

## Préambule

Dans tout le texte  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$  désigne l'ensemble des matrices à  $n$  lignes,  $m$  colonnes et à coefficients complexes; on notera  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ . Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , le spectre  $\text{Sp}(A)$  de  $A$  est le sous-ensemble de  $\mathbf{C}$  constitué des valeurs propres de  $A$ . Si  $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ , on notera  $A^* = {}^t \bar{A} = [\bar{a}_{j,i}]_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$  le conjugué de la transposée de  $A$ . On identifiera les vecteurs de  $\mathbf{C}^n$  avec les éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ . On utilisera la notation  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  pour désigner la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  dont les coefficients diagonaux sont les  $\lambda_i$ .

L'espace vectoriel  $\mathbf{C}^n$  est muni du produit scalaire hermitien,

$$(x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mapsto \langle x|y \rangle = x^*y \in \mathbf{C}$$

et pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbf{C}^n$ , on note  $F^\perp$  l'orthogonal de  $F$  dont on rappelle qu'il est de dimension

$$\dim F^\perp = n - \dim F.$$

Étant donnés des vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  de  $\mathbf{C}^n$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}^n$  qu'ils engendrent sera noté  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ . Dans le problème nous aurons besoin du vocabulaire suivant :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est dite

- *hermitienne* si  $A^* = A$ ;
- *anti-hermitienne* si  $A^* = -A$ ;
- *unitaire* si  $AA^* = I_n$ .

Aucune connaissance spécifique sur ces matrices n'est requise à l'exception du théorème de réduction suivant que l'on *admet*; quand son invocation sera nécessaire pour répondre à la question posée, nous le *signalerons systématiquement dans le texte*.

### **Théorème T.**

- *Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  une matrice hermitienne. Il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $U^*HU$  est diagonale réelle.*
- *Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  une matrice anti-hermitienne. Il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $U^*HU$  est diagonale imaginaire pure.*

Pour  $X$  et  $Y$  des parties de  $\mathbf{C}$ ,  $X + Y$  désigne la partie de  $\mathbf{C}$  dont les éléments sont ceux qui peuvent s'écrire sous la forme  $x + y$  avec  $x \in X$  et  $y \in Y$  :

$$X + Y = \{x + y \in \mathbf{C} / x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

De même  $XY = \{xy \in \mathbf{C} / x \in X \text{ et } y \in Y\}$ . On notera enfin

$$\mathbf{P} = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) > 0\},$$

où  $\text{Re}(z)$  (resp.  $\text{Im}(z)$ ) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) du nombre complexe  $z$ .

## Première partie

1) Pour tout nombre réel  $\alpha$ , on définit les matrices

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 1 \\ \alpha(1 - \alpha) - 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } B(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 1 \\ -\alpha(1 + \alpha) - 1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Calculez  $\text{Sp}(A(\alpha))$ ,  $\text{Sp}(B(\alpha))$  et  $\text{Sp}(A(\alpha) + B(\alpha))$ .

- 2) En vous aidant des matrices  $A(\alpha)$  et  $B(\alpha)$ , justifiez le fait que l'on ne peut pas en général, borner  $\text{Sp}(A + B)$  en fonction seulement de  $\text{Sp}(A)$  et  $\text{Sp}(B)$ .
- 3) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  hermitienne; d'après le théorème  $T$ ,  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormée  $(v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs de  $\mathbf{C}^n$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $v_i$  et on suppose que celles-ci sont ordonnées par ordre croissant, c'est à dire

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $\mathbf{C}^n$ .

3-a) Montrez que pour tout  $F \in \mathcal{E}_k$ , la dimension de  $F \cap \text{Vect}(v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$  est supérieure ou égale à 1.

3-b) Pour  $F \in \mathcal{E}_k$ , montrez qu'il existe un vecteur non nul  $x \in F$  tel que  $\frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \lambda_k$ .

3-c) Donnez un sous-espace vectoriel  $F$  appartenant à  $\mathcal{E}_k$  tel que  $\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k$ .

3-d) Déduisez de ce qui précède que pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

3-e) Soient  $A, B$  des matrices hermitiennes de valeurs propres respectives

$$\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A), \quad \lambda_1(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B).$$

On classe de même les valeurs propres  $\lambda_1(A + B) \leq \dots \leq \lambda_n(A + B)$  de  $A + B$ . Montrez que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

## Deuxième partie

4) Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on note  $\mathcal{V}(A)$  le sous-ensemble de  $\mathbf{C}$  défini par

$$\mathcal{V}(A) = \left\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} \in \mathbf{C} / x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

- 4-a) Pour  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , montrez que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{i,i} \in \mathcal{V}(A)$ .
- 4-b) On note  $H(A) = \frac{A+A^*}{2}$ . Montrez que  $\mathcal{V}(H(A)) = \text{Re}(\mathcal{V}(A))$ .
- 4-c) Montrez que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on a  $\mathcal{V}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$ .
- 4-d) Montrez que pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on a  $\text{Sp}(A) \subset \mathcal{V}(A)$ .
- 4-e) Montrez que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on a  $\text{Sp}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$ .
- 4-f) Montrez que pour  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  des nombres réels,

$$\mathcal{V}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = [\lambda_1, \lambda_n].$$

- 4-g) Montrez que si  $U$  est unitaire alors  $\mathcal{V}(U^*AU) = \mathcal{V}(A)$ .
- 4-h) *En utilisant le théorème T*, déterminez  $\mathcal{V}(A)$  dans le cas où  $A$  est une matrice hermitienne.
- 4-i) Montrez que pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $\mathcal{V}(A)$  est une partie compacte de  $\mathbf{C}$ .
- 5) On rappelle qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est dite *nilpotente* s'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $A^m$  est la matrice nulle.
- 5-a) Montrez, en utilisant par exemple le théorème de Cayley-Hamilton, que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est nilpotente si et seulement si  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .
- 5-b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telle que  $\mathcal{V}(A) = \{0\}$ .
- i) Montrez que  $A$  est nilpotente.
  - ii) Montrez que  $\text{Ker } A = (\text{Im } A)^\perp$ .
  - iii) Déduisez des questions précédentes que  $A$  est la matrice nulle.

## Troisième partie

- 6) Soit  $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note

$$L_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|, \quad C_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{j,i}|.$$

- 6-a) On suppose que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $|a_{i,i}| > L_i(A)$ . Montrez que  $A$  est inversible.
- 6-b) Déduisez de la question précédente que  $\text{Sp}(A) \subset G(A) \cap G({}^tA)$  où

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} / |z - a_{i,i}| \leq L_i(A)\}.$$

- 7) Un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbf{C}$  est dit *convexe* s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \quad \forall t \in [0, 1], \quad tx_1 + (1-t)x_2 \in X.$$

- 7-a) Montrez que l'intersection d'une famille quelconque de sous-ensembles convexes de  $\mathbf{C}$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathbf{C}$ .
- 7-b) Montrez que pour toute partie  $X$  de  $\mathbf{C}$ , il existe un plus petit ensemble convexe contenant  $X$  : on le note  $\text{Conv}(X)$  et on l'appelle l'*enveloppe convexe* de  $X$ .
- 7-c) Montrez que  $\text{Conv}(X)$  est égal à l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i / n \geq 1, \{x_1, \dots, x_n\} \subset X, \forall i \in \{1, \dots, n\}, t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}.$$

- 7-d) Soit  $K$  un convexe fermé de  $\mathbf{C}$  qui ne contient pas 0. Montrez qu'il existe un unique  $z_0 \in K$  tel que  $|z_0| = \min_{z \in K} |z|$ .
- 7-e) Construisez une droite du plan complexe d'équation  $f(z) = 0$  de la forme  $f(z) = a\text{Re}(z) + b\text{Im}(z) + c$  où  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$  et telle que  $c < 0$  et  $f(z) > 0$  pour tout  $z \in K$ .
- 7-f) Montrez qu'un convexe fermé  $K$  de  $\mathbf{C}$  ne contient pas 0 si et seulement s'il existe un réel  $\theta$  tel que  $e^{i\theta}K$  soit contenu dans  $\mathbf{P}$ .
- 8) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on pose  $E_i(A) = \frac{L_i(A) + C_i(A)}{2}$  ainsi que

$$G_{\mathcal{V}}(A) = \text{Conv} \left( \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z - a_{i,i}| \leq E_i(A)\} \right);$$

dont on admet qu'il est fermé.

- 8-a) Montrez que  $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$ , si et seulement s'il existe un réel  $\theta$  tel que  $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset \mathbf{P}$ .
- 8-b) Montrez que  $G_{\mathcal{V}}(A) \subset \mathbf{P}$  si et seulement si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\text{Re}(a_{i,i}) > E_i(A)$ .
- 8-c) On suppose que  $G_{\mathcal{V}}(A) \subset \mathbf{P}$  et on rappelle que  $H(A)$  désigne la matrice hermitienne  $\frac{A+A^*}{2}$ . En remarquant que  $L_i(H(A)) \leq E_i(A)$ , montrez que  $\text{Sp}(H(A)) \subset \mathbf{P}$  et déduisez-en que  $\mathcal{V}(A) \subset \mathbf{P}$ .
- 8-d) Montrez que  $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$  implique  $0 \notin \mathcal{V}(A)$ .
- 8-e) Déduisez de ce qui précède que  $\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$ .

## Quatrième partie

Le *rayon spectral* d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est défini par

$$\rho(A) = \max\{|z| \text{ tel que } z \in \text{Sp}(A)\}.$$

D'après la compacité de  $\mathcal{V}(A)$  prouvée à la question 4-i), on définit le *rayon numérique* de  $A$  par

$$r(A) = \max\{|z| \text{ tel que } z \in \mathcal{V}(A)\}.$$

Étant donnée une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbf{C}^n$ , la norme  $\|\|\cdot\|\|$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  subordonnée à  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbf{C}^n$  est définie par la formule suivante :

$$\|\|A\|\| = \sup_{x \in \mathbf{C}^n, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

Pour  $x \in \mathbf{C}^n$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on notera  $x_i$  sa  $i$ -ème coordonnée.

9) Une norme matricielle  $\|\|\cdot\|\|$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est par définition une norme telle que pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on a  $\|\|AB\|\| \leq \|\|A\|\| \cdot \|\|B\|\|$ .

9-a) Montrez qu'une norme subordonnée est une norme matricielle.

9-b) On note  $\|\|\cdot\|\|_2$  la norme subordonnée à la norme  $\|\cdot\|_2$  définie par  $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ . En utilisant le *théorème T*, montrez que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $\|\|A\|\|_2$  est égale à la racine carrée positive de la plus grande des valeurs propres de  $A^*A$ .

9-c) On admet que les normes  $\|\|\cdot\|\|_1$  et  $\|\|\cdot\|\|_\infty$  subordonnées respectivement aux normes  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  et  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$  sont données par les formules

$$\|\|A\|\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad \|\|A\|\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

i) Montrez que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $\rho(A) \leq r(A)$ .

ii) Montrez, en utilisant 8-e), que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,

$$r(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|).$$

iii) Déduisez des questions précédentes que  $\rho(A) \leq r(A) \leq \frac{\|\|A\|\|_1 + \|\|A\|\|_\infty}{2}$ .

10) On note désormais  $r : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}_+$  la fonction qui à  $A$  associe  $r(A)$ .

10-a) Montrez que  $r$  est une norme sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

10-b) Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculez  $\mathcal{V}(A)$ ,  $\mathcal{V}(B)$ ,  $\mathcal{V}(A)\mathcal{V}(B)$  et  $\mathcal{V}(AB)$ . La norme définie par  $r$  est-elle matricielle?

10-c) Montrez que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on a  $r(A) \leq \|\|A\|\|_2$ ; en utilisant le *théorème T* montrez que l'on a égalité si  $A$  est hermitienne ou anti-hermitienne.

10-d) En écrivant  $A = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}$  montrez que  $\|\|A\|\|_2 \leq 2r(A)$ .

10-e) Déduisez de ce qui précède que  $4r$  est une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

10-f) Montrez que pour  $c$  réel strictement positif,  $cr$  est une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  si et seulement si  $c \geq 4$ .

FIN DE L'ÉPREUVE

# Corrigé succinct

I-1) Le polynôme caractéristique de  $A(\alpha)$  et  $B(\alpha)$  est  $X^2 - X + 1$  de sorte que  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$ . Pour  $\frac{A(\alpha)+B(\alpha)}{2}$ , on trouve  $X^2 - X + 1 + \alpha^2$  et donc  $\text{Sp}(A(\alpha) + B(\alpha)) = \{1 \pm i\sqrt{3 + 4\alpha^2}\}$ .

I-2) L'exemple précédent montre qu'en général on ne peut tirer aucune information sur les valeurs propres de  $A + B$  à partir de celles de  $A$  et  $B$ , puisque que l'on peut rendre les éléments de  $\text{Sp}(A(\alpha) + B(\alpha))$  aussi grand qu'on veut sans modifier  $\text{Sp}(A(\alpha))$  et  $\text{Sp}(B(\alpha))$ .

I-3-a) D'après le théorème du rang, on a  $\dim(F \cap \text{Vect}(v_k, \dots, v_n)) = \dim F + (n - k + 1) - \dim(F + \text{Vect}(v_k, \dots, v_n)) \geq k + n - k + 1 - n = 1$ .

I-3-b) D'après 3-a) il existe un vecteur non nul  $x = \sum_{i=k}^n \alpha_i v_i \in F$ . On a alors  $x^*Ax = \sum_{i=k}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2 = \lambda_k(x^*x)$ .

I-3-c) Soit  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ , on a  $\lambda_k = \max_{0 \neq x \in F} \frac{x^*Ax}{x^*x}$ .

I-3-d) D'après 3-b) on a l'inégalité  $\lambda_k \geq \min_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{0 \neq x \in F} \frac{x^*Ax}{x^*x}$ . L'inégalité inverse se déduit de 3-c).

I-3-e) On a  $\frac{x^*(A+B)x}{x^*x} = \frac{x^*Ax}{x^*x} + \frac{x^*Bx}{x^*x}$ ; le résultat découle alors simplement de l'encadrement  $\lambda_1(B) \leq \frac{x^*Bx}{x^*x} \leq \lambda_n(B)$  et de 3-d) appliqué à la matrice  $A$ .

II-4-a)  $v_i = e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique convient.

II-4-b) On a  $x^*H(A)x = \frac{1}{2}(x^*Ax + x^*\overline{Ax}) = \text{Re } x^*Ax$  d'où le résultat.

II-4-c) On a  $\frac{x^*(A+B)x}{x^*x} = \frac{x^*Ax}{x^*x} + \frac{x^*Bx}{x^*x} \in \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$ .

II-4-d) Pour  $x \neq 0$  de norme 1 et  $\lambda \in \mathbf{C}$  tels que  $Ax = \lambda x$  on a  $\lambda = x^*Ax \in \mathcal{V}(A)$ .

II-4-e) Cela découle directement de II-4-d) et II-4-c).

II-4-f) On a  $\mathcal{V}(D) = \{\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\}$  et donc  $\mathcal{V}(D) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \subset \mathbf{R}$ .

**R.**

II-4-g) Cela découle du fait que  $\{x \in \mathbf{C}^n - \{0\}\} = \{Ux \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbf{C}^n - \{0\}\}$  et de l'égalité  $(Ux)^*Ux = x^*x$ .

II-4-h) On diagonalise  $A = U^*DU$  où  $D$  est une matrice diagonale réelle. D'après II-4-g) on a  $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(D) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \subset \mathbf{R}$ .

II-4-i) On remarque que  $\mathcal{V}(A) = \{x^*Ax \text{ tel que } x^*x = 1\}$  est l'image de la sphère unité par une application continue; il est donc compact.

II-5-a) Le polynôme  $X^m$  est annulateur de  $A$  de sorte que les valeurs propres de  $A$  sont des racines de  $X^m$ , i.e. nulles : sur  $\mathbf{C}$  il existe toujours des valeurs propres. Réciproquement si  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ , alors comme toute racine du polynôme caractéristique de  $A$  est une valeur propre et que sur  $\mathbf{C}$  tout polynôme est totalement décomposé, on en déduit qu'il est égal à  $(-1)^n X^n$  et donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton  $A$  est nilpotente.

II-5-b-i) D'après 4-d), on a  $\text{Sp}(A) = \{0\}$  et donc  $A$  est nilpotente.

II-5-b-ii) Pour tout  $x \in \mathbf{C}^n$  on a donc  $x^*Ax = 0$  (pas besoin de diviser par la norme); en particulier pour tout  $x_0 \in \text{Ker } A$ , on a  $(x + x_0)^*A(x + x_0) = x^*Ax + x_0^*Ax = x_0^*Ax = 0$  et donc  $\text{Ker } A \subset (\text{Im } A)^\perp$ ; l'égalité découle de l'égalité des dimensions en utilisant le produit hermitien  $(x, y) \mapsto x^*y$  avec  $\dim F^\perp = n - \dim F$  pour tout sous- $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $F$  de  $\mathbf{C}^n$ .

II-5-b-iii) Comme  $\text{Im } A \cap (\text{Im } A)^\perp = \{0\}$  (ce sont des supplémentaires), on en déduit donc  $\text{Ker } A \cap \text{Im } A = \{0\}$ . Ainsi la restriction de  $A$  à  $\text{Im } A$  est injective et comme  $A$  est nilpotente elle est aussi nilpotente de sorte que  $\text{Im } A = \{0\}$ , i.e.  $A = 0$ .

III-6-a) Soit  $x = [x_i]$  un vecteur non nul du noyau et  $r$  tel que  $|x_r|$  est maximal par les  $|x_i|$  pour  $i = 1, \dots, n$ . On a alors

$$0 = \sum_{j=1}^n a_{r,j} x_j \iff -x_r a_{r,r} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n a_{r,j} x_j$$

L'inégalité triangulaire donne alors  $|x_r| |a_{r,r}| \leq |x_r| L'_r(A)$  ce qui contredit l'hypothèse.

III-6-b) Si  $\lambda$  est une valeur propre alors d'après la question précédente appliqué à la matrice  $A - \lambda I_n$ , il existe un indice  $i$  tel que  $|a_{i,i} - \lambda| \leq L_i(A)$  de sorte que  $\text{Sp}(A) \subset G(A)$ . Par ailleurs les valeurs propres de  ${}^t A$  sont aussi celles de  $A$  et donc  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^t A) \subset G({}^t A)$ .

III-7-a) C'est immédiat.

III-7-b) L'ensemble  $\bigcap_{X \subset C \subset \mathbf{C}} C$ , l'intersection étant prise sur tous les convexes de  $\mathbf{C}$  contenant  $X$  est d'après 7-a) un convexe de  $\mathbf{C}$  contenant  $X$ ; par construction il est contenu dans tout convexe de  $\mathbf{C}$  contenant  $X$ , c'est donc le plus petit convexe de  $\mathbf{C}$  contenant  $X$ .

III-7-c) Par associativité du barycentre l'ensemble du membre de droite est contenu dans  $\text{Conv}(X)$ ; par ailleurs comme c'est un convexe de  $\mathbf{C}$  contenant  $X$  et que  $\text{Conv}(X)$  est le plus petit de ces convexes, on a bien l'inclusion inverse, d'où le résultat.

III-7-d) La fonction  $z \mapsto |z|$  est continue, sur un compact elle atteint ses bornes; on se ramène à un convexe compact en considérant  $K'$  l'intersection de  $K$  avec la boule, convexe, centrée à l'origine et de rayon le module d'un point de  $K$ . Si  $z_1, z_2 \in K'$  réalisent le minimum alors  $\frac{z_1 + z_2}{2} \in K'$  par convexité de  $K'$  est alors de norme strictement inférieure sauf si  $z_1 = z_2$ .

II-7-e) La droite médiatrice du segment  $[0, z_0]$  répond alors à la question.

III-7-f) Soit  $\theta$  tel que la rotation de centre 0 et d'angle  $\theta$  envoie la droite  $D$  sur une droite verticale, en laissant  $K$  dans le demi-espace à droite. On a alors  $e^{i\theta} K \subset \mathbf{P}$ . La réciproque est clairement vraie.

III-8-a) Le convexe  $G_{\mathcal{V}}(A)$  est compact car contenu dans le disque de centre 0 et de rayon  $\max_i |a_{i,i}| + \max_i E_i(A)$ . D'après 7-e)  $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$  si et seulement s'il existe un réel  $\theta$  tel que  $e^{i\theta} G_{\mathcal{V}}(A) \subset \mathbf{P}$  et le résultat découle alors de l'égalité  $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta} A) = e^{i\theta} G_{\mathcal{V}}(A)$ .

III-8-b) Comme  $\mathbf{P}$  est convexe, la condition est équivalente à demander que tous les disques  $|z - a_{i,i}| \leq E_i(A)$  soient contenus dans  $\mathbf{P}$  et donc  $\text{Re } a_{i,i} > E_i(A)$ .

III-8-c) On a  $L_i(A^*) = C_i(A)$  de sorte que d'après l'inégalité triangulaire  $L_i(H(A)) \leq E_i(A)$ . Ainsi comme les  $a_{i,i}$  sont aussi les termes diagonaux de  $H(A)$ , on en déduit que  $G(H(A)) \subset \mathbf{P}$  et d'après 6-b)  $\text{Sp}(H(A)) \subset G(H(A)) \subset \mathbf{P}$ . Or  $H(A)$  étant hermitien, on a  $\mathcal{V}(H(A)) = \text{Conv}(\text{Sp}(H(A))) \subset \mathbf{P}$  et donc d'après 4-b)  $\mathcal{V}(A) \subset \mathbf{P}$ .

III-8-d) Après multiplication par  $e^{i\theta}$ , on a  $G_{\mathcal{V}}(A) \subset \mathbf{P}$  et donc d'après 8-c),  $\mathcal{V}(A) \subset \mathbf{P}$  et donc  $0 \notin \mathcal{V}(A)$ .

III-8-e) Soit  $\alpha \notin G_{\mathcal{V}}(A)$ , il s'agit de montrer que  $\alpha \notin \mathcal{V}(A)$ . Or comme  $\mathcal{V}(A - \alpha I_n) = \mathcal{V}(A) - \alpha$  et  $G_{\mathcal{V}}(A - \alpha I_n) = G_{\mathcal{V}}(A) - \alpha$ , on se ramène au cas de  $\alpha = 0$  traité à la question précédente, d'où le résultat.

IV-9-a) On a  $|||A||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$  qui est matricielle car

$$\frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

et donc en prenant les  $\sup_{x \neq 0}$ , on a bien  $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$ .

IV-9-b) Par définition  $|||A|||_2^2 = \max_{x^*x=1} x^*A^*Ax = \lambda_{max}(A^*A)$  : en effet soit  $U$  unitaire telle que  $U^*(A^*A)U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec les  $\lambda_i \in \mathbf{R}^{\times}$  car  $A^*A$  est hermitienne positive. Comme  $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ , on en déduit que  $|||A|||_2^2 = \max_{x^*x=1} x^*Dx = \lambda_{max}(D)$ .

IV-9-c-i) Cela découle directement de l'inclusion  $\text{Sp}(A) \subset \mathcal{V}(A)$ .

IV-9-c-ii) Cela découle directement de l'inclusion  $\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$ .

IV-9-c-iii) Par rapport à (i) et (ii) il suffit de rajouter la majoration suivante :

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{j,i}|$$

où on reconnaît dans le terme de droite  $|||A|||_1$  et  $|||A|||_{\infty}$ .

IV-10-a) La positivité est évidente ; comme  $\mathcal{V}(\alpha A) = \alpha \mathcal{V}(A)$  on a bien  $r(\alpha A) = |\alpha| r(A)$  ; l'inégalité triangulaire découle, d'après II-4-c) de  $\mathcal{V}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$ . Reste alors à vérifier que si  $r(A) = 0$  alors  $A = 0$  : or si  $r(A) = 0$  alors  $\mathcal{V}(A)$  est réduit à 0 et donc  $A = 0$  d'après II-5-b).

IV-10-b) Par Cauchy-Schwarz  $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(B) = \mathcal{V}(A)\mathcal{V}(B)$  est le disque unité alors que  $\mathcal{V}(AB)$  est le segment  $[0, 4]$ .

IV-10-c) On a  $r(A) = \max_{\|x\|_2=1} |x^*Ax| \leq \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = |||A|||_2$ . Si  $A$  est hermitienne ou anti-hermitienne alors d'après le théorème T, il existe  $U$  unitaire telle que  $U^*AU = D$  avec  $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(D)$  qui est égal au segment sur l'axe des réels (ou des imaginaires purs)  $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$  d'où le résultat.

IV-10-d) Comme  $A_1 = (A + A^*)/2$  (resp.  $A_2 = (A - A^*)/2$ ) est hermitienne (resp. anti-hermitienne) alors

$$|||A|||_2 \leq |||A_1|||_2 + |||A_2|||_2 = r(A_1) + r(A_2) \leq r(A) + r(A^*) = 2r(A).$$

IV-10-e) On a  $4r(AB) \leq 4|||A|||_2 \cdot |||B|||_2 \leq 4r(A) \cdot 4r(B)$ .

IV-10-f) Pour  $c \geq 4$ ,  $cr$  est une norme matricielle d'après la question précédente. Par ailleurs l'exemple de IV-10-b) exige  $c \geq 4$  d'où le résultat.