p^m}$.

Exercice 1.8. — *Théorie de Galois des corps finis et version faible du théorème de Dirichlet : Soit* p *un nombre premier et* n *un entier premier avec* p*. On pose* $q = p^r$.
(1) Décrire le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_q$ *et expliciter la théorie de Galois, i.e. montrer que l'application qui à un sous-groupe* H *de* $gal(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ *associe le sous-corps de* $\mathbb{F}_{q^n}$ *des éléments fixés par tous les éléments de* H*, est une bijection entre les sous-groupes du groupe de Galois et les extensions intermédiaires* $\mathbb{F}_q \subset \mathbf{K} \subset \mathbb{F}_{q^n}$.
(2) Soit $L = Dec_{\mathbb{F}_p}(X^n - 1)$*. Montrer que* $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p)$ *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *engendré par l'image de* p*. Montrer que le* n*-ième polynôme cyclotomique* $\Phi_n(X)$ *se décompose sur* $\mathbb{F}_p$ *en un produit de* $\phi(n)/k$ *facteurs irréductibles distincts, tous de degré* k*. Quel est cet entier* k *? En déduire une version faible du théorème de progression arithmétique, i.e. :*
pour tout entier n *il existe une infinité de nombres premiers* p *congrus à* 1 *modulo* n.

Exercice 1.9. — *(i) Montrer que* $X^4 + 1$ *est irréductible sur* $\mathbb{Z}$ *et réductible modulo tout nombre premier* p*. (Indication : montrer que pour tout nombre premier impair* p*, le polynôme* $X^4 + 1$ *a une racine dans le corps* $\mathbb{F}_{p^2}$.
(ii) Soit n *un entier ne s'écrivant pas sous la forme* p^α *ou* $2p^\alpha$ *avec* p *premier impair. On sait que le* n*-ième polynôme cyclotomique* Φ_n *est irréductible sur* $\mathbb{Z}$*. Montrer en utilisant la question (ii) de l'exercice sur la théorie de Galois des corps finis, que* Φ_n *est réductible modulo tout nombre premier.*

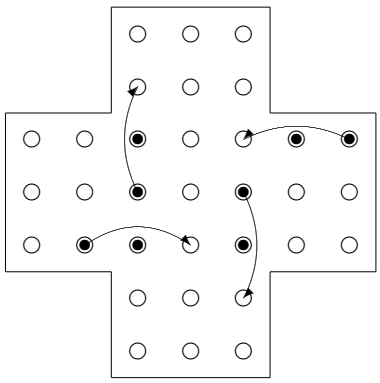
Exercice 1.10. — *Soit* $P(X) = X^4 - 10X^3 + 21X^2 - 10X + 11$
(a) Décomposer P *en facteurs irréductibles modulo 2,3,5.*
(b) Montrer que P *est irréductible sur* $\mathbb{Q}$.

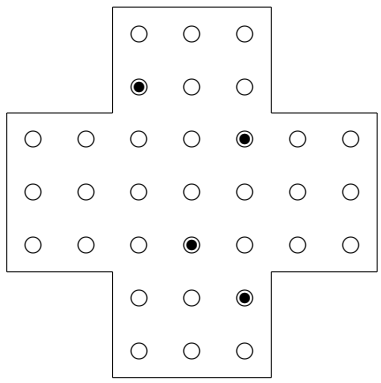
Exercice 1.11. — *Soient* p *et* l *deux nombres premiers impairs. On suppose que* p *engendre* $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$ *et que* $l \equiv 2 \mod 3$*. On note* $P(X) = X^{l+1} - X + p$*. On veut montrer que* P *est irréductible sur* $\mathbb{Z}$.
(i) Montrer que P *n'a pas de racine rationnelle.*
(ii) On raisonne par l'absurde et on suppose $P = QR$ *avec* $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ *unitaire et de degré au moins* 2*. Montrer que* $\bar{P} = X(X-1)\bar{\Phi}_l$ *est la décomposition en polynômes irréductibles de* $\bar{P}$ *sur* $\mathbf{F}_p$ *; en déduire alors que* $\bar{Q} = \bar{\Phi}_l$ *et* $\bar{R} = X(X-1)$.
(iii) En passant modulo 2*, en déduire une contradiction. Comme exemple on propose le polynôme* $X^{72} - X + 47$.

Exercice 1.12. — *Montrer l'existence d'une infinité de nombres premiers* p *tels que*
(a) $p \equiv 3 \mod 4$ *;* *(b)* $p \equiv 1 \mod 4$ *;*
(c) $p \equiv 1 \mod 2^m$ *;* *(d)* $p \equiv 5 \mod 6$ *;*
(e) $p \equiv 5 \mod 8$ *;* *(f)* $p \equiv 1 \mod 6$ *;*
(g) $p \equiv -1 \mod 12$ *;* *(h)* $p \equiv -1 \mod 10$.
Indication : on cherchera à faire des lemmes du genre : si p *divise* $a^2 + qb^2$ *et* p *premier avec* b*, alors* $-q$ *est un carré modulo* p *et donc d'après la loi de réciprocité quadratique* p *est congru à ? modulo* q.

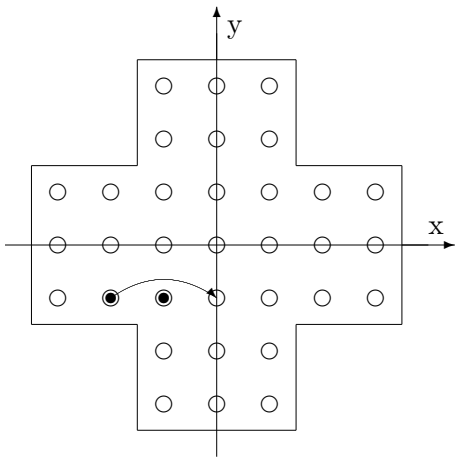
Exercice 1.13. — *Le jeu du solitaire se joue sur un plateau disposant de* 33 *réceptacles (cercle vide) dans lesquels il peut y avoir des billes notés avec un cercle plein. A chaque étape on peut faire passer une bille au dessus d'une autre sur un axe vertical ou horizontal, pourvu que le réceptacle suivant soit vide, comme dans la figure suivante*
Soit alors O *placé au centre du plateau et un repère* (O, x, y) *comme dans la figure suivante et pour une configuration* $\mathcal{C}$ *quelconque de billes sur le plateau on introduit*

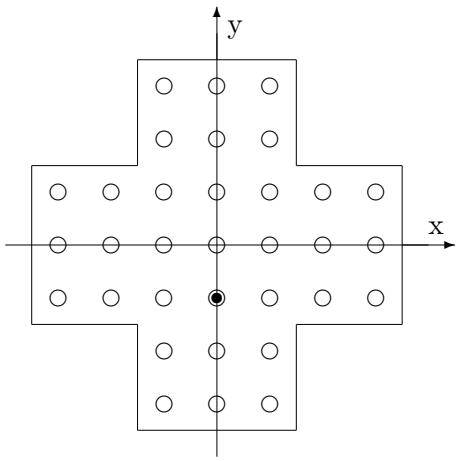
$$\alpha_{\mathcal{C}} := \sum_{(x,y)\in\mathcal{C}} j^{x+y} \in \mathbb{F}_4 \quad \beta_{\mathcal{C}} := \sum_{(x,y)\in\mathcal{C}} j^{x-y} \in \mathbb{F}_4$$





où j est un générateur de $\mathbb{F}_4^\times$.



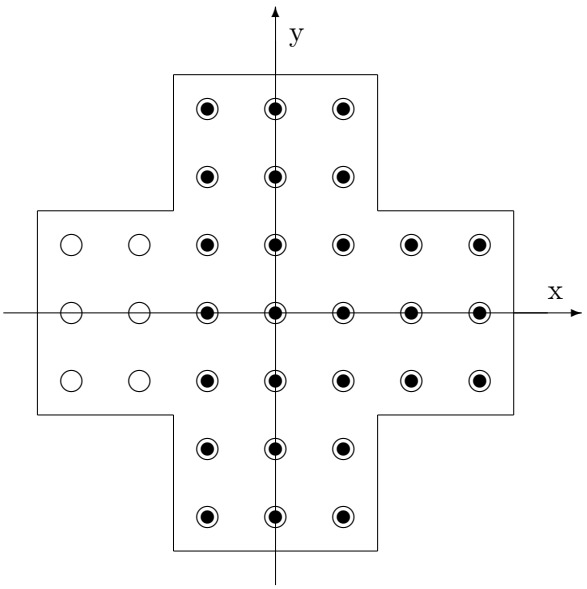


(1) Montrer que (α, β) est un invariant du jeu.
(2) Habituellement le jeu consiste à partir d'une configuration où l'on place des billes dans tous les réceptacles sauf un seul disons (x_0, y_0) et à arriver à la configuration où tous les réceptacles sont vides sauf celui (x_0, y_0). Montrer qu'effectivement les deux configurations précédentes, possèdent les mêmes invariants (α, β).
(3) Partant de la configuration suivante, montrer qu'il est impossible d'arriver à une configuration où il n'y aurait qu'une seule bille sur le plateau.

Exercice 1.14. — *Soit n un entier tel que pour tout p premier sauf éventuellement un nombre fini, n est un carré modulo p. Montrer que n est un carré dans $\mathbb{N}$.*

2. Codes correcteurs

La problématique des codes correcteurs est la suivante : A veut transmettre une information à B via un canal bruité (les ondes dans l'air ambiant, un flux d'électrons dans un cable...) de sorte que B le reçoit avec éventuellement des erreurs que l'on supposera pas trop nombreuses (sinon il faut changer de mode de transmission). Il s'agit alors pour B de détecter ces erreurs et si possible, les corriger. L'idée est alors pour A de rajouter de la redondance à son message ; citons l'exemple un peu bête suivant.
Exemples on prend pour alphabet $\mathbb{F}_2$. Supposons que A veuille transmettre l'un des 4 messages suivant : $00, 01, 10, 11$; il peut alors décider de l'envoyer en double de sorte que si B reçoit le message 0001 il sait qu'il y a eu une erreur de transmission. Cependant même en supposant qu'il n'y a qu'une seule erreur il ne sait pas si le message était 00 ou 01 ; il peut alors demander à A de lui renvoyer le message. Une solution moins coûteuse



et aussi efficace est donnée par *le bit de parité* : on rajoute au message la parité de la somme des données soit $000, 011, 101, 110$. Bien sûr si A répète trois fois le message, on voit que B pourra détecter et corriger une erreur mais on sent bien qu'on peut faire plus brilliant.

2.1. Mise en place. — On fixe un alphabet fini F de cardinal q (rapidement F sera un corps fini) de sorte que tous les messages à transmettre constituent un sous-ensemble de F^k. La phase d'encodage consiste ensuite à choisir $n > k$ puis à associer injectivement à chaque information $I \in F^k$ un message $M \in F^n$; le sous-ensemble obtenu de F^n s'appelle *le code C de longueur n*. Le rapport k/n qui mesure la redondance s'appelle *le taux d'information* du code. On dit que le message $(m_1, \cdots, m_n)$ est affecté de r erreurs si r de ses coordonnées ne sont pas correctes.

Définition 2.1. — Soient $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ deux éléments de F^n ; la distance de Hamming entre x et y notée $d_H(x, y)$ est le nombre d'indices $1 \leq i \leq n$ tels que $x_i \neq y_i$.

Remarque : $d_h : F^n \times F^n \to \mathbb{N}$ mérite bien le nom de distance comme le lecteur le vérifiera facilement.

Lors de la phase de décodage, on supposera toujours que le nombre d'erreurs possibles sur un mot est limité de sorte que si le message reçu R appartient au code alors le nombre d'erreurs est nul et sinon le message initial M est un mot du code C qui minimise la distance de Hamming. On peut alors formaliser le processus de décodage comme une application $D : F^n \to F^n$ dont l'image appartient à C et qui est l'identité sur C. Pour que tout cela fonctionne correctement, il y a un certain nombre de contraintes que nous allons essayer d'exposer.

Définition 2.2. — Soit C un code sur F, on appelle distance minimum de C l'entier

$$d = \min\{d_H(x, y) : \ x \neq y \in C\}.$$

S'il existe un mot $m' \in C$ tel que $d_H(m', R) < r$, alors clairement $m' \neq m$ et donc il ne faut pas décoder par m' même s'il s'agit du mot de C le plus proche de R ; en résumé il faut supposer que le nombre d'erreur r est tel que $r \leq \lfloor d/2 \rfloor$: en effet si on avait $d_H(m', R) < s$ alors d'après l'inégalité triangulaire on aurait $d_H(m, m') < 2r \leq d$ ce qui contredit la définition de la distance minimum d de C. Pour d pair et $r = d/2$, il n'est pas non plus exclu qu'il y ait deux mots distincts de C à distance r de R ce qui ne permet pas de décoder correctement.

Définition 2.3. — La capacité de correction de C, notée souvent t, est l'entier

$$t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor.$$

On dit alors que C est un code t-correcteur.

Remarque : ainsi pour tout $m \neq m'$ dans C, les boules fermées $B(m,t)$ et $B(m,t')$ sont disjointes et pour tout $x \in F^n$, la boule $B(x,t)$ contient au plus un mot de C. Signalons la situation idéale, mais rare, suivante où tout mot de F^n peut se décoder.

Définition 2.4. — Un code C est dit parfait si F^n est la réunion disjointe des boules fermées $B(m,t)$ où m décrit C.

Remarque : en utilisant que le cardinal de toute boule fermée de rayon r est de cardinal $\sum_{i=0}^{r}(\,{}_n^i)(q-1)^i$, le code C est parfait si et seulement si on a

$$|C|.\sum_{i=0}^{t}(\,{}_n^i(q-1)^i = q^n.$$

Un code est bon si $|C|$ et d sont grands ; évidemment ces exigences sont contradictoires.

2.2. Codes linéaires. — On prend pour F le corps $\mathbb{F}_q$; le code C est dit linéaire si C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_q^n$ de dimension k. *Le poids* $\omega(x)$ d'un élément $x \in \mathbb{F}_q^n$ est le nombre de ses composantes non nulles, soit aussi $d_H(x,0)$. Ainsi on a $d = \min_{0 \neq x \in C} \omega(x)$.

Proposition 2.5. — ***(Borne du singleton)*** *On a l'égalité*

$$d \leq n - k + 1.$$

Preuve : Notons E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_q^n$ formé des éléments dont les $k-1$ dernières composantes sont nulles de sorte qu'en notant $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique, E est engendré par $e_1, \cdots, e_{n-k+1}$. Comme $\dim E + \dim C > n$, $E \cap C$ n'est pas réduit à 0 et il existe donc x tel que $\omega(x) \leq n-k+1$ d'où le résultat.
Remarque : la distance relative d/n de C et son taux d'information k/n ne peuvent pas être simultanément proche de 1 vu que leur somme est plus petite que $1 + 1/n$. On dit que C est *un code MDS*, en anglais Maximum Distance Separable, si on a $d = n - k + 1$.

Définition 2.6. — Une matrice génératrice G d'un code C est une matrice dont les lignes forment une base. Une matrice vérificatrice H d'un code C est une matrice telle que $x \in C \Leftrightarrow Hx = 0$.

Proposition 2.7. — *La matrice H est vérificatrice si et seulement si elle est de rang $n-k$ et $G^tH = 0$.*

Preuve : Le résultat découle directement du fait qu'une matrice est vérificatrice pour

$$C = \{(u_1, \cdots, u_k)G : \ (u_1, \cdots, u_k) \in \mathbb{F}_q^k\}$$

si et seulement si ses lignes forment une base des formes linéaires de $C^\perp$ s'annulant sur C.
Remarque : rappelons comment on calcule une base des formes linéaires s'annulant sur C. On considère la matrice $\tilde{G}$ construite à partir de G en rajoutant une dernière ligne $(x_1 \cdots x_n)$. En opérant sur les colonnes de $\tilde{G}$, on se ramène alors à une matrice étagée de la forme

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & * & 0 & \cdots & 0 \\ f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & \cdots & f_k & f_{k+1} & \cdots & f_n \end{pmatrix}$$

et $f_{k+1}, \cdots, f_n$ forment une base de $C^\perp$. Une autre façon de procéder est d'utiliser les codes systématiques.

Définition 2.8. — Un code C est dit systématique s'il existe une matrice B ayant k lignes et $n-k$ colonnes telles que $(I_k|B)$ soit une matrice génératrice de C ; une matrice de cette forme est dite normalisée.

Remarque : si elle existe, la matrice normalisée est nécessairement unique. L'avantage de celle-ci est que le message se lit directement sur les k-premières composantes. En opérant sur les lignes, C de matrice génératrice G est systématique si et seulement si la matrice extraite des k premières colonnes et lignes, est inversible. En s'autorisant aussi à permuter les coordonnées, on se ramène toujours à un code systématique. Le lemme suivant fournit alors un algorithme pour construire H à partir de G.

Lemme 2.9. — *Si $G = (I_k|B)$ est la matrice génératrice normalisée de C alors $H = (-{}^tB|I_{n-k})$ est une matrice de contrôle.*

Correction des erreurs : supposons que le code est 1-correcteur et notons m' le message reçu différant du message envoyé x en au plus une coordonnée alors l'erreur à corrigée est $\epsilon = x' - x$ avec ϵ égal au vecteur e_i de la base canonique tel que $He_i = Hx'$. Plus généralement pour décoder un message, on commence par calculer tous les Hx pour les x tels que $\omega(x) \leq t$ de sorte que lorsque l'on reçoit un message m', la correction à apporter est ϵ tel que $\omega(\epsilon) \leq t$ et $H(\epsilon) = H(m')$.

Proposition 2.10. — *Soit H une matrice de contrôle de C ; la distance d de C est égal au nombre minimum de colonnes de H qui en tant que vecteurs de $\mathbb{F}_q^{n-k}$, sont linéairement dépendantes.*

Preuve : Le résultat découle des observations évidentes suivantes : s'il existe dans c un mot $(x_1, \cdots, x_n)$ de poids r alors de la relation $Hx = 0$, on en déduit qu'il existe r colonnes de H linéairement dépendantes ; la réciproque est identique.

2.11 — **Code de Hamming de longueur 7 :** prenons l'ensemble des mots de sept chiffres binaires, $q = 2$, $n = 7$ et $\mathcal{C}$ le code ayant pour base

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Pour transmettre un message $m = (m_0, m_1, m_2, m_3)$, on transmet $x = m_0e_0 + m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3$. Les paramètres de ce code sont $(7, 4, 3)$. Une matrice vérificatrice est

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : la matrice H a été obtenue en opérant sur les lignes comme annoncés précédemment ; le lecteur pourra aussi vérifier qu'elle est de rang 3 et que $G^tH = 0$. En outre toutes les colonnes de H sont distinctes de sorte qu'on obtient toutes les vecteurs non nuls de $\mathbb{F}_3$. On en déduit alors que deux colonnes sont obligatoirement libres et qu'étant données deux colonnes quelconques de H, leur somme est une colonne de H. De la proposition précédente on en déduit que $d = 3$. Ainsi le code de Hamming de longueur 7 est 1-correcteur parfait mais il n'est pas MDS. Etant donné un message reçu x' on dira que le message initial était $x = x' + e_i$ où i est l'indice de la colonne de H égale à Hx'. En ce qui concerne l'information de départ $y = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Codes linéaires cycliques. — L'exemple précédent suggère de rajouter une structure d'algèbre à un code linéaire C ; on obtient ce que l'on appelle un code linéaire cyclique ; précisément $C \subset \mathbb{F}_q^n$ est dit cyclique s'il est stable par l'automorphisme de décalage cyclique $T : \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q^n$ défini par

$$T(a_1, \cdots, a_n) = (a_n, a_1, \cdots, a_{n-1})$$

.

Proposition 2.12. — *Considérons l'isomorphisme naturel d'espace vectoriel $\psi : \mathbb{F}_q^n \simeq \mathbb{F}_q[X]/Q(X)$ où $Q(X) = X^n - 1$ défini par*

$$\psi(x_1, \cdots, x_n) = x_1X^{n-1} + \cdots + x_{n-1}X + x_n.$$

Le code linéaire $C \subset \mathbb{F}_q^n$ est cyclique si et seulement si son image par ψ est un idéal de sorte que les codes cycliques de longueur n sont en bijection avec les polynômes unitaires divisant $X^n - 1$.

Preuve : L'automorphisme T de $\mathbb{F}_q^n$ dans l'identification donnée par ψ, correspond à la multiplication par X de sorte que C est cyclique si et seulement si $\psi(C)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_q[X]$ stable par la multiplication par X et donc par tout élément de $\mathbb{F}_q[X]$; c'est donc un idéal de $\mathbb{F}_q[X]/(Q(X))$. La fin de la proposition découle du fait que les idéaux du quotient $\mathbb{F}_q[X]/(X^n-1)$ sont en bijection avec les diviseurs de X^n-1.
Remarque : le diviseur unitaire g de X^n-1 associé au code linéaire cyclique C s'appelle *le polynôme générateur* de C ; la dimension de C est $k = n - \deg g$. Le procédé de codage systématique est donné par la division euclidienne par g : le vecteur $(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{F}_q^k$ est codé par le polynôme $c = c_I - c_R$ où $C_i = c_1 X^{n-1} + \cdots + x_k X^{n-k}$ et c_R de degré $< n-k$ est le reste de la division euclidienne de c_I par g, i.e. c_I porte l'information et c_R la redondance.

Corollaire 2.13. — *On suppose $n \wedge p = 1$. Les codes linéaires cycliques de longueur n sur $\mathbb{F}_q$ sont en bijection avec les parties $I \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ stables par la multiplication par q.*

Preuve : D'après la proposition **??**, les racines d'un polynôme irréductible P sur $\mathbb{F}_q$ sont de la forme $\{\alpha, \alpha^q, \cdots, \alpha^{q^{r-1}}\}$ avec $\alpha^{q^r} = \alpha$ est une racine de P. Dans le cas où P est un facteur irréductible de X^n-1 ces racines sont des racines n-ème de l'unité lesquelles, une fois choisie une racine primitive, peuvent être vues comme des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de sorte que si α s'envoie sur k, α^q s'envoie sur qk, ce qui donne le résultat en considérant tous les facteurs irréductibles du polynôme générateur.

En général la distance minimal d'un code linéaire cyclique n'est pas facile à calculer, on dispose cependant de la minoration élémentaire suivante.

Proposition 2.14. — *Soit C un code linéaire cyclique de longueur n sur $\mathbb{F}_q$ associé à $I \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et supposons qu'il existe i et s tels que $\{i+1, i+2, \cdots, i+s\} \subset I$. La distance minimale d de C est $\geq s+1$.*

Preuve : Soient donc $0 \leq l_1 < \cdots < l_s < n$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{F}_q$ tels que, avec $R(X) = \sum_{i=1}^s \lambda_i X^{l_i}$, on ait $R(\alpha^k) = 0$ pour tout $i+1 \leq k \leq i+s$. Ces équations s'écrivent matriciellement en faisant intervenir une matrice de Vandermonde qui est inversible de sorte que les λ_i sont tous nuls ce qui prouve le résultat.
Remarque : notons $g(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{r-1} X^{r-1} + X^r$ le polynôme générateur du code cyclique C ; une matrice génératrice est alors

$$G = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{r-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{r-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & a_{r-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & a_{r-1} & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier toute code cyclique est systématique. Notons alors $h(X) = \frac{X^n-1}{g(X)} = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{k-1} X^{k-1} + X^k$ ce qui se traduit matriciellement par l'égalité $G^t H = 0$ où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & b_{k-1} & \cdots & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & b_{k-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{k-1} & \cdots & b_0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & b_{k-1} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

autrement dit H est une matrice de contrôle de C. Une autre façon équivalente de vérifier qu'un polynôme $m(X) \in C$ est de vérifier que $m(X)h(X)$ est divisible par X^n-1 ou encore si et seulement si $m(\alpha^i) = 0$ pour tout $i \in I$.

2.4. Codes BCH. — Les codes BCH (Bose-Chaudhuri-Hocquenghem) sont des codes cycliques particuliers qui contiennent les fameux codes de Redd-Solomon servant dans la lecture des CD. Pour q et r donné on prend n un diviseur de q^r-1 de sorte que l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est un diviseur de r. On note alors $\zeta_n \in \mathbb{F}_{q^r}$ une racine primitive n-ème de l'unité et pour $\delta \geq 2$, on considère le morphisme d'anneau

$$\mathbb{F}_q[X]/(X^n-1) \longrightarrow \mathbb{F}_{q^r}^{\delta-1}$$

qui à P associe $\Big(P(\beta), P(\beta^2), \cdots, P(\beta^{\delta-1})\Big)$. Le noyau de ce morphisme est le code $BCH(q,n,\delta)$ dont le polynôme générateur est le ppcm des polynômes minimaux sur $\mathbb{F}_q$ des éléments $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{\delta-1}$.

Remarque : il y a plusieurs cas selon que q est premier ou pas, que $r = 1$ ou $r > 1$ et que n est un diviseur strict ou pas de $q^r - 1$. On notera bien que le code ne dépend pas du choix de r. De manière équivalente, le code $BCH(q, n, \delta)$ est le code linéaire cyclique associé au plus petit sous-ensemble Σ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contenant $1, 2, \cdots, \delta - 1$ et stable par multiplication par q.

Proposition 2.15. — *Un polynôme $c = x_1 X^{n-1} + \cdots + x_n$ appartient à ce code si et seulement si*

$$c(\alpha) = c(\alpha^2) = \cdots = c(\alpha^{\delta-1}) = 0$$

où α désigne une racine primitive n-ème de l'unité dans $\mathbb{F}_{q^r}$.

Remarque : pour $\delta = 2t + 1$, on peut d'après ce qui précède corriger t erreurs, expliquons comment s'y prendre dans le cas $q = 2$. Supposons que le mot reçu soit $u = c + \epsilon$ et que le nombre d'erreurs est $\mu \leq t$ de sorte que

$$\epsilon = X^{l_1} + \cdots + X^{l_\mu}$$

avec $0 \leq l_\mu < \cdots < l_1 \leq n - 1$. Le calcul des $u(\alpha_i) = \epsilon(\alpha^i)$ pour $i = 1, \cdots, 2t$ permet de connaître les sommes de Newton S_k des $(\alpha^{l_i})_{1 \leq i \leq \mu}$ et donc, cf. ci après, le polynôme localisateur d'erreur $\sigma(X) = \prod_{i=1}^{\mu}(1 - \alpha^{l_i} X)$. On détermine alors les bits erronés en testant les i tels que $\sigma(\alpha^i) = 0$. Comme on est en caractéristique 2, on ne peut pas utiliser les relations de Newton habituelles ; une méthode consiste à utiliser la congruence suivante.

Proposition 2.16. — *Posons $S(X) = \sum_{i=1}^{2t} S_i X^{i-1}$; on a alors*

$$S(X)\sigma(X) \equiv \omega(X) \mod X^{2t}$$

où $\omega(X)$ est de degré $< t$.

Preuve : On a

$$S(X) = \sum_{i=1}^{2t} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha^{il_j} X^{i-1} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha^{l_j} \frac{1 - \alpha^{2tl_j} X^{2t}}{1 - \alpha^{l_j} X}$$

ce qui donne le résultat en prenant $\omega(X) = \sigma(X) \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\alpha^{l_j}}{1 - \alpha^{l_j} X}$.

Lemme 2.17. — *Soient σ' et ω' des polynômes de $\mathbb{F}_{q^m}[X]$ avec $\deg \sigma' \leq t$ et $\deg w' < t$ et $S(X)\sigma'(X) \equiv \omega'(X) \mod X^{2t}$. Il existe alors $c(X) \in \mathbb{F}_{q^m}[X]$ tel que $\sigma' = c\sigma$ et $\omega' = c\omega$.*

Preuve : Modulo X^{2t}, on a

$$\omega\sigma' \equiv S\sigma\sigma' \equiv \omega'\sigma$$

de sorte que $\omega\sigma' - \omega'\sigma$ est divisible par X^{2t} et donc nul car de degré $< 2t$. Le résultat découle alors du lemme de Gauss en remarquant que σ et ω sont premiers entre eux car n'ayant pas de racines communes.

On exécute ensuite l'algorithme d'Euclide étendu à partir de $P_0(X) = X^{2t}$ et $P_1 = S$ ce qui donne des suites (P_i), (A_i) et (B_i) avec $\deg P_i < \deg P_{i+1}$ et $p_i = A_i Z^{2t} + B_i S$ et donc $SB_i \equiv P_i \mod X^{2t}$. Il existe en outre un unique i tel que $\deg P_{i-1} \geq t$ et $\deg P_i < t$ de sorte que comme $\deg B_i = \deg P_0 - \deg P_{i-1} \leq 2t - t = t$, en posant $\sigma' = B_i$ et $\omega' = P_i$, on est dans les conditions du lemme précédent. Il existe donc $c(X) \in \mathbb{F}_{2^m}[X]$ tel que

$$B_i = C\sigma, \qquad P_i = C\omega$$

avec $\omega - S\sigma = AX^{2t}$ et donc $A_i = CA$. Or comme A_i et B_i sont premiers entre eux, le polynôme C est constant égal à $P_i(0)$ ce qui permet de calculer σ.

Remarque : dans le cas q quelconque, on obtient de la même façon le polynôme σ ; pour déterminer les coefficients il suffit ensuite de résoudre un système de Vandermonde.

2.18 — **Codes de Hamming** : on prend $n = \frac{q^r - 1}{q - 1}$ de sorte que q est d'ordre r dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et on prend $I := \{1, q, q^2, \cdots, q^{r-1}\}$. Montrons que $d \geq 3$: en effet s'il existe $a, b \in \mathbb{F}_q$ tel que $aX^i + bX^j$ appartient au code alors $a\beta^{q^s i} + b\beta^{q^s j} = 0$ de sorte que $a + b\beta^{q^s(j-i)} = 0$ et comme β est d'ordre n on voit que $a = b = 0$. Par ailleurs une matrice de contrôle $H \in \mathbb{M}_{r,n}(\mathbb{F}_q)$ est telle que ses colonnes forment n vecteurs de $\mathbb{F}_q^r$ qui sont donc 2 à 2 indépendantes ; comme $n = (q^r - 1)/(q - 1)$ on obtient exactement un vecteur dans chaque droite de $\mathbb{F}_q^r$. Ainsi pour e_1 et e_2 deux colonnes distinctes le vecteur $e_1 + e_2$ est nécessairement colinéaire à un des vecteurs colonnes de H et donc $d \leq 3$.

Remarque : les codes de Hamming sont 1-correcteur parfait qui ne sont MDS que pour $r = 2$. Soit $P(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ est un polynôme irréductible de degré r qui est primitif, i.e. telle que la classe α de X dans $\mathbb{F}_q[X]/(P(X))$ engendre

le groupe multiplicatif, autrement dit si $P(X)$ est un diviseur irréductible de $\Phi_n(X)$. A $(m_r, \cdots, m_{n-1})$ on associe $(m_0, \cdots, m_{r-1})$ tel que

$$m_0 + m_1\alpha + \cdots + m_{r-1}\alpha^{r-1} = -\sum_{k=r}^{n-1} m_k\alpha^k$$

et on transmet le mot de code $M = (m_0, \cdots, m_{n-1})$. On reçoit $M' = (m'_0, \cdots, m'_{n-1})$ dont la distance de Hamming à M est ≤ 1. Le mot $M' \in C$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n-1} m'_k\alpha^k = 0$ et sinon on retrouve $M = M' - (0, \cdots, 0, \lambda, 0, \cdots, 0)$ où λ est en i-ème position tel que $\lambda\alpha^i = \sum_{k=0}^{n-1} m'_k\alpha^k$.
Exemples le code du minitel, cf. l'exercice 2.3.

2.19 — **Codes de Reed-Solomon** : on prend $q = 2^m$ et $n = q - 1$. Soit alors α un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$. Pour k fixé on pose

$$g(X) := \prod_{i=1}^{q-1-k} (X - \alpha^i)$$

de sorte que g est le générateur d'un code cyclique sur $\mathbb{F}_q$ de longueur $q-1$ et de dimension k. Sa distance minimale est $\geq q - k$ d'après la proposition 2.14 et $\leq q - k$ d'après la borne du singleton. Ses paramètres sont donc $(q - 1, k, q - k)$.
Exemples le code pour les CD, cf. l'exercice 2.4.

2.20 — Citons quelques cas où l'on considère pour n un diviseur strict de $q^r - 1$:
- **Code ternaire de Golay** : on a $3^5 - 1 = 11.23$; on choisit $q = 3$, $n = 11$ et la partie de$(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$ engendrée par 3, i.e. $i = \{1, 3, 4, 5, 9\}$. On note $\mathcal{G}_{11}$ le code linéaire cyclique correspondant. Montrer que $d(\mathcal{G}_{11}) = 4, 5$ puis que $\mathcal{G}_{11}$ est 2-correcteur parfait (il n'est pas MDS).
- **Code binaire de Golay** : on a $2^{11} - 1 = 23.89$, on choisit $q = 2$, $n = 23$ et $I = (2) \subset (\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^\times$.On note $\mathcal{G}_{23}$ le code linéaire cyclique correspondant. Montrer que $d(\mathcal{G}_{23}) = 5, 6, 7$ puis que $\mathcal{G}_{23}$ est "-correcteur parfait.

2.5. Exercices. —

Exercice 2.1. — *On code un nombre à* 10 *chiffres* $a_1, \cdots, a_{10}$ *en ajoutant deux clés :*
- *la première est le reste* a_{11} *modulo* 11 *de la somme des dix chiffres ;*
- *la seconde est le reste* a_{12} *modulo* 11 *de* $\sum_{k=1}^{10} ka_k$.

Montrez que ce code permet de détecter et de corriger une erreur.

Exercice 2.2. — *Donnez la distance et des matrices génératrices et vérificatrices des codes suivants :*
(i) ***Code raccourci*** *: soit* $d(\mathcal{C}) \leq l \leq n$, *on pose* $\mathcal{C}^{(l)} := \{x \in \mathbb{F}_q^l \ / \ (x; 0, \cdots, 0) \in \mathcal{C}\}$.
(ii) ***Code étendu*** *:* $\bar{\mathcal{C}} := \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{F}_q^{n+1} \ / \ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{C} \text{ et } x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0\}$.
(iii) ***Code dual*** *:* $\mathcal{C}^* := \{x' \in \mathbb{F}_q^n \ / \ \forall x \in \mathcal{C}, \ < x, x' >= 0\}$ *où* $<,>$ *est le produit scalaire canonique.*

Exercice 2.3. — ***Code du minitel***
(a) Montrez que le polynôme $P(X) = X^7 + X^3 + 1$ *est irréductible sur* $\mathbb{F}_2$ *et en déduire que* $\mathbb{F}_{128} \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^7 + X^3 + 1)$ *et montrez que* X *est un générateur du groupe multiplicatif.*
(b) Pour envoyer un message de 15 *octets (soit 120 bits) de la forme* $M = a_0a_1 \cdots a_{119}$ *où les* a_i *sont des éléments de* $\mathbb{F}_2$ *(des bits), on considère l'élément suivant de* $\mathbb{F}_{128}$

$$\beta = a_0\alpha^{126} + \cdots + a_{119}\alpha^7 = a_{120}\alpha^6 + \cdots + a_{125}\alpha + a_{126}$$

On envoie alors le message $a_0a_1 \cdots a_{126}a_{127}$ *où* a_{127} *est un bit de parité, soit* 16 *octets. Le message reçu est* $a'_0 \cdots a'_{127}$ *où certains* a'_i *sont distincts de* a_i *à cause d'une erreur de transmission. On suppose toutefois que les erreurs de transmission sont suffisamment rares pour qu'au plus une erreur se soit produite, par exemple au bit* k, *i.e.* $a_i = a'_i$ *pour* $i \neq k$ *et* $a'_k = a_k + 1$. *Expliquez comment décoder le message et commentez le choix de* 128.

Exercice 2.4. — ***Les disques compacts***
(a) Montrez que $P(X) = X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1$ *est irréductible sur* $\mathbb{F}_2$ *et en déduire que* $\mathbb{F}_{256} \simeq \mathbb{F}_2[X]/(P(X))$. *Montrez que* α, *l'image de* X, *est un générateur du groupe multiplicatif.*

(b) On représente un octet par un élément de $\mathbb{F}_{256}$*. Considérons un mot* $M = a_0 \cdots a_{250}$ *constitué de* 251 *octets, i.e.* $a_i \in \mathbb{F}_{256}$*. On considère*

$$(\sum_{i=0}^{250} a_i X^i)(X+\alpha)(X+\alpha^2)(X+\alpha^3)(X+\alpha^4) = \sum_{i=0}^{254} b_i X^i$$

et on transmet le message $M = b_0 \cdots b_{255} b_{256}$ *où* b_{256} *est un bit de parité.*

(i) Supposons que deux erreurs au plus se produisent dans la lecture de M*. Comment savoir s'il y a eu zéro, une ou deux erreurs et expliquez comment les corriger.*

(ii) On suppose désormais que quatre octets quelconques de M *sont illisibles. Expliquez comment retrouver les bonnes valeurs.*

(iii) Dans un CD, on code les informations musicales par paquets de 24 *octets auxquels on adjoint* 4 *octets comme précédemment afin de pouvoir corriger deux erreurs ou 4 effacements. On obtient ainsi des mots de* 28 *octets, dont le* i*ème mot est noté* M_i *de* k*-ème octet est* $M_i(k)$*. Les mots sont alors entrelacés comme suit : chaque sillon est constitué de* 28 *octets, le* i*-ème sillon contient alors les octets suivants*

$$M_i(1)\ M_{i-4}(2)\ M_{i-8}(3) \cdots M_{i-108}(28)$$

ou de manière équivalente M_i *est constitué de* $S_i(1)S_{i+4}(2)\cdots S_{i+108}(28)$*. Chaque sillon de* 28 *octets est complété de* 4 *octets comme précédemment. Expliquez comment nos lecteurs de CD se jouent des rayures (de 2mm de large).*

3. Solutions

1.1 (i) On vérifie rapidement que X^2+X+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$, étant de degré 2 il y est alors irréductible de sorte que $\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$ est un corps, une extension de degré 2 de $\mathbb{F}_2$ et donc isomorphe à $\mathbb{F}_4$ qui par convention est **le** corps de cardinal 4 contenu dans une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_2$ de $\mathbb{F}_2$ fixée une fois pour toute. Comme $\mathbb{F}_4^\times \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, tout élément autre que $0,1$ est un générateur de $\mathbb{F}_4^\times$, soit X et $X+1$.

(ii) De même, on vérifie que X^3+X+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$; étant de degré 3 il est alors irréductible sur $\mathbb{F}_2$ de sorte que $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$ est un corps de cardinal 8 et donc isomorphe à $\mathbb{F}_8$. Comme $\mathbb{F}_8^\times \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tout élément autre que $0,1$ est un générateur du groupe des inversibles, par exemple X.

(iii) Encore une fois X^4+X+1 n'a pas de racines sur $\mathbb{F}_2$ mais cela ne suffit pas pour conclure à son irréductibilité ; il nous faut montrer que X^4+X+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_4$. Soit donc $x \in \mathbb{F}_4$ n'appartenant pas à $\mathbb{F}_2$; on a alors $x^3=1$ de sorte que $x^4+x+1 = x+x+1 = 1 \neq 0$. Ainsi X^4+X+1 n'a pas de racines dans les extensions de degré $\leq 4/2$ de $\mathbb{F}_2$ et est donc irréductible sur $\mathbb{F}_2$ de sorte que $\mathbb{F}_2[X]/(X^4+X+1)$ est un corps de cardinal 16 qui est donc isomorphe à $\mathbb{F}_{16}$.

Pour savoir si X est un générateur du groupe multiplicatif, il suffit de vérifier qu'il n'est pas d'ordre 3 ou 5. Or dans la base $1, X, X^2, X^3$, $X^3-1 \neq 0$ et $X^5-1 = X^2+X+1 \neq 0$.

On cherche les éléments de $\mathbb{F}_4$ autres que $0,1$, i.e. des éléments d'ordre 3. Un candidat naturel est $X^5 = X^2+X =: \chi$, on a alors $\chi^2 = X^4+X^2$ et $\chi^2+\chi+1=0$ et $\chi^3=1$ de sorte que le sous ensemble $\{0,\chi,\chi^2,\chi^3\}$ de $\mathbb{F}_{16}$ correspond au sous-corps $\mathbb{F}_4$. En outre $X^2+\chi X+1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2[\chi]$ et il y est donc irréductible de sorte que $\mathbb{F}_{16} \simeq \mathbb{F}_2[X,Y]/(Y^2+Y+1, X^2+YX+1)$.

(iv) A nouveau X^2+X-1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_3$, il y est donc irréductible et $\mathbb{F}_9 \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^2+X-1)$. En outre $\mathbb{F}_9^\times \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ de sorte qu'il y a $\psi(8)=4$ générateurs et donc 4 non générateurs. On a $X^4 = (X-1)^2 = X^2-2X+1 = -3X+2 = -1$ et X est un générateur de $\mathbb{F}_9^\times$.

1.2 Evidemment $\bigcup_{n=1}^N \mathbb{F}_{p^{n!}} = \mathbb{F}_{p^{N!}}$ de sorte que $k = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{F}_{p^{n!}}$ est une réunion croissante de corps et est donc un corps ; en effet pour $x,y \in k$, il existe n tels que $x,y \in \mathbb{F}_{p^{n!}}$ et $x+y, xy$ sont définis dans $\mathbb{F}_{p^{n!}}$. Il est en outre immédiat que k est algébrique sur $\mathbb{F}_p$ car tout $x \in k$ est un élément d'un $\mathbb{F}_{p^{n!}}$ pour n assez grand. Il reste alors à voir que k est algébriquement clos ; soit donc $P(X) \in k(X)$ irréductible et soit $\mathbb{F}_{p^m}$ une extension contenant les coefficients de P et soit L un corps de rupture de P dans $\bar{\mathbb{F}}_p$ sur $\mathbb{F}_{p^m}$; L est alors une extension finie de $\mathbb{F}_{p^m}$ et est donc égale à un certain $\mathbb{F}_{p^r}$ et donc inclus dans $\mathbb{F}_{p^{r!}} \subset k$. Ainsi tout polynôme irréductible sur k est de degré 1 soit k algébriquement clos.
Remarque : En général il est pratique de fixer une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_p$ et de noter pour tout n, $\mathbb{F}_{p^n}$ **le** corps de décomposition dans $\bar{\mathbb{F}}_p$ du polynôme $X^{p^n}-X$.

1.3 (i) Les polynômes irréductibles de degré 1 sont X et $X-1$; ceux de degré 2 sont tels que $X^4-X = X(X-1)P$ ce qui donne X^2+X+1. Pour ceux de degré 3, on a $X^8-X = X(X-1)P_1P_2$ et on trouve X^3+X+1 et X^3+X^2+1. Enfin pour ceux de degré 4, on a $X^16-X = (X^4-X)Q_1Q_2Q_3$ et on trouve X^4+X+1, $X^4+X^3+X^2+X+1$ et X^4+X^3+1. En effet ceux-ci sont irréductibles car un élément j de $\mathbb{F}_4$ qui n'est pas dans $\mathbb{F}_2$ vérifie $j^3=1$ de sorte qu'il ne peut être racine des polynômes en question.

(ii) Tout polynôme de $\mathbb{F}_2[X]$ de degré 4, irréductible sur $\mathbb{F}_2$, possède une racine dans $\mathbb{F}_{2^4}$ qui est une extension de degré 2 de $\mathbb{F}_4$; on en déduit donc que sur $\mathbb{F}_4$ il se factorise en un produit de 2 polynômes irréductibles de degré 2.

(iii) Les 3 polynômes de degré 4, irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$ fournissent 6 polynômes de $\mathbb{F}_4[X]$ irréductibles de degré 2 ; ceux-ci sont distincts deux à deux car les 3 polynômes de degré 4 du départ sont premiers deux à deux dans $\mathbb{F}_2$ et donc dans $\mathbb{F}_4$.

Par ailleurs étant donné un polynôme de $\mathbb{F}_4[X]$ irréductible de degré 2, en le multipliant par son conjugué par l'unique élément non trivial du groupe de Galois de $\mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2$, qui échange j et j^2 avec les notations précédentes, on obtient un polynôme de degré 4 à coefficient dans $\mathbb{F}_2$, car les coefficients sont invariants par le groupe de Galois, et irréductible.

(iv) On note $0,1,j,j^2$ les éléments de $\mathbb{F}_4$ avec $1+j+j^2=0$. Les polynômes de degré 1 sont $X, X-1, X-j, X-j^2$ de produit X^4-X. En ce qui concerne le degré 2, X^4+X+1, $X^4+X^3+X^2+X+1$ et X^4+X^3+1 doivent s'écrire comme le produit de 2 polynôme irréductible de degré sur $\mathbb{F}_4$. On trouve alors $X^4+X+1 = (X^2+X+j)(X^2+X+j^2)$, $X^4+X^3+1 = (X^2+jX+j)(X^2+j^2X+j^2)$ et $X^4+X^3+X^2+X+1 = (X^2+jX+1)(X^2+j^2X+1)$.

1.4 (a) Soit d divisant n et $P \in A(d,q)$. Soit alors $K = \mathbb{F}_q[x]$ un corps de rupture de P sur $\mathbb{F}_q$; on a $[K : \mathbb{F}_q] = d$ et $K \simeq \mathbb{F}_{q^d}$ où $\mathbb{F}_{q^d}$ est **le** corps de décomposition de $X^{q^d} - X$ dans une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ fixée une fois pour toute. Comme $\mathbb{F}_{q^d}$ est l'ensemble des racines de $X^{q^d} - X$, on a $x^{q^d} = x$ et comme d divise n alors x est racine de $X^{q^n} - X$. Or l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{F}_q[X]$ tels que $Q(x) = 0$ est l'idéal de $\mathbb{F}_q[X]$ engendré par le polynôme irréductible $P(X)$ de sorte que P divise $X^{q^n} - X$.

(b) Soit P un facteur irréductible de $X^{q^n} - X$ de degré d. Soit alors $x \in \bar{\mathbb{F}}_q$ une racine de P qui est aussi une racine de $X^{q^n} - X$ et donc $x \in \mathbb{F}_{q^n}$ et $K = \mathbb{F}_q[x]$ est un sous-corps de $\mathbb{F}_{q^n}$ de degré d. Le théorème de la base télescopique on a $n = [\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_q] = [\mathbb{F}_{q^n} : K][K : \mathbb{F}_q]$ soit donc d divise n.

(c) Les racines de $X^{q^n} - X$ sont simples de sorte que les facteurs irréductibles de $X^{q^n} - X$ sont de multiplicité 1. D'après ce qui précède on a donc $X^{q^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in A(d,q)} P$ soit $q^n = \sum_{d|n} dI(d,q)$. La formule d'inversion de Möebius donne alors $I(n,q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) q^d$. où μ est la fonction de Möebius.

(d) On pose $nI(n,q) = q^n + \alpha_n$ avec $|\alpha_n| \leq \sum_{d=1}^{[n/2]} q^d \leq q^{n/2}/(q-1)$ qui est donc négligeable devant q^n d'où l'équivalent $I(n,q) \sim \frac{q^n}{n}$. En outre on a facilement $r_n < q^n$ et donc $I(n,q) > 0$ et donc $I(n,q) \geq 1$ de sorte qu'il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_q$.

1.5 (1) On écrit la table des carrés de $\mathbb{F}_5$, soit

x	0	1	2	-2	-1
x^2	0	1	-1	-1	1

et on remarque que 2 n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_5$.

On vérifie rapidement que pour $P(x) := X^2 + X + 1$, $P(0)$, $P(\pm 1)$ et $P(\pm 2)$ ne sont pas nuls de sorte que P n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_5$, étant de degré 2 il y est donc irréductible.

(3) Le corps $\mathbb{F}_5[X]/(P(X))$ est de cardinal 25 et donc isomorphe à $\mathbb{F}_{25}$ qui est un corps de décomposition de $X^{25} - X$. Par ailleurs la classe x de X dans $\mathbb{F}_5[X]/(P(X))$ vérifie $P(x) = 0$ de sorte que x est une racine de P qui étant de degré 2, y est alors totalement décomposé. On en déduit alors que P admet deux racines dans $\mathbb{F}_{25}$.

(3) Un isomorphisme $f : \mathbb{F}_5[X]/(X^2 + X + 1) \simeq \mathbb{F}_{25}$ étant fixée, l'image $\alpha \in \mathbb{F}_{25}$ de X par f vérifie alors $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ et est donc une racine de $X^2 + X + 1$. Le sous-espace vectoriel sur $\mathbb{F}_5$ de $\mathbb{F}_{25}$ engendré par 1 et α est de dimension 2 car $\alpha \notin \mathbb{F}_5$ et est donc égal à $\mathbb{F}_{25}$ de sorte que tout élément $\beta \in \mathbb{F}_{25}$ s'écrit sous la forme $a\alpha + b$ avec $a, b \in \mathbb{F}_5$.

(4) On vérifie rapidement que P n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_5$. Soit alors $\beta = a\alpha + b \in \mathbb{F}_{25}$; on a $\beta^5 = a^5\alpha^5 + b^5 = a\alpha^5 + b$. Or on a $\alpha^2 = -\alpha - 1$ soit $\alpha^4 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = \alpha$ et donc $\alpha^5 = \alpha^2 = -\alpha - 1$. Ainsi $\beta^5 - \beta + 1 = \alpha(-a - a) + (b - b - a + 1) \neq 0$ car $\alpha \notin \mathbb{F}_5$ soit P n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_{25}$ de sorte qu'il est irréductible sur $\mathbb{F}_5$.

Par ailleurs, P en tant que polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ unitaire, y est irréductible. En effet une factorisation $P = QR$ dans $\mathbb{Z}[X]$ induit par réduction modulo 5 une factorisation $\bar{P} = \bar{Q}\bar{R}$ dans $\mathbb{F}_5[X]$. Comme P est unitaire, Q et R le sont aussi, de sorte que $\deg Q = \deg \bar{Q}$ et $\deg R = \deg \bar{R}$; $\bar{P}$ étant irréductible, on en déduit que $\bar{Q}$, ou $\bar{R}$, est un polynôme constant donc, étant unitaire, égal à $\bar{1}$ et donc Q, ou R, est le polynôme constant égal à 1. Ainsi P est irréductible sur $\mathbb{Z}$ et donc irréductible sur $\mathbb{Q}$ d'après le lemme de Gauss.

1.6 (a) on vérifie rapidement que Q n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_3$. On cherche alors ses racines dans $\mathbb{F}_9$. Pour $a \in \mathbb{F}_9$, on a $a^9 = a$ de sorte que $a^9 - a + 1 = 1$ et donc Q n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_9$.

(b) Afin de calculer dans $\mathbb{F}_{27}$, on commence par le décrire concrètement : on vérifie aisément que $X^3 - X - 1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_3$ et est donc irréductible sur $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_{27} \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^3 - X - 1)$.

(c) Soit alors $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ tel que $\alpha^3 = \alpha + 1$. On a alors $\alpha^9 = \alpha^3 + 1 = \alpha + 2 = \alpha - 1$ et donc finalement α est une racine de Q dans $\mathbb{F}_{27}$ de sorte que Q possède un facteur irréductible de degré 3 sur $\mathbb{F}_3$, à savoir $X^3 - X - 1$, soit $X^9 - X + 1 = (X^3 - X - 1)(X^6 + X^4 + X^3 + X^2 - X - 1)$.

(d) Cherchons de manière générale toutes les racines dans $\mathbb{F}_{27}$; un élément quelconque s'écrit sous la forme $x = a\alpha^2 + b\alpha + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{F}_3$. On a alors $x^9 = a\alpha^{18} + b\alpha^9 + c$ avec $\alpha^9 = \alpha - 1$ et donc $\alpha^{18} = \alpha^2 + \alpha + 1$ de sorte que $x^9 - x + 1 = a\alpha + a - b + 1$ ce qui impose $a = 0$ et $b = 1$ soit $x = \alpha, \alpha + 1, \alpha - 1$.

(e) On en déduit alors que $X^6 + X^4 + X^3 + X^2 - X - 1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_{27}$ comme il n'en avait pas non plus dans $\mathbb{F}_9$, il est donc irréductible.

1.7 Si P est réductible sur $\mathbb{F}_p$, il l'est sur toute extension $\mathbb{F}_{p^m}$. Supposons donc P irréductible sur $\mathbb{F}_p$ de sorte que toutes les racines de P, vues dans $\bar{\mathbb{F}}_p$, sont dans $\mathbb{F}_{p^n}$ et aucune n'appartient à un sous-corps strict. On regarde alors

P comme un polynôme dans $\mathbb{F}_{p^m}[X]$ dont on se demande s'il est encore irréductible. Il faut regarder s'il possède ou non des racines dans $\mathbb{F}_{p^{mr}}$ pour $r \leq n/2$ et donc si $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^{mr}}$, soit n divise mr ce qui est possible si et seulement si n et m ne sont pas premiers entre eux. En outre en notant $d = n \wedge m$, les facteurs irréductibles sont alors de degré r un multiple de n/d.

Pour $n = 5$, la décomposition en facteur irréductible donne en prenant les degrés les décompositions suivantes de $5 : 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$. Si on veut être sur d'avoir toutes les racines (resp. au moins une racine) il faut donc se placer dans $\mathbb{F}_{p^{60}}$ (resp. $\mathbb{F}_{p^{10}}$) avec $60 = 5.4.3$ (resp. $10 + 5.2$).

1.8 (1) On considère le morphisme de Frobenius

$$\mathrm{Fr}_q : x \in \mathbb{F}_{q^n} \longmapsto x^q \in \mathbb{F}_{q^n}$$

dont on vérifie aisément que c'est un morphisme de corps car $\mathrm{Fr}_q(x+y) = (x+y)^q = x^q + y^q$ et $\mathrm{Fr}_q(xy) = x^q y^q$, qui laisse le corps $\mathbb{F}_q$ invariant car pour tout $x \in \mathbb{F}_q$ on a $x^q = x$. En outre il est immédiat que le groupe engendré par Fr_q est d'ordre n de sorte que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ est de cardinal supérieur ou égal à n. Pour montrer l'inégalité inverse, soit χ un générateur de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ et soit μ_χ son polynôme minimal unitaire sur $\mathbb{F}_q$; on a alors $\mathbb{F}_{q^n} \simeq \mathbb{F}_q[X]/(\mu_\chi(X))$ de sorte que μ_χ est irréductible de degré n. Ainsi tout élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ est déterminée par $\sigma(\chi)$ qui doit être une racine de μ_χ ce qui donne au plus n choix. On en déduit ainsi $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q) =< \mathrm{Fr}_q > \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Un sous-groupe H de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de la forme $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ pour r un diviseur de n, un générateur étant n/r. On considère alors le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ engendré par $\mathrm{Fr}_q^{n/r}$; le sous-corps fixé est alors l'ensemble des éléments x de $\mathbb{F}_{q^n}$ tels que $x^{q^{n/r}} = x$ ce qui correspond au corps $\mathbb{F}_{q^{n/r}} \subset \mathbb{F}_{q^n}$. D'après l'exercice précédent, l'application de la théorie de Galois est bien une bijection.

(2) Le corps L est isomorphe à $\mathbb{F}_{p^r}$ pour un certain r et $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ engendré par Fr_p. En outre on a $L = \mathbb{F}_p[\chi]$ pour $\chi \in L$ une racine primitive n-ième de l'unité. Ainsi un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p)$ est déterminé par $\sigma(\chi)$ qui doit être une racine primitive n-ième de l'unité et donc de la forme χ^k pour $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On obtient ainsi une application injective naturelle

$$\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p) \longmapsto k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

l'image étant le groupe engendré par la classe de p. Ainsi r est l'ordre de p dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Soit $\bar{\Phi}_n(X) = P_1 \cdots P_s$ la décomposition en irréductibles de la réduction modulo p de Φ_n. Soit χ une racine de P_1 de sorte que $L = \mathbb{F}_p[\chi]$ et donc P_1 est le polynôme minimal de χ sur $\mathbb{F}_p$ et donc $\deg P_1 = [L : \mathbb{F}_p]$. En conclusion tous les P_i sont de même degré $[L : \mathbb{F}_p]$ et donc $s = \frac{\psi(n)}{[L:\mathbb{F}_p]}$ où l'on rappelle que $[L : \mathbb{F}_p]$ est l'ordre de p dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Ainsi $p \equiv 1 \mod n$ est équivalent à demander que $\bar{\Phi}_n$ est totalement décomposé sur $\mathbb{F}_p$ ce qui on vient de le voir, est équivalent à demander que $\bar{\Phi}_n$ a une racine dans $\mathbb{F}_p$. Soit donc p premier divisant $\Phi_n(N!) \equiv 1 \mod N!$ soit $p > N$ et $p \equiv 1 \mod n$ car $\bar{\Phi}_n$ a pour racine $\bar{N}!$. On vient donc de montrer une version faible du théorème de progression arithmétique dont l'énoncé fort est que pour tout a premier avec n, il existe une infinité de premiers congrus à a modulo n, ceux-ci se répartissant de manière uniforme en un sens que l'on ne précise pas ici, sur les $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

1.9 (i) Le polynôme $X^4 + 1$ est le huitième polynôme cyclotomique Φ_8 qui est irréductible. On peut aussi le voir directement en considérant $\Phi_8(X + 1)$ qui est un polynôme d'Eisenstein pour 2.

Modulo 2, on a $X^4 + 1 = (X + 1)^4$ et pour $p \neq 2$, $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ est cyclique d'ordre $p^2 - 1$ qui est divisible par 8. Soit alors $x \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$ d'ordre 8, on a $x^8 = (x^4)^2 = 1$ et $x^4 \neq 1$ soit $x^4 = -1$ de sorte que Φ_8 a une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$ et donc Φ_8 est réductible modulo p.

(ii) Avec les hypothèses de l'énoncé $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ n'est pas cyclique. D'après loc. cit., la réduction modulo p de ψ_n est un produit de polynômes irréductibles qui ont tous le même degré à savoir l'ordre de p dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Ainsi ψ_n est irréductible modulo p si et seulement si p engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ce qui ne se peut pas si ce dernier groupe n'est pas cyclique.

Remarque : On a ainsi une famille d'exemples de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$ et réductible modulo tout premier p.

1.10 modulo 2, on a $\bar{P} = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)^2$, modulo 3, $\bar{P} = X^4 + 2X^3 + 2X + 2 = (X^2 + 1)(X^2 + 2X + 2)$ et modulo 5, $\bar{P} = X^4 + X^2 + 1$ qui n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_5$; regardons dans $\mathbb{F}_{25}$. Comme $\mathbb{F}_{25}^\times \simeq \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, soit x

un élément d'ordre 6 : $x^6 = 1$ avec $x^2 \neq 1$ et $x^3 \neq 1$. Soit $y = x^2$ de sorte que $y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1) = 0$ et $y \neq 1$ soit $y^2 + y + 1 = 0$ et donc x est une racine de $\bar{P} = (X^2+X+1)(X^2+4X+1)$.

Sur $\mathbb{Z}$, P n'a pas de racine car sinon il en aurait modulo 2 ce qui n'est pas. Si P était réductible, on aurait alors $P(X) = (X^2+aX+b)(X^2+cX+d)$ et donc

$$\begin{cases} a+c = 10 \\ b+d+ac = 21 \\ ad+bc = -10 \\ bd = 11 \end{cases}$$

Ainsi on obtient soit $\{b,d\} = \{1,11\}$ et donc $ac = 9$ et $\{a,c\} = \{-1,-9\}$ car $a+c = -10$, et $ad+bc \neq -10$; soit $\{b,d\} = \{-1,-11\}$ et $ac = 33$ et $a+c \neq -10$. Ainsi P est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

1.11 (i) Si $x = a/b \in \mathbb{Q}$ avec $(a,b) = 1$, est une racine de P alors comme P est unitaire on a b divise 1 et donc $x \in \mathbb{Z}$. En outre modulo 2, $x^{l+1} - x + 1 \equiv 1 \mod 2$ de sorte que P n'a pas de racine modulo 2 et donc n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

(ii) Modulo p, on a $\bar{P} = X(X-1)\bar{\Phi}_l$; il suffit donc de prouver que $\bar{\Phi}_l$ est irréductible ce qui découle d'un exercice précédent car p engendre $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$. On peut en donner une preuve directe en considérant pour $1 \leq n < (l+1)/2$, $x \in \mathbb{F}_{p^n}$ une racine de $\bar{\Phi}_l$. On a $x \neq 1$ car $\bar{\Phi}_l(1) = \bar{l} \neq 0$ et $x^{l+1} = x$ avec l premier implique que l est l'ordre de x dans $\mathbb{F}_{p^n}^\times$ et donc l divise $p^n - 1$ soit $p^n \equiv 1 \mod l$. Or comme p engendre $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$, on en déduit que n est un multiple de $l-1$ ce qui contredit le fait que $n < (l+1)/2$.

(iii) Modulo 2, $\bar{P}$ admet donc un diviseur de degré 2 qui est donc irréductible car $\bar{P}$ n'a pas de racine. Or sur $\mathbb{F}_2$, il y a un unique polynôme irréductible de degré 2, à savoir X^2+X+1. Ainsi sur $\mathbb{F}_4$, on doit avoir $P(j) = 0$ où j est un générateur de $\mathbb{F}_4^\times$, soit $j^{l+1} = j+1 = j^2$ et donc $l+1 \equiv 2 \mod 3$ ce qui n'est pas.

1.12 Le schéma de démonstration sera toujours le même : on raisonne par l'absurde en supposant la finitude de l'ensemble considéré et on construit un entier N qui permet d'aboutir à une contradiction. On note n le plus grand élément de l'ensemble supposé fini. Toute la difficulté revient donc à construire N en fonction de n et de l'ensemble considéré :

(a) $N = n! - 1$; si p divise N alors $p > n$ et donc $p \equiv 1 \mod 4$ de sorte que $N \equiv 1 \mod 4$ ce qui n'est pas.

(b) $N = (n!)^2 + 1$; si p premier divise N alors -1 est un carré modulo p soit $p \equiv 1 \mod 4$ et donc par hypothèse $p \leq n$ soit p divise $n!$ et donc $p|N - (n!)^2 = 1$ d'où la contradiction .

(c) si p divise $a^{2^{m-1}} + b^{2^{m-1}}$ avec p premier avec a, alors $\frac{a}{b}$ est d'ordre divisant 2^m et d'ordre distinct de 2^{m-1} ; il est donc d'ordre 2^m. Or l'ordre de tout élément divise le cardinal du groupe soit $p \equiv 1 \mod 2^m$. Soit alors $N = (n!)^{2^{m-1}} + 1$; tout diviseur p premier de N est congru à $1 mod 2^n$ et supérieur à n d'où la contradiction.

(d) $p \equiv 5 \mod 6$ est équivalent à $p \equiv 1 \mod 2$ et $p \equiv 2 \mod 3$ soit $p > 2$ et $p \equiv 2 \mod 3$. Soit $N = n! - 1$; pour p premier divisant N, on a $p > n$ et donc $p \equiv 1 \mod 3$ de sorte que $N \equiv 1 \mod 3$ ce qui n'est pas.

(e) $N = 3^2 5^2 7^2 11^2 \cdots n^2 + 2^2$; N est visiblement impair. Soit alors p premier divisant N, p ne divise pas 4, de sorte que $p \equiv 1 \mod 4$, soit $p \equiv 1, 5 \mod 8$. A nouveau $p \equiv 5 \mod 8$ est exclu car sinon p diviserait $4 = N - 3^2 \cdots n^2$. On en déduit donc $N \equiv 1 \mod 8$. Or si p est premier impair on a $p \equiv 1, 3, 5, 7 \mod 8$ et on vérifie aisément que p^2 est alors congru à 1 modulo 8 et donc $N \equiv 5 \mod 8$, d'où la contradiction.

(f) $p \equiv 1 \mod 6$ est équivalent à $p > 2$ et $p \equiv 1 \mod 3$. Or si p divise $a^2 + 3b^2$ et p premier avec b, alors -3 est un carré modulo p et donc $(\frac{-3}{p}) = 1 = (-1)^{(p-1)(3-1)/4}(\frac{p}{3})(\frac{-1}{p}) = (\frac{p}{3})$ et donc -3 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1 \mod 3$. Soit alors $N = 3(n!)^2 + 1$; tout diviseur premier de N est alors congru à 1 modulo 3 et supérieur à n d'où la contradiction.

(g) si p divise $a^2 - 3b^2$ et p premier avec b alors 3 est un carré modulo p. Or on a $(\frac{3}{p}) = (\frac{p}{3})(-1)^{(p-1)/2}$ et donc 3 est un carré modulo p dans les deux situations suivantes :

- $(\frac{p}{3}) = (-1)^{(p-1)/2} = 1$ soit $p \equiv 1 \mod 3$ et $p \equiv 1 \mod 4$ soit $p \equiv 1 \mod 12$;
- $(\frac{p}{3}) = (-1)^{(p-1)/2} = -1$ soit $p \equiv -1 \mod 3$ et $p \equiv -1 \mod 4$ soit $p \equiv -1 \mod 12$;

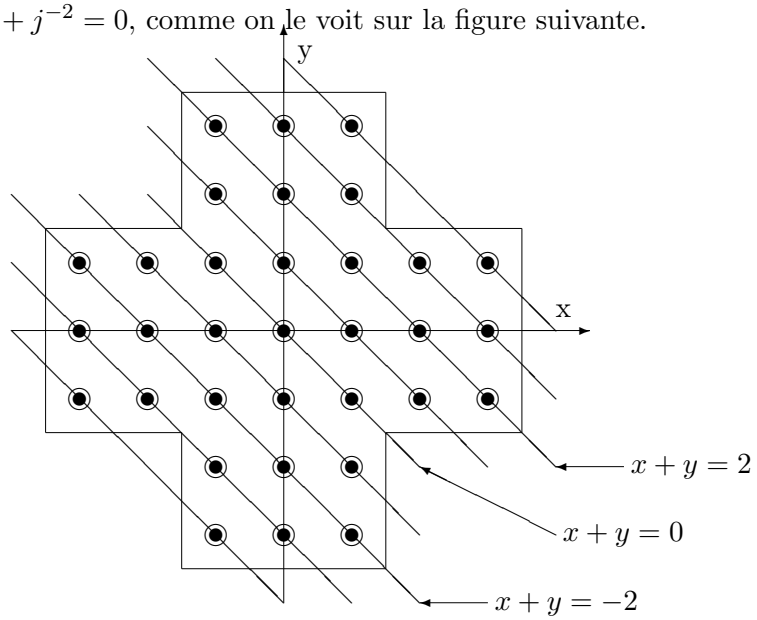
Soit alors $N = 3(n!)^2 - 1$; tout diviseur premier p de N est alors congru à ± 1 modulo 12 et supérieur à n de sorte que par hypothèse, $p \equiv 1 \mod 12$. On en déduit alors que $N \equiv 1 \mod 12$ ce qui n'est pas car $N \equiv -1 \mod 12$.

(h) pour p premier $p \equiv -1 \mod 10$ si et seulement si $p \equiv -1 \mod 5$. Or si p divise $a^2 - 5b^2$ avec p premier avec b alors $(\frac{5}{p}) = 1 = (\frac{p}{5})$ et donc $p \equiv \pm 1 \mod 5$. Soit alors $N = 5(n!)^2 - 1$; tout diviseur premier p de N est

strictement supérieur à n et congru à $\pm 1 \mod 5$. Par hypothèse il est donc congru à 1 modulo 5 et donc N aussi ce qui n'est pas.

1.13 (1) Prenons par exemple le mouvement élémentaire de la figure (1.13). Dans le plateau de gauche on a $\alpha = j^{x_0+y_0}(1+j)$ (resp. $\beta = j^{x_0-y_0}(1+j)$) alors que dans le plateau de droite on a $\alpha = j^{x_0+y_0}.j^2$ (resp. $\beta = j^{x_0-y_0}j^2$), avec $(x_0, y_0) = (-2, -1)$. Le résultat découle alors de l'égalité $1 + j = j^2$ dans $\mathbb{F}_4$ (on rappelle que dans $\mathbb{F}_4$, on a $1 = -1$). Les autres mouvements élémentaires se traitent de manière strictement identique.

(2) Commençons par calculer (α, β) pour la configuration où tous les réceptacles contiennent une bille. La configuration étant invariante par la réflexion d'axe (Oy), on a $\alpha = \beta$, calculons donc α. Pour cela on propose de sommer sur les droites $x + y$ constantes, de sorte que ne contribuent que les droites où il y a un nombre impair de billes, ce qui donne $\alpha = j^0 + j^2 + j^{-2} = 0$, comme on le voit sur la figure suivante.



Notons alors avec un indice *tot* (resp. $\mathcal{C}_0$, resp. 0) ce qui fait référence à la configuration où tous les réceptacles sont remplis (resp. tous sauf en (x_0, y_0), resp aucun sauf en (x_0, y_0)). On a ainsi $(\alpha_{tot}, \beta_{tot}) = (\alpha_{\mathcal{C}_0}, \beta_{\mathcal{C}_0}) + (\alpha_0, \beta_0) = (0, 0)$ de sorte que $(\alpha_{\mathcal{C}_0}, \beta_{\mathcal{C}_0}) = (\alpha_0, \beta_0)$.

(3) On calcule comme précédemment les invariant (α, β) ce qui donne $(0, 0)$ qui ne peut pas être de la forme $(j^{x_0+y_0}, j^{x_0-y_0})$.

1.14 Soit $p_1, \cdots, p_n$ tels que pour tout $p \neq p_i$, n est un carré modulo p. Supposons n sans facteur carré et distinct de $\pm 1, \pm 2$. On écrit $n = hl_1 \cdots l_k$ avec $h \in \{\pm 1, \pm 2\}$ et où les l_i sont premiers impairs distincts ($k \geq 1$). Il existe un entier naturel a tel que :

$$a \equiv 1 \mod 8p_1 \cdots p_n l_1 \cdots l_{k-1} \text{ et } a \equiv r \mod l_k$$

D'après la loi de réciprocité quadratique on a

$$(\frac{n}{a}) = (\frac{l_1 \cdots l_k}{a}) = \prod_i (\frac{a}{l_i}) = (\frac{1}{l_1}) \cdots (\frac{1}{l_{k-1}})(\frac{r}{l_k}) = -1$$

de sorte que a a un diviseur premier p distinct des p_i tel que $(\frac{n}{p}) = -1$, d'où la contradiction.

2.1 Notons $b_1, \cdots, b_{12}$ le nombre réceptionné et supposons qu'il existe $1 \leq i \leq 12$ tel que $b_i \neq a_i$ et $b_k = a_k$. Si $1 \leq i \leq 10$ alors

$$b_{11} - \sum_{k=1}^{10} b_k = a_i - b_i \not\equiv 0 \mod 11, \qquad b_{12} - \sum_{k=1}^{10} k b_k = i(a_i - b_i) \not\equiv 0 \mod 11$$

et donc les tests de b_{11} et b_{12} sont erronés ce qui permet de savoir si l'erreur s'est glissé dans les 10 premiers chiffres ou dans les deux clés. Si c'est dans les clés, un seul de ces tests est faux et on le corrige sinon comme 11 est premier $a_i - b_i \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$ de sorte qu'en divisant la deuxième ligne par la première on calcule i puis $a_i - b_i$.

2.2

2.3 (a) Le polynôme $P(X)$ n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$, ni dans $\mathbb{F}_4$ car $P(j) = j$ et $P(j^2) = j^2$. Par ailleurs un élément α non nul de $\mathbb{F}_8$ vérifie $\alpha^7 = 1$ et donc $P(\alpha) = \alpha^3 + 1$ qui est non nul car dans $\bar{\mathbb{F}}_2$ seuls $j, j^2 \in \mathbb{F}_4$ vérifient $X^3 + 1 = 0$. Ainsi $\mathbb{F}_{2^7} \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^7 + X^3 + 1)$ et l'ordre de la classe α de X est un diviseur de 127 qui est premier de sorte que α est un générateur du groupe multiplicatif.

(b) Il s'agit d'un code de Hamming ; si $\sum_{i=0}^{126} a'_i \alpha^i = 0$ alors le mot reçu appartient au code et s'il y a au plus une erreur, il s'agit du mot initial. Sinon k est l'unique entier entre 0 et 126 tel que $\alpha^k = \sum_{i=0}^{126} a'_i \alpha^i$.
Remarque : on se sert du bit de parité pour tester s'il y a deux erreurs auquel cas on demande à renvoyer le message. Au final on peut corriger une erreur et détecter s'il y a deux erreurs.

2.4 (a) On écrit $P(X) = \frac{X^9+1}{X+1} + X(X^2+1)$; celui-ci n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$ ni dans $\mathbb{F}_4$ puisque $j^9 + 1 = 0$ et $j^3 + j = 1 \neq 0$. Dans $\mathbb{F}_8$, on a $X^9 = X^2$ et donc $P(X) = X + 1 + X^3 + X = X^3 + 1$ qui n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_8$. Si $\alpha \in \mathbb{F}_{16} - \mathbb{F}_4$, est tel que $P(\alpha) = 0$ alors $\alpha^9 + 1 = \alpha(\alpha+1)^3$ et donc en prenant la puissance cinquième et en utilisant $(\alpha+1)^{15} = 1$ car $\alpha \neq 1$, on obtient

$$(\alpha^9 + 1)^5 = \alpha^{45} + \alpha^{36} + \alpha^9 + 1 = \alpha^5$$

ce qui donne $\alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^5 = 0$ soit $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$. Ainsi en réinjectant l'égalité $\alpha + 1 = \alpha^4$ on obtient $\alpha^9 + 1 = \alpha^1 3$ ce qui après multiplication par α^3 donne $\alpha^{12} = \alpha^3 + \alpha$ avec

$$\alpha^{12} = (\alpha^4)^3 = (\alpha+1)^3 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$$

et donc $\alpha = \alpha^{12} + \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1$ ce qui donne $\alpha^2 = 1$ et comme 2 ne divise pas 15, on obtient α d'ordre $1 = 2 \wedge 15$ soit $\alpha = 1$ qui ne convient pas.

(b-i) Il s'agit d'un code de Reed-Solomon qui est donc 2-correcteur. Si on suppose qu'il y a au plus deux erreurs, on teste si $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ et α^4 sont racines du polynôme $\sum_{i=0}^{254} b_i X^i$: si oui alors il n'y a pas eu d'erreurs sinon le bit de parité permet de savoir s'il y a eu 1 ou 2 erreurs et on calcule les α^k puis les $\alpha^i + \alpha^j$ pour savoir quels bits corriger.

(b-ii) Notons i_1, i_2, i_3, i_4 les indices des bits en question ; il s'agit alors de trouver quelle somme $\sum_{k=1}^{4} \epsilon_k X^{i_k} = 0$ avec $\epsilon_i = 0, 1$ prend en α^j pour $j = 1, 2, 3, 4$, la valeur $\sum_{i=0}^{254} b_i X^i$ où pour $k = 1, \cdots, 4$ on a posé $b_{i_k} = 0$. Si on avait 2 quadruplets de ϵ_k distincts, alors par soustraction, on aurait un polynôme formé d'au plus 4 monômes ayant α^j pour $j = 1, \cdots, 4$ comme racines et donc multiple de $(X+\alpha)(X+\alpha^2)(X+\alpha^3)(X+\alpha^4) = X^4 + \beta_1 X^3 + \beta_2 X^2 + \beta_3 X + \beta_4$ avec $\beta_j \neq 0$ pour tout $j = 1, \cdots, 4$ de sorte que le polynôme a forcément 5 termes non nuls, d'où la contradiction.

(b-iii) Si moins de 16 sillons sont illisibles, d'après (ii) on peut alors reconstituer le mot qui rappelons le est constitué de lettres de 8 bits...