# CONJECTURE DE MONODROMIE-POIDS POUR QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA UNITAIRES

*par*

Boyer Pascal

***Résumé.*** — Dans [**3**] on prouve la conjecture de monodromie-poids ≪ faisceautique ≫ pour certaines variétés de Shimura unitaires, en explicitant la filtration de monodromie du complexe des cycles évanescents en termes des systèmes locaux dits de Harris-Taylor introduits dans [**5**]. Le résultat principal de ce papier est la conjecture de monodromie-poids ≪ cohomologique ≫ pour ces variétés de Shimura, laquelle est prouvée en explicitant chacun des groupes de cohomologie en termes de représentations automorphes et de la correspondance de Langlands locale.

***Abstract* (Weight-monodromy conjecture for some unitary Shimura varieties)**

In [**3**] we prove the sheaf version of the monodromy-weight conjecture for some unitary Shimura varieties, by giving explicitly the monodromy filtration of the complex of vanishing cycles in terms of Harris-Taylor's local systems introduced in [**5**]. The main result of this paper is the cohomological version of the weight-monodromy conjecture for these Shimura varieties which is proved by the explicit description of the groups of cohomology in terms of automorphic representations an the local Langlands correspondence.

## Introduction

Dans cet article on s'intéresse aux groupes de cohomologie de certaines variétés de Shimura unitaires, celles étudiées dans [**5**], qui sont de type PEL, définies sur un corps CM, $F = EF^+$, et associées à un groupe de similitudes $G/\mathbb{Q}$ tel que le groupe unitaire correspondant sur $\mathbb{R}$ soit de la forme $U(1, d-1) \times U(0, d)^r$. A certains sous-groupes compacts $I = U^p(m)$ de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on associe alors un schéma $X_I$ au dessus de $F$ classifiant des variétés abéliennes munies de structures additionnelles. La tour $X_{\mathcal{I}} := (X_I)_{I\in\mathcal{I}}$ est munie d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^\infty)$ et forme un schéma de Hecke au sens de [**3**]. On fixe un nombre premier $p$ inerte dans l'extension quadratique $E/\mathbb{Q}$, et $v$ une place de $F$ au dessus de $p$ telle que $G(F_v) \simeq GL_d(F_v)$, où $F_v$ désigne le complété du localisé de $F$ en $v$. Les schémas $X_I$ sont alors définis sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de $F_v$ et on note $\Psi_{\mathcal{I}} = R\Psi_{\eta_v}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2})$ le faisceau pervers des cycles évanescents de poids 0 sur la fibre spéciale géométrique $\overline{X}_{\mathcal{I}}$ de $X_{\mathcal{I}}$.

Le $\overline{\mathbb{F}}_p$-schéma $\overline{X}_{\mathcal{I}}$ est stratifié par des sous-schémas de Hecke localement fermés

$$\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=h} \xhookrightarrow{j^{\geqslant h}} \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geqslant h} \xhookrightarrow{i^h} \overline{X}_{\mathcal{I}}$$

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

***Mots clefs.*** — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids.

pour $1 \leqslant h \leqslant d$, de pure dimension $d-h$, lesquels pour $1 \leqslant h < d$, sont géométriquement induits au sens où il existe un sous-schéma fermé $\overline{X}^{=h}_{\mathcal{I},1}$ tel que

$$\overline{X}^{=h}_{\mathcal{I}} = \overline{X}^{=h}_{\mathcal{I},1} \times^{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où $P_{h,d}$ est le parabolique standard de Lévi $GL_h \times GL_{d-h}$. Dans [**5**] à toute représentation irréductible admissible $\tau_v$ du groupe des inversibles $D^\times_{v,h}$ de l'algèbre à division centrale sur $F_v$ et d'invariant $1/h$, les auteurs associent un système local $\mathcal{F}_{\tau_v}$ sur $\overline{X}^{=h}_{\mathcal{I}}$ dit d'Harris-Taylor. Dans [**3**], les bigradués de la filtration de monodromie de $\Psi_{\mathcal{I}}$ sont décrits en termes des extensions intermédiaires de ces systèmes locaux et on constate alors que la conjecture de monodromie-poids version faisceautique est vérifiée.

Une étape essentielle dans la preuve de ce résultat consiste, pour $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et pour $1 \leqslant t \leqslant s = \lfloor d/g \rfloor$ à prouver la série d'égalités suivante dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke, cf. [**3**] proposition 4.3.1 et corollaire 5.4.1 :

$$i^{tg}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{i=t}^{s} i^{ig}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant ig}_{\mathcal{I},!*} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-t-1}]_{\pi_v})(-\frac{t-i}{2}) \tag{1}$$

où les faisceaux $HT(\pi_v, \Pi_t)$ se construisent par induction parabolique « géométrique » à partir :
- des systèmes locaux d'Harris-Taylor $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D}$ où $\pi_v[t]_D$ est la représentation de $D^\times_{v,tg}$ associée à la représentation de Steinberg généralisée $\mathrm{St}_t(\pi_v^\vee)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands locale ;
- et d'une représentation $\Pi_t$ quelconque de $GL_{tg}(F_v)$.

Il est aisé d'inverser, par récurrence, cette série d'égalités et d'obtenir, proposition 2.6.1, la série d'égalités suivante

$$i^{tg}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r i^{(t+r)g}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant (t+r)g}_{\mathcal{I},!} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v})(r/2). \tag{2}$$

Dans [**5**] via des arguments désormais classiques de comptage de points fixes, pour
- $\xi$ une représentation irréductible algébrique de $G$ à laquelle on associe un système local $\mathcal{L}_\xi$ sur $X_{\mathcal{I}}$ et
- $\Pi^\infty$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}^\infty)$,

la composante $\Pi^{\infty,v}$-isotypique $[H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ de la somme alternée des groupes de cohomologie de $j^{\geqslant tg}_{!} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi$ est décrit, proposition 3.3.1, à l'aide du foncteur $\mathrm{red}_{\pi_v[t]_D}$, définition 1.5.4, appliqué à la composante locale $\Pi_v$ de sorte que de (2), par pureté, on en déduit le calcul de chacun des groupes de cohomologie $H^i(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)$. Il reste alors à étudier la suite spectrale de monodromie dont l'aboutissement calcule les groupes de cohomologie $H^i_{\overline{\eta}_v,\xi}$ à coefficients dans $\mathcal{L}_\xi$ de la variété de Shimura et dont les termes initiaux sont les $H^i(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathcal{L}_\xi)$. Dans cette étude on distingue les deux situations suivantes :
- le cas $\Pi_v$ est tempérée où la suite spectrale dégénère en $E_1$ ;
- le cas Zelevinski dual, i.e. $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$, où l'on décrit complètement la suite spectrale.

Dans le cas général où $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ pour $\pi_v$ une représentation irréductible tempérée de $GL_g(F_v)$ avec $d = sg$, plutôt que de décrire tous les termes initiaux, on se contente d'en préciser certains de façon à calculer $H^{s-1}_{\overline{\eta}_v,\xi}$ et on conclut en utilisant le théorème de Lefschetz difficile. En définitive on prouve, théorème 4.3.1, la conjecture de monodromie-poids « cohomologique » pour les $X_I$ au sens où pour tout $i$, les gradués $gr^M_{\overline{\eta}_v,\xi,k}$ de la filtration de monodromie de $H^i(X_{\mathcal{I}} \times_{F_v} \overline{F}_v, \mathcal{L}_\xi)$ sont purs de poids $k+i$.

L'étude de la suite spectrale des poids associée à (1) permet de décrire chacun des groupes de cohomologie $H^i(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)$ ; on en déduit alors un énoncé de connexité pour les variétés de Shimura étudiées, cf. le corollaire 5.3.3.

Originellement on utilisait une partie de ces calculs de groupes de cohomologie pour prouver les résultats faisceautiques de [**3**]. Afin d'alléger l'exposition de [**3**], nous avons préféré courcicuiter cette étude cohomologique en utilisant une propriété d'autodualité à la Zelevinski prouvée par

Fargues dans [**4**] ; en appendice nous donnons l'argument originel permettant de ne pas faire appel à [**4**].

Comme nous venons de le voir, pour l'essentiel, tout repose sur les calculs du foncteur $\mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}$ appliqué à la composante locale $\Pi_v$ d'une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$. Comme ce foncteur se comporte particulièrement bien à l'induction parabolique, cf. le lemme 1.5.5

$$\mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}(\pi_1 \times \pi_2) = \mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}(\pi_1) \times \pi_2 + \pi_1 \times \mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}(\pi_2)$$

on est ramené, corollaire 1.5.6, au calcul de $\mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}$ appliqué à $[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}}$ avec les notations du paragraphe 1.3, lequel découle du calcul de ses foncteurs de Jacquet, proposition 1.4.2.

## Table des matières



## 1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$

Soit $K$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ et de corps résiduel $\kappa$ de cardinal $q = p^f$. On notera $\varpi_K$ une uniformisante et $|-|$ la valeur absolue.

**1.1. Notations.** — On rappelle dans ce paragraphe, quelques notations, tirées de [**3**], sur les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations admissibles de $GL_d(K)$

***1.1.1 Définition.*** — Pour une suite $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = d$, on note $P_{r_1,r_2,\cdots,r_k}$ le sous-groupe parabolique de $GL_d$ standard associé au sous-groupe de Levi $GL_{r_1}(F_v) \times GL_{r_2-r_1}(F_v) \times \cdots \times GL_{r_k-r_{k-1}}(F_v)$ et on note $N_{r_1,\cdots,r_k}$ son radical unipotent. On mettra en exposant *op* pour désigner les paraboliques opposés.

***1.1.2 Notation.*** —
- *Pour $P = MN$ un parabolique de $GL_d$ de Lévi $M$, de radical unipotent $N$, et $\pi$ une représentation admissible de $GL_d(K)$, l'espace des vecteurs $N(K)$-coinvariants est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_P(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}(-) = |\det(\mathrm{ad}(-)_{|\mathrm{Lie} N})|^{1/2}$.*
- *Soient $\pi_1$ et $\pi_2$ des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$. On note alors*
  - *$\pi_1\{n\} := \pi_1 \otimes |\det|^n$ ;*
  - *$\pi_1 \times \pi_2$ l'induite $\mathrm{Ind}_{P_{n_1,n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$ ; l'induite relativement au parabolique opposé sera noté $\times_{op}$ ;*
  - *si $n_1 = t_1 g$ et $n_2 = t_2 g$,*
$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 := \pi_1\{-t_2/2\} \times \pi_2\{t_1/2\} \text{ et } \pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2 := \pi_1\{t_2/2\} \times \pi_2\{-t_1/2\};$$
    *on omet la référence à $g$ car en général le contexte sera clair. Pour les paraboliques opposés, on notera $\overrightarrow{\times}_{op}$ et $\overleftarrow{\times}_{op}$.*

*Remarque :* pour $(\pi_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ des représentations de $GL_{t_i g}(K)$, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcl} (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2)^\vee & \simeq & \pi_1^\vee \overleftarrow{\times} \pi_2^\vee \\ (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2) \overrightarrow{\times} \pi_3 & \simeq & \pi_1 \overrightarrow{\times} (\pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3) \\ (\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2) \overleftarrow{\times} \pi_3 & \simeq & \pi_1 \overleftarrow{\times} (\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3) \end{array}$$

**1.2. Représentations elliptiques.** — Pour tout $t \geqslant 0$, on note

$$\Gamma^t := \Big\{ (a_1, \cdots, a_r, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_r) \in \mathbb{N}^r \times \{\pm\}^r : \ r \geqslant 1, \ \sum_{i=1}^r a_i = t \Big\}.$$

Un élément de $\Gamma^t$ sera noté sous la forme $(\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_r})$ où pour tout $i$ la flèche au dessus de $a_i$ est $\overleftarrow{a_i}$ (resp. $\overrightarrow{a_i}$) si $\epsilon_i = -$ (resp. $\epsilon_i = +$). On considère alors sur $\Gamma^t$ la relation d'équivalence induite par les identifications suivantes :

$$(\cdots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{b}, \cdots) = (\cdots, \overleftarrow{a+b}, \cdots), \quad (\cdots, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \cdots) = (\cdots, \overrightarrow{a+b}, \cdots),$$

et $(\cdots, \overleftarrow{0}, \cdots) = (\cdots, \overrightarrow{0}, \cdots)$. On notera $\overrightarrow{\Gamma}^t$ l'ensemble quotient dont les éléments seront notés $[\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_r}]$.

*Remarque :* pour $t > 0$, dans toute classe $[\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_k}] \in \overrightarrow{\Gamma}^t$, il existe un unique élément de $(a_1, \cdots, a_r, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_r) \in \Gamma^t$ tel que
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on ait $a_i > 0$ ;
- pour tout $1 \leqslant i < r$, $\epsilon_i \epsilon_{i+1} = -$.

Un tel représentant sera dit réduit. Pour $t = 0$, on dispose d'une unique classe notée $[\overleftarrow{0}]$ ou $[\overrightarrow{0}]$.

***1.2.1 Définition.*** — A tout représentant réduit $(a_1, \cdots, a_r, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_r)$ d'une classe de $[\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_k}] \in \overrightarrow{\Gamma}^t$, on associe

$$\mathcal{S}\Big([\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_k}]\Big)$$

comme le sous-ensemble des permutations $\sigma$ de $\{0, \cdots, s-1\}$ telles que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ avec $\epsilon_i = +$ (resp. $\epsilon_i = -$) et pour tout $a_1 + \cdots + a_{i-1} \leqslant k < k' \leqslant a_1 + \cdots + a_i$ alors $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k')$ (resp. $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k')$). Dans le cas où sous les mêmes conditions, on demande inversement $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k')$ (resp. $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k')$), l'ensemble obtenu sera noté $\mathcal{S}^{op}\Big([\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_k}]\Big)$.

***1.2.2 Proposition***. — *(cf. [**7**]) Soit $g$ un diviseur de $d = sg$ et $\pi$ une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. Il existe une bijection*

$$[\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_r}] \in \overrightarrow{\Gamma}^{s-1} \mapsto [\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_r}]_\pi$$

*dans l'ensemble des sous-quotients irréductibles de l'induite*

$$V(\pi, s) := \pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$$

*caractérisée par la propriété suivante*

$$J_{P_{g,2g,\cdots,sg}}([\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_r}]_\pi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}\left([\overleftarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_r}]\right)} \pi\{\frac{1-s}{2} + \sigma(0)\} \otimes \cdots \pi\{\frac{1-s}{2} + \sigma(s-1)\}.$$

*Remarque :* on peut aussi caractériser la bijection en utilisant $J_{P^{op}_{g,2g,\cdots,sg}}$ via l'ensemble de permutations $\mathcal{S}^{op}\left([\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_k}]\right)$.

***1.2.3 Définition***. — Les sous-quotients irréductibles de $V(\pi, s)$ seront dits elliptiques de type $\pi$. On désignera par $[\overleftrightarrow{s-1}]_\pi$ une représentation elliptique quelconque de type $\pi$ de $GL_{sg}(K)$.

*Remarque :* si $\pi_1$ et $\pi_2$ sont elliptiques de type $\pi$, il en est de même de $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ et de $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$ et on notera bien que $\pi \times [\overleftrightarrow{-1}]_{\pi'} = \pi$. En fait [**7**] est plus précis et décrit la suite de Jordan-Holder de $V(\pi, s)$ ; en ce qui concerne les sous-espaces et les quotients irréductibles, on a les résultats suivants.

***1.2.4 Proposition***. — *(cf. [**7**]) L'induite parabolique $V(\pi, s)$ possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible à savoir $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$ (resp. $[\overrightarrow{s-1}]_\pi$)) ; c'est une représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée notée habituellement $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$).*

***1.2.5 Proposition***. — *L'induite $[\overleftarrow{t-1}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-1}]_\pi$ (resp. $[\overleftarrow{t-1}]_\pi \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-1}]_\pi$) est de longueur 2 ; son unique sous-espace irréductible est $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ (resp. $[\overrightarrow{s-t-1}, \overleftarrow{t}]_\pi$)) et son unique quotient irréductible est $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{s-t-1}]_\pi$ (resp. $[\overrightarrow{s-t}, \overleftarrow{t-1}]_\pi$)).*

Plus généralement $[\cdots, \overleftrightarrow{a}, \overrightarrow{1}, \overleftrightarrow{b}, \cdots]_\pi$ (resp. $[\cdots, \overleftrightarrow{a}, \overleftarrow{1}, \overleftrightarrow{b}, \cdots]_\pi$) est l'unique sous-espace (resp. quotient) irréductible de $[\cdots, \overleftrightarrow{a}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overleftrightarrow{b}, \cdots]_\pi$.

De la même façon, $[\cdots, \overleftrightarrow{b}, \overleftarrow{1}, \overleftrightarrow{a}, \cdots]_\pi$ (resp. $[\cdots, \overleftrightarrow{b}, \overrightarrow{1}, \overleftrightarrow{a}, \cdots]_\pi$) est l'unique sous-espace (resp. quotient) irréductible de $[\cdots, \overleftrightarrow{a}]_\pi \overleftarrow{\times} [\overleftrightarrow{b}, \cdots]_\pi$.

*Remarque :* en ce qui concerne les paraboliques opposés $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ (resp. $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{s-t-1}]_\pi$) est l'unique quotient (resp. sous-espace) irréductible de $[\overleftarrow{t-1}]_\pi \overrightarrow{\times}_{op} [\overrightarrow{s-t-1}]_\pi$.

## 1.3. Rappels sur les représentations non elliptiques d'après [7]. —

***1.3.1 Notation***. — *D'après [**7**] §9, l'induite $[\overleftarrow{t_1}]_\pi \times [\overleftarrow{t_2}]_{\pi\{\delta\}}$ est irréductible si et seulement si les segments $\Delta = [-\frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2}]$ et $\Delta' = [-\frac{t_2}{2} + \delta, \frac{t_2}{2} + \delta]$ ne sont pas liés. Dans le cas contraire on écrit $\Delta_1 = \Delta \cup \Delta' = [-\frac{r_1}{2} + \delta_1, \frac{r_1}{2} + \delta_1]$ et $\Delta_2 = \Delta \cap \Delta' = [-\frac{r_2}{2} + \delta_2, \frac{r_2}{2} + \delta_2]$ de sorte que l'induite précédente est de longueur 2 avec pour constituants irréductibles, cf. [**7**] 4.6*

$$[\overleftarrow{r_1}]_{\pi\{\delta_1\}} \times [\overleftarrow{r_2}]_{\pi\{\delta_2\}} \qquad [\overleftarrow{t_1}]_\pi \boxplus [\overleftarrow{t_2}]_{\pi\{\delta\}}$$

*Remarque :* dans [**7**], l'auteur a privilégié, au niveau des notations, les Speh aux St. Ainsi $[\overrightarrow{s-1}]_\pi$ y est noté $< \Delta >$ où $\Delta$ est le segment de Zelevinski $\left\{\pi\{\frac{1-s}{2}\}, \cdots, \pi\{\frac{s-1}{2}\}\right\}$ alors que $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$ est notée $< \Delta_0, \cdots, \Delta_{s-1} >$ où $\Delta_i = \left\{\pi\{\frac{1-s+2i}{2}\}\right\}$. En utilisant l'involution de Zelevinski, on renverse le point de vue de sorte que $< \Delta >^t = [\overleftarrow{s-1}]_\pi$ et $< \Delta_0, \cdots, \Delta_{s-1} >^t = [\overrightarrow{s-1}]_\pi$. Ainsi l'analogue du théorème 6.1 de [**7**] est la proposition suivante. En ce qui concerne la notation $\boxplus$ elle correspond via la bijection de Langlands locale, à la somme directe.

***1.3.2 Proposition***. — *La représentation irréductible*

$$[\overleftarrow{t_1}]_{\pi\{\delta_1\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t_r}]_{\pi\{\delta_r\}},$$

*où les $\Delta_i$ sont les segments associés aux $[\overleftarrow{t_j}]_{\pi\{\delta_j\}}$ rangés de sorte que pour tout $i<j$, $\Delta_j$ ne précède pas $\Delta_i$, est l'unique sous-espace irréductible des induites paraboliques*

$$[\overleftarrow{t_1}]_{\pi\{\delta_1\}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_r}]_{\pi\{\delta_r\}} \text{ et } [\overleftarrow{t_r}]_{\pi\{\delta_r\}} \times_{op} \cdots \times_{op} [\overleftarrow{t_1}]_{\pi\{\delta_1\}}.$$

*Remarque :* avec les notations précédentes $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ est noté

$$[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{t-s}{2}\}} \boxplus \pi\{\frac{1-s}{2}+t\} \boxplus \pi\{\frac{1-s}{2}+t+1\} \boxplus \cdots \boxplus \pi\{\frac{s-1}{2}\}.$$

***1.3.3 Définition***. — Étant donnée une représentation irréductible $\Pi$ et un parabolique $P$ opposé à un parabolique standard, tel que l'image de $\Pi$ par le foncteur de Jacquet associé à $P$ est cuspidale non nulle, on note $\Omega(\Pi)$ l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $J_{P^{op}}(\Pi)$.

*Remarque :* si $\rho_1 \otimes \cdots \rho_r \in \Omega(\Pi)$ il existe alors une permutation $\sigma$ de $\{1, \cdots, r\}$ telle que :
- $\rho_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \rho_{\sigma(r)} \in \Omega(\Pi)$ ;
- pour tout droite de Zelevinski $D_\pi := \{\pi\{k\} : \ k \in \mathbb{Z}\}$, et pour tout $i<j$ tels que $\rho_{\sigma(i)}$ et $\rho_{\sigma(j)}$ appartenant à $D_\pi := \{\pi\{k\} : \ k \in \mathbb{Z}\}$ alors pour tout $i \leqslant k \leqslant j$, $\rho_{\sigma(k)} \in D_\pi$.

Ainsi pour $\pi$ une représentation irréductible cuspidale, on considère l'ensemble $\Omega_\pi(\Pi)$ des sous-séquences de $\rho_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \rho_{\sigma(r)} \in \Omega(\pi)$ relative à la droite de Zelevinski $D_\pi$. En identifiant $\Omega_\pi(\Pi)$ à un sous-ensemble $\mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$, on le munit de la relation d'ordre

$$(n_k)_{k\in\mathbb{Z}} < (m_k)_{k\in\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z} : \ \forall k>i, \ n_k = m_k \text{ et } n_i < m_i.$$

Au §6.9 de [**7**], l'auteur décrit un procédé pour reconstituer les paramètres de Zelevinski d'une représentation irréductible à partir de la collection des $\Omega_\pi(\Pi)$ ; pour chacune des droites de Zelevinski associée au support cuspidal de $\Pi$, on considère un élément maximal de $\Omega_\pi(\Pi)$ que l'on organise en un minimum de segments $\Delta_1(\pi), \cdots, \Delta_r(\pi)$ et alors

$$\Pi \simeq \times_\pi < \Delta_1(\pi), \cdots, \Delta_r(\pi) >^t .$$

**1.4. Un calcul de foncteur de Jacquet.** — Comme nous le verrons à la section 3.3, d'après [**5**], le calcul de certains groupes de cohomologie est relié à celui de $J_P([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}})$, où

$$[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}} = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1-s}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{s-1}{2}\}}.$$

Commençons par rappeler d'après 1.2.2, les cas où $(s-1)(t-1)=0$.

***1.4.1 Proposition***. — *Soit $g$ un diviseur de $d=sg$ et $\pi$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. Pour $1 \leqslant h \leqslant d$, le foncteur de Jacquet vérifie les propriétés suivantes :*
- *si $g$ ne divise pas $h$, alors*

$$J_{P_{h,d}^{op}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = J_{P_{h,d}^{op}}([\overrightarrow{s-1}]_\pi) = J_{P_{h,d}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = J_{P_{h,d}}([\overrightarrow{s-1}]_\pi) = (0)$$

- *si $h=tg$ alors*

$$J_{P_{tg,sg}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{s-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{-\frac{t}{2}\}}$$

$$J_{P_{tg,sg}}([\overrightarrow{s-1}]_\pi) = [\overrightarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{t-s}{2}\}} \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi\{\frac{t}{2}\}}$$

$$J_{P_{tg,sg}^{op}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{t-s}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{\frac{t}{2}\}}$$

$$J_{P_{tg,sg}^{op}}([\overrightarrow{s-1}]_\pi) = [\overrightarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{s-t}{2}\}} \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi\{-\frac{t}{2}\}}$$

*Remarque :* le calcul des foncteurs de Jacquet des $[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}$ sont certainement bien connus des experts ; ne connaissant pas de référence nous avons détaillé un argument. Ce résultat ne sera utilisé que sous la forme du corollaire 1.5.6.

***1.4.2 Proposition.*** — *Pour tout $s,t$, on a*

$$J_{P^{op}_{kg,stg}}([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}) = \sum_{\underline{k}} [\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{s-t+k_1-1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{s-t+k_2-3}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{k_s-1}]_{\pi\{\frac{k_s-t-s+1}{2}\}}$$
$$\otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{s+k_1-1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{s+k_2-3}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t-k_s-1}]_{\pi\{\frac{k_s-s+1}{2}\}}$$

*où $\underline{k}$ décrit les $s$-uplets $(k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_s)$ tels que :*
- *pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, $0 \leqslant k_i \leqslant t$ et*
- *$\sum_{i=1}^s k_i = k$.*

Donnons une illustration graphique de ce résultat à l'aide de la figure 1. On représente $[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}$ à l'aide d'une grille dont les sommets sont associés aux éléments du support cuspidal. Pour une suite $(\rho_1, \cdots, \rho_r)$ contenue dans le support cuspidal de $[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}$, on les place sur cette grille de bas en haut et de gauche à droite. On compte alors les éléments sur les lignes en partant de celle du bas, ce qui donne un $s$-uplet $(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ avec $\sum_{i=1}^s \alpha_i = r$. L'énoncé ci-dessus s'exprime en disant que pour tout $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{st} \in \Omega([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi})$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant st$, le $s$-uplet $(\alpha_1(i), \cdots, \alpha_s(i))$ associé à $(\rho_1, \cdots, \rho_i)$ est tel que

$$0 \leqslant \alpha_1(i) \leqslant \cdots \leqslant \alpha_s(i) \leqslant t-1.$$

*Remarque :* en ce qui concerne le foncteur de Jacquet $J_{P_{kg,stg}}$, on a un résultat équivalent en remplissant la grille de haut en bas et de droite à gauche et $0 \leqslant \alpha_1(i) \leqslant \cdots \alpha_s(i) \leqslant t-1$ où on compte les éléments sur les lignes en partant du haut.

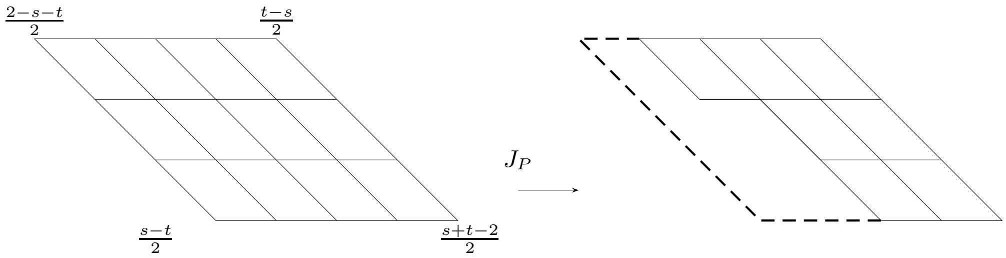


FIGURE 1. Représentation graphique de $[\overrightarrow{3}]_{[\overleftarrow{4}]_\pi}$ ainsi qu'un des constituants de son image par $J_{P^{op}_{6g,19g}}$.

*Démonstration.* — *du cas $s=2$ :* on utilise l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck adéquat

$$[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-1/2\}} \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{1/2\}} = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{1/2\}} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-1/2\}} - [\overleftarrow{t}]_\pi \times [\overleftarrow{t-2}]_\pi.$$

On rappelle que d'après la réciprocité de Frobenius, $J_{P^{op}_{(k_1+k_2)g,2tg}(F_v)}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{1/2\}} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-1/2\}})$ est égal à

$$\sum_{(k_1,k_2)} [\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{1+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}} \qquad (1.4.3)$$

où $(k_1, k_2)$ décrit l'ensemble des couples d'entiers tels que $0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant t$ et $k = k_1 + k_2$.

Remarquons tout d'abord que pour $k_1 < k_2$, la représentation ci-dessus, d'après (1.3.1), est irréductible. Pour $k_1 \geqslant k_2$, des égalités

$$[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}} = [\overleftarrow{k_1}]_{\pi\{\frac{k_1-t}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-2}]_{\pi\{\frac{k_2-t}{2}\}} + [\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}}$$

$$[\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{1+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}} = [\overleftarrow{t-k_2}]_{\pi\{\frac{k_2}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_1-2}]_{\pi\{\frac{k_1}{2}\}} + [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{1+k_1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}.$$

on en déduit que l'on obtient 4 constituants irréductibles dans (1.4.3). En résumé les sous-quotients irréductibles de $J_{P^{op}_{(k_1+k_2)g,2tg}(F_v)}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{1/2\}} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-1/2\}})$ se répartissent comme suit :

(i) $[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{1+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$ avec $0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant t$ avec $k_1 < k_2 - 1$ qui apparaissent avec une multiplicité égale à 2 ;

(ii) les mêmes que dans (i) pour $1 \leqslant k_1, k_2 = k_1 + 1 \leqslant t$ avec multiplicité 1 ;

(iii) $[\overleftarrow{k_1}]_{\pi\{\frac{k_1-t}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-2}]_{\pi\{\frac{k_2-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{1+k_1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$ où $0 \leqslant k_2 \leqslant k_1 \leqslant t$ avec multiplicité 1 ;

(iv) $[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_2}]_{\pi\{\frac{k_2}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_1-2}]_{\pi\{\frac{k_1}{2}\}}$ où $0 \leqslant k_2 \leqslant k_1 \leqslant t$ avec multiplicité 1 ;

(v) $[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{1+k_1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$ où $0 \leqslant k_2 \leqslant k_1 \leqslant t$ avec multiplicité 1.

On remarque alors que $J_{P^{op}_{kg,2tg}(F_v)}([\overleftarrow{t}]_{\pi} \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi})$ contient :

– tous les constituants du type (i) ci-dessus avec multiplicité 2 ; en effet il est obtenu soit comme sous-quotient de :
  – $[\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{k_1+1-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_2}]_{\pi\{\frac{k_2}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_1-2}]_{\pi\{\frac{k_1}{2}\}}$ en utilisant que d'après (1.3.1), $[\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{1+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$ est un constituant de $[\overleftarrow{t-k_2}]_{\pi\{\frac{k_2}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_1-2}]_{\pi\{\frac{k_1}{2}\}}$ ;
  – $[\overleftarrow{k_1}]_{\pi\{\frac{k_1-t}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-2}]_{\pi\{\frac{k_2-t-1}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{k_1+1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-1-k_2}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$ en utilisant que $[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}}$ est un constituant de $[\overleftarrow{k_1}]_{\pi\{\frac{k_1-t}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-2}]_{\pi\{\frac{k_2-t-1}{2}\}}$.

– les constituants du type (ii) ci-dessus, via $[\overleftarrow{k_1}]_{\pi\{\frac{k_1-t}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{k_1-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{k_1+1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-2-k_1}]_{\pi\{\frac{k_1}{2}\}}$ ;

– les constituants du type (iii) ci-dessus, via $[\overleftarrow{k_1}]_{\pi\{\frac{k_1-t}{2}\}} \times [\overleftarrow{k_2-2}]_{\pi\{\frac{k_2-t}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{k_1+1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$, en utilisant que d'après (1.3.1) $[\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{k_1+1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$ est un constituant de $[\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{\frac{k_1+1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1}{2}\}}$.

– les constituants du type (iv) ci-dessus, selon le même procédé.

Il ne reste plus alors qu'à vérifier que les constituants du type (v) ci-dessus ne sont pas des sous-quotients de $J_{P^{op}_{kg,2tg}(F_v)}([\overleftarrow{t}]_{\pi} \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi}) = \sum_i \pi_i \otimes \pi'_i$. Remarquons tout d'abord que pour tout $i$, $\pi_i$ ou $\pi'_i$ est une irréductible de la forme $[\overleftarrow{\alpha}]_{\pi\{\cdots\}} \times [\overleftarrow{\beta}]_{\pi\{\cdots\}}$. Supposons par exemple que $\pi_i$ soit une telle induite irréductible alors il n'est pas isomorphe à $[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{\frac{1-t+k_1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{\frac{k_2-1-t}{2}\}}$. En effet pour ces dernières tous les constituants de $J_{P^{op}_{g,\cdots}}$ ont la même première composante ce qui n'est pas le cas pour $\pi_i$ qui peut avoir $\pi\{\frac{-t}{2}\}$ et $\pi\{\frac{2-t}{2}\}$. Pour $\pi'_i$ le raisonnement est le même en utilisant $J_{P_{g,\cdots}}$. $\square$

*Démonstration. — du cas $s \geqslant 3$* : on raisonne par récurrence en supposant acquis les cas $s' < s$. Nous allons ensuite utiliser que $\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_\pi}$ est l'unique sous-espace irréductible des deux induites suivantes :

$$\overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{1/2\}}} \times_{op} \overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{-\frac{s-1}{2}\}} \text{ et } \overrightarrow{[t-1]}_{\pi\{\frac{s-1}{2}\}} \times_{op} \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{-1/2\}}}.$$

En ce qui concerne la première induite, pour tout parabolique $P_{kg,d}$, son image par le foncteur de Jacquet $J_{P^{op}_{kg,d}}$ admet, d'après [**7**] 1.2, une filtration

$$(0) = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_r = J_{P^{op}_{kg,d}}\Big(\overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{1/2\}}} \times_{op} \overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{-\frac{s-1}{2}\}}\Big)$$

telle que les gradués $W_i/W_{i-1}$ sont de la forme

$$\overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s-t+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s-t+1}{2}\}} \otimes \\ \overleftarrow{[t-k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[t-k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[t-k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s+1}{2}\}},$$

avec $k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_s$ et pour tout $i = 1, \cdots, s$, $0 \leqslant k_i \leqslant t-1$. On note alors $V_i$ l'intersection de $J_{P^{op}_{kg,d}}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_\pi})$ et on note $i_j$ les indices tels que $V_{i-1} \subsetneq V_i$. Nous allons alors montrer les faits suivants :

(i) pour tout $j$, $W_{i_j}/W_{i_j-1}$ correspond à un $s$-uplet ($k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_s$) et $\overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s-t+1}{2}\}} \times \overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s-t+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \otimes \overleftarrow{[t-k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s+1}{2}\}} \times \overleftarrow{[t-k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[t-k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k_s}{2}\}}$ est un sous-espace de $V_{i_j}/V_{i_j-1}$ ;

(ii) pour tout $i$ tel que $W_i/W_{i-1}$ est associé à un $s$-uplet ($k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots k_s$) comme dans (i), il existe $j$ tel que $i = i_j$, autrement dit $V_{i-1} \subsetneq V_i$ ;

(iii) dans la situation de (ii), $V_i/V_{i-1}$ est exactement égal à la représentation irréductible de (i).

*Démonstration. — de (i)* : comme la représentation de l'énoncé est l'unique sous-représentation irréductible de l'induite associée à $W_{i_j}/W_{i_j-1}$, on en déduit qu'elle est contenue dans $V_{i_j}/V_{i_j-1}$. En utilisant alors la deuxième induite $\overrightarrow{[t-1]}_{\pi\{\frac{s-1}{2}\}} \times_{op} \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{-1/2\}}}$ on en déduit qu'il existe un $s$-uplet $(k'_1, \cdots, k'_s)$ tel que $k'_1 \leqslant \cdots \leqslant k'_{s-1}$ et pour tout $i = 1, \cdots, s$, $0 \leqslant k'_i \leqslant t-1$, pour lequel la représentation de (i) est un sous-espace irréductible de l'induite

$$\overleftarrow{[k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k'_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k'_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-t-1-k'_{s-1}}{2}\}} \otimes \\ \overleftarrow{[t-k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k'_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[t-k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[t-k'_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-3+k'_{s-1}}{2}\}}$$

et donc égale à

$$\overleftarrow{[k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k'_s}{2}\}} \otimes \overleftarrow{[t-k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[t-k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k'_s}{2}\}}$$

de sorte que $(k_1, \cdots, k_s) = (k'_1, \cdots, k'_s)$ et donc (i). □

*Démonstration. — de (ii)* : dans le cas où $k_1 = 0$, le résultat découle directement de la réciprocité de Frobenius en utilisant la première induite $\overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{1/2\}}} \times_{op} \overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{-\frac{s-1}{2}\}}$. Dans le cas général comme $\overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s-t+1}{2}\}} \times \overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s-t+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}}$ est l'unique sous-espace irréductible de l'induite

$$\overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s-t+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s-t+1}{2}\}}$$

par réciprocité de Frobenius, son image par le foncteur de Jacquet $J_{P^{op}_{k_s g,kg}}$ contient

$$\overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s-t+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \otimes \overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s-t+1}{2}\}}$$

laquelle représentation tensorisée par $\overleftarrow{[t-k_1-1]}_{\pi\{\frac{k_1-s+1}{2}\}} \times \overleftarrow{[t-k_2-1]}_{\pi\{\frac{k_2-s+3}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[t-k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k_s}{2}\}}$, d'après le cas $k_1=0$, appartient à l'image de $J_{P^{op}_{k_sg,kg,d}}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi}})$. En regardant l'élément $\pi\{\frac{2-s-t}{2}\}$ du support cuspidal, on en déduit alors que le seul constituant de $J_{P^{op}_{kg,d}}(\overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{1/2\}}} \times_{op} \overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{-\frac{s-1}{2}\}})$ dont l'image par $J_{P^{op}_{k_sg,kg,d}}$ peut donner se constituant, sont les sous-quotients de l'induite

$$\overleftarrow{[k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k'_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k'_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-t-1-k'_{s-1}}{2}\}} \otimes \\ \overleftarrow{[t-k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k'_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[t-k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[t-k'_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-3+k'_{s-1}}{2}\}}$$

□

*Démonstration. — de (iii)* : considérons un entier $j$, pour lequel $V_{i_j}/V_{i_j-1}$ n'est pas irréductible et soit $V_{i_j-1} \subset U_{i_j} \subset V_{i_j}$ tel que $U_{i_j}/V_{i_j-1}$ est de longueur 2. Il y a alors deux situations soit ce quotient est un sous-espace d'un gradué de la filtration associé au calcul de $J_{P^{op}_{kg,d}}(\overrightarrow{[t-1]}_{\pi\{\frac{s-1}{2}\}} \times_{op} \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{-1/2\}}})$ et est donc un sous-espace de

$$\overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-t-1-k_{s-1}}{2}\}} \otimes \\ \overleftarrow{[t-k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[t-k_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s+k_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[t-k_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-3+k_{s-1}}{2}\}}$$

soit le constituant surnuméraire de $U_{i_j}/V_{i_j-1}$ est un sous-espace de

$$\overleftarrow{[k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k'_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k'_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-t-1-k'_{s-1}}{2}\}} \otimes \\ \overleftarrow{[t-k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k'_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[t-k'_1-1]}_{\pi\{\frac{3-s+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[t-k'_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-3+k'_{s-1}}{2}\}}$$

pour un $s$-uplet $(k'_1,\cdots,k'_s)$ avec d'après ce qui précède $0 \leqslant k'_1 \leqslant \cdots \leqslant k'_s \leqslant t$ et donc égal à $\overleftarrow{[k'_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s-t+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k'_s}{2}\}} \otimes \overleftarrow{[t-k'_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[t-k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-1+k'_s}{2}\}}$.

Il ne reste alors plus qu'à vérifier les deux points suivants :

(a) $\overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s-t+k_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}}$ est le seul constituant irréductible commun aux deux induites

$$\overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s-t+k_1}{2}\}} \text{ et} \\ \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s-t+k_1}{2}\}} \boxtimes \cdots \boxtimes \overleftarrow{[k_{s-1}-1]}_{\pi\{\frac{s-t-1-k_{s-1}}{2}\}};$$

(b) si $\overleftarrow{[k'_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s-t+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k'_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k'_s}{2}\}}$ est un constituant de l'induite

$$\overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}} \times_{op} \overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s-t+k_1}{2}\}}$$

alors $(k'_1,\cdots,k'_s)=(k_1,\cdots,k_s)$.

*Démonstration. — de (a)* : soit $\Pi$ un autre constituant irréductible. Pour trouver son paramètre de Zelevinski, on applique le procédé du §1.3 lequel est de la forme suivante : on prend

$$S \in \Omega\Big(\overleftarrow{[k_1-1]}_{\pi\{\frac{1-s-t+k_1}{2}\}}\Big), \quad S' \in \Omega\Big(\overleftarrow{[k_2-1]}_{\pi\{\frac{3-s-t+k_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[k_s-1]}_{\pi\{\frac{s-t+1-k_s}{2}\}}\Big)$$

que l'on fractionne $S=S_1 \otimes \cdots \otimes S_i$ et $S'=S'_1 \otimes \cdots \otimes S'_i$. L'élément maximal de $\Omega(\Pi)$ est alors de la forme $S_1 \otimes S'_1 \otimes \cdots \otimes S_i \otimes S'_i$. Si on procède de même pour la deuxième induite, on obtient $T_1 \otimes T'_1 \otimes \cdots \otimes T_j \otimes T'_j$. La contradiction découle de l'observation suivante : on écrit $S$ sous la forme $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_k$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, on considère le $s$-uplet $(\alpha_1(i),\cdots,\alpha_s(i))$ associé à $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_i$. D'après le point (ii) ci-avant, il doit exister $i$ tel que $\alpha_1(i) > \alpha_2(i)$ : considérons un tel $i$ minimal. Si on procède de même pour $T$, en notant $(\beta_1(i), \cdots, \beta_s(i))$, on observe que pour tout $i$ et pour tout $1 \leqslant j < s-1$, on a $\beta_j(i) \leqslant \beta_{j+1}(i)$ ce qui contredit le fait que $\alpha_j(i) = \beta_j(i)$ pour tout $i, j$. □

*Démonstration.* — *de (b)* : on considère

$$S \in \Omega([\overleftarrow{k'_1 - 1}]_{\pi\{\frac{1-s-t+k'_1}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{k'_s - 1}]_{\pi\{\frac{s-t+1-k'_s}{2}\}})$$

maximal de sorte que en raisonnant comme dans (a), on obtient que pour tout $i = 1, \cdots, s$, on a $k'_i \leqslant k_i$ et les égalités découlent alors de $\sum_{i=1}^s k_i = \sum_{i=1}^s k'_i$. □

□

□

**1.5. Foncteurs** $\mathrm{red}_\tau$**.** — Pour $h \geqslant 1$, soient :
- $D_{K,h}$ l'algèbre à division centrale sur $K$ d'invariant $1/h$ ; son ordre maximal est noté $\mathcal{D}_{K,tg}$.
- JL la correspondance de Jacquet-Langlands locale qui est une bijection entre les représentations irréductibles admissibles de $D_{K,h}^\times$ et les représentations irréductibles admissibles essentiellement de carré intégrable de $GL_h(K)$.

L'opposée de la valuation de la norme réduite induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} D_{K,h}^\times/\mathcal{D}_{K,h}^\times & \simeq & \mathbb{Z} \\ \delta_v & \mapsto & -v(\mathrm{rn}(\delta_v)) \end{array}.$$

On notera

$$\Xi : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times \qquad (1.5.1)$$

le morphisme défini par $\Xi(1) = q$ ; une racine carrée de $q$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, $\Xi^n$ est défini pour tout $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

***1.5.2 Notation***. — *Pour $t, g$ des entiers positifs et $\pi$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$, $\pi[t]_D$ désignera la représentation $\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_t(\pi))^\vee$ de $D_{K,tg}^\times$.*

*Remarque :* étant donnée une représentation irréductible admissible $\tau$ de $D_{K,h}^\times$ de caractère central $\chi_\tau$, d'après la classification des représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_h(K)$, il existe un diviseur $t$ de $h = tg$ ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale $\pi$ de $GL_g(K)$ tels que $\tau = \pi[t]_D$.

D'après Deligne, Kazhdan et Vignéras, il existe un pseudo-coefficient $\phi_{\mathrm{St}_t(\pi)}$ que l'on notera aussi $\varphi_\tau$ pour $\tau = \pi[t]_D$, dans $\mathcal{C}_c^\infty(GL_h(K), \chi_\tau)$ tel que, cf. [**5**] lemme I.3.4 :
- si $\pi'$ n'est pas un sous-quotient irréductible de $\pi\{-\frac{1-t}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{t-1}{2}\}$, alors $\mathrm{Tr}\ \pi'(\varphi_\tau) = 0$ ;
- si, avec les notations de 1.2.1, $\pi' = [\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_r}]_\pi$ est un sous-quotient irréductible de $\pi\{-\frac{1-t}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{t-1}{2}\}$ pour $(a_1, \cdots, a_r, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_r) \in \Gamma^t$, alors $\mathrm{Tr}\ \pi'(\varphi_\tau) = (-1)^k \mathrm{vol}(D_{K,h}^\times/K^\times)$ où $2k = \sum_{i=1}^r (\epsilon_i - 1)a_i$.

*Remarque :* dans loc. cit. la deuxième propriété, en utilisant la première, est équivalente au fait que pour tout sous-groupe parabolique propre $P$ de Levi $GL_{n_1}(K) \times \cdots \times GL_{n_r}(K)$ et pour toute représentation irréductible $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$, on a

$$\mathrm{Tr}\ \Big(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r\Big)(\varphi_\tau) = 0. \qquad (1.5.3)$$

***1.5.4 Définition***. — Pour $1 \leqslant h \leqslant d$ et $\tau$ une représentation irréductible admissible de $D_{K,h}^\times$, on introduit d'après [**5**] V.5,

$$\mathrm{red}_\tau : \mathrm{Groth}\Big(GL_d(K)\Big) \longrightarrow \mathrm{Groth}\Big(D_{K,h}^\times/\mathcal{D}_{K,h}^\times \times GL_{d-h}(K)\Big)$$

défini comme la composée des deux applications suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Groth}\Big(GL_d(K)\Big) &\longrightarrow \mathrm{Groth}\Big(GL_h(K)\times GL_{d-h}(K)\Big)\\ [\Pi] &\mapsto [J_{P^{op}_{h,d}}(\Pi)\otimes \delta^{1/2}_{P_{h,d}}]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Groth}\Big(GL_h(K)\times GL_{d-h}(K)\Big) &\longrightarrow \mathrm{Groth}\Big(D^\times_{K,h}/\mathcal{D}^\times_{K,h}\times GL_{d-h}(K)\Big)\\ \alpha\otimes\beta &\mapsto \mathrm{vol}(D^\times_{K,tg}/K^\times)^{-1}\textstyle\sum_\psi \mathrm{Tr}\ \alpha(\varphi_{\tau\otimes\psi^\vee})\psi\otimes\beta,\end{aligned}$$

où $\psi$ décrit les caractères de $K^\times$.

Il résulte de (1.5.3) le résultat suivant.

***1.5.5 Lemme***. — *Soit $\pi_1\times\cdots\times\pi_r$ une représentation irréductible de $GL_d(K)$ ; pour toute représentation irréductible $\tau$ de $D^\times_{K,h}$, on a*

$$\mathrm{red}_\tau\Big(\pi_1\times\cdots\times\pi_r\Big)=\sum_{i=1}^r \pi_1\times\cdots\times\pi_{i-1}\times(\mathrm{red}_\tau\,\pi_i)\times\pi_{i+1}\times\cdots\times\pi_r.$$

Ainsi en ce qui concerne les composantes locales des représentations automorphes, on est ramené au calcul des $\mathrm{red}_{\pi[r]_D}\Big([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}\Big)$ qui est alors un corollaire simple de la proposition 1.4.2.

***1.5.6 Corollaire***. — – *Pour tout $r>s+t-1$, on a $\mathrm{red}_{\pi[r]_D}([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi})=(0)$.*

– *Pour $r=s+t-1$ et $t,s>1$ (resp. $t=1$ ou $s=1$) on a*

$$\mathrm{red}_{\pi[s+t-1]_D}([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi})=(-1)^{s-1}\Xi^{\frac{(s-1)(t-1)g}{2}}\otimes[\overrightarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{-\frac{(s+t-1)g}{2}\}}},$$

*(resp. la représentation triviale de $\mathbb{Z}\simeq D^\times_{K,tg}/\mathcal{D}^\times_{K,tg}$).*

– *Pour $1\leqslant r\leqslant s+t-1$, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{red}_{\pi[r]_D}([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}) = &\sum_{k=\max(0,r-t)}^{\min(r,s)-1}(-1)^k\Xi^{\frac{stg-rg+s-t+r-1-2k}{2}}\otimes\\ &\Big([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1-s}{2}\}}\boxplus\cdots\boxplus[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1-s+2(s-2-k)}{2}\}}\boxplus[\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{\frac{1-s+2(s-3-k)+2}{2}\}}\boxplus\\ &\cdots\boxplus[\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{\frac{s-3+2}{2}\}}\boxplus[\overleftarrow{t-r+k-1}]_{\pi\{\frac{k-r}{2}\}}\Big)\{-\frac{rg}{2}\}.\end{aligned}\tag{1.5.6}$$

*Remarque :* on trouvera une illustration graphique de ce résultat à la figure (2).

***1.5.7 Notation***. — *Pour tout $0\leqslant k_s\leqslant s-1$ et $0\leqslant k_t\leqslant t-1$, on notera $R_\pi(s,t)(k_s,k_t)\{\frac{rg}{2}\}$ la représentation irréductible*

$$\begin{aligned}&[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1-s}{2}\}}\boxplus\cdots\boxplus[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1-s+2(s-2-k_s)}{2}\}}\boxplus\\ &\qquad[\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{\frac{1-s+2(s-3-k_s)+2}{2}\}}\boxplus\cdots\boxplus[\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{\frac{s-3+2}{2}\}}\boxplus[\overleftarrow{t-k_t-2}]_{\pi\{\frac{k_t+}{2}\}}.\end{aligned}$$

*Remarque :* avec ces notations (1.5.6) se réécrit

$$\sum_{k=\max(0,r-t)}^{\min(r,s)-1}(-1)^k\Xi^{\frac{stg-rg+s-t+r-1-2k}{2}}\otimes R_\pi(s,t)(k,r-k-1).$$

## 2. Variétés de Shimura simples et système locaux de Harris-Taylor : rappels

Dans cette section on rappelle des notations sur les objets géométriques de [**5**] ainsi que les principaux résultats faisceautiques de [**3**].

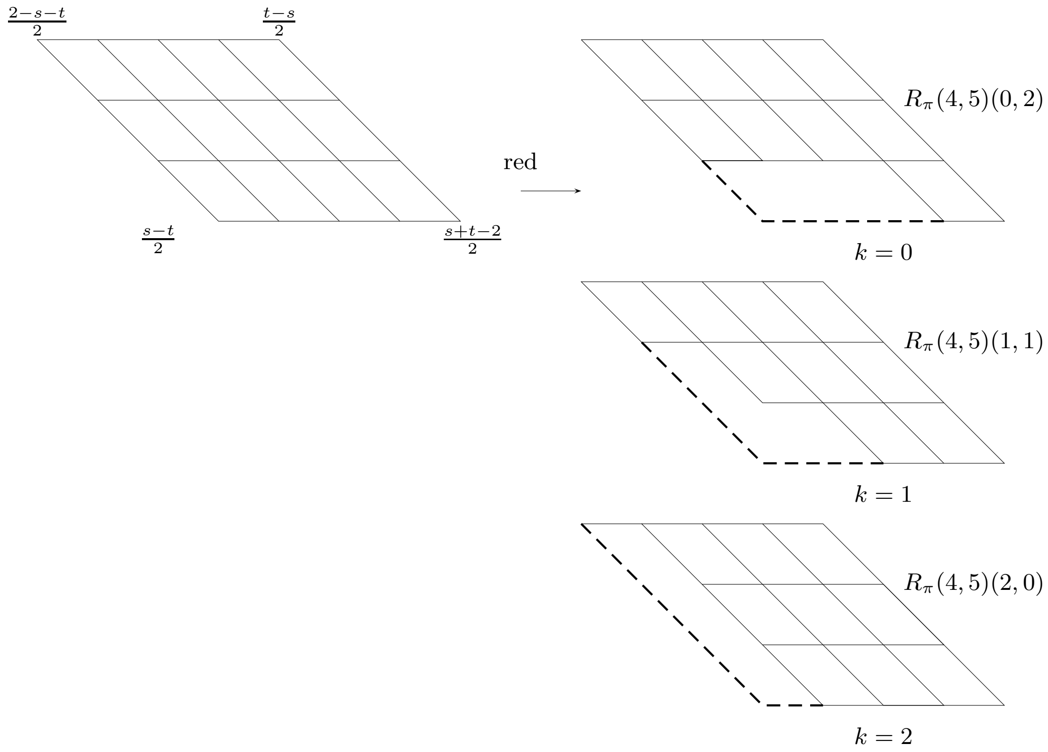


FIGURE 2. Illustration graphique du corollaire 1.5.6 dans le cas $r=3$ avec $(s,t)=(4,5)$.

**2.1. Classes d'équivalences inertielles.** — Pour tout entier $d \geqslant 1$, la correspondance de Langlands $L_{K,d}$ est une certaine bijection entre les classes d'équivalences des représentation irréductibles admissibles de $GL_d(K)$ et les représentations irréductibles $l$-adiques, de dimension $d$, Frobenius semi-simples du groupe de Weil-Deligne $WD_K$ de $K$. La famille $(L_{K,d})_{d\geqslant 1}$ est caractérisée par certaines propriétés fines de conservation de facteurs $L$ et $\epsilon$ de paires ; sa construction est l'aboutissement de [**5**]. En particulier pour $d=1$ on obtient l'isomorphisme d'Artin

$$\mathrm{Art}_K^{-1} : W_K^{ab} \simeq K^\times$$

de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques $\mathrm{Fr}^{-1}$ de $W_K$ sur les uniformisantes de $\mathcal{O}_K$ ; on notera deg le composé de $\mathrm{Art}_K$ avec la valuation, i.e. $\deg(\mathrm{Fr}) = -1$.
*Remarque :* pour tout $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, le caractère $\Xi^k$ du paragraphe précédent peut, via l'application deg, être considéré comme un caractère non ramifié de $W_K$ auquel cas on le notera selon l'usage $(k)$.

***2.1.1 Notation***. — *Pour $\pi$ une représentation de $GL_g(K)$, $\mathfrak{L}(\pi)$ désignera $L_{K,g}(\pi)^\vee$.*

***2.1.2 Définitions***. — *Deux représentations $\tau$ et $\tau'$ (resp. $\pi$ et $\pi'$) de $D_{K,h}^\times$ (resp. de $GL_g(K)$) sont dites inertiellement équivalentes et on note $\tau \sim^i \tau'$ (resp. $\pi \sim^i \pi'$), s'il existe un caractère $\xi : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\tau \simeq \tau' \otimes \xi \circ \mathrm{val} \circ \mathrm{rn}$ (resp. $\pi \simeq \pi' \otimes \xi \circ \mathrm{val} \circ \det$). On note $\mathfrak{A}(\tau)$ (resp. $\mathfrak{A}(\pi)$) l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, tels que $\tau \otimes \chi \circ \mathrm{val}(\mathrm{rn}) \simeq \tau$ (resp. $\pi \otimes \chi \circ \mathrm{val}(\det) \simeq \pi$) ; le cardinal de $\mathfrak{A}(\tau)$ (resp. $\mathfrak{A}(\pi)$) sera noté $e_\tau$ (resp. $e_\pi$).*

*Remarque :* par compatibilité de la correspondance de Jacquet-Langlands locale à la torsion par des caractères non ramifiés, pour tout entier $g$ et pour toute représentation irréductible cuspidale $\pi$ de $GL_g(K)$ et pour tout $t \geqslant 1$, l'entier $e_{\pi[t]_D}$ est égal à $e_\pi$.

Soient $\tau$ une représentation irréductible admissible de $D_{K,h}^\times$ de caractère central $\chi_\tau$ et $\rho$ une sous-représentation irréductible de la restriction de $\tau$ à $\mathcal{D}_{K,h}^\times$. On prolonge $\rho$ à $D_{K,h}^{\times,1} := \mathcal{D}_{K,h}^\times \times \varpi_K^{\mathbb{Z}}$ en faisant agir $\varpi_K$ par le scalaire $\chi_\tau(\varpi_K)$. De la réciprocité de Frobenius on en déduit alors la formule suivante, cf. [**3**] proposition 1.1.4 :

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{D}_{K,h}^\times \times \varpi_K^{\mathbb{Z}}}^{D_{K,h}^\times} \rho = \bigoplus_{\tau' \in \Diamond(\tau)} \tau' \tag{2.1.3}$$

où $\Diamond(\tau)$ désigne l'ensemble des représentation irréductibles de $D_{K,h}^\times$ inertiellement équivalentes à $\tau$ et de caractère central $\chi_\tau$. De la même façon, cf. loc. cit corollaire 1.1.6, étant donnée une représentation irréductible $\tau$ de $D_{K,h}^\times$, la restriction de $\tau$ à $\mathcal{D}_{K,h}^\times$ se décompose en une somme de $e_\tau$ représentations irréductibles

$$\tau_{|\mathcal{D}_{K,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_\tau} \rho_i. \tag{2.1.4}$$

et $\Diamond(\tau)$ est de cardinal $\frac{h}{e_\tau}$.

Pour $e \geqslant 1$, soit $\Delta(e)$ un ensemble d'éléments $\delta \in D_{K,h}^\times$ tel que les $v(\mathrm{rn}(\delta))$ forment un système de représentants de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.

***2.1.5 Définition***. — Pour $V$ un $\mathcal{D}_{K,h}^\times$-module, on notera

$$V^{\dagger e} := \bigoplus_{\delta \in \Delta(e)} V_\delta$$

où l'action de $\delta_0 \in \mathcal{D}_{K,h}^\times$ sur $V_\delta := V$ est donnée par celle de $\delta \circ \delta_0 \circ \delta^{-1}$ sur $V$.

**2.2. Strates de Newton.** — On considère les variétés de Shimura simples associées à des groupes unitaires telles qu'elles sont définies dans [**5**]. Rappelons brièvement de quoi il s'agit, cf. [**5**] I.7. Soit $F = F^+E$ un corps CM, $E/\mathbb{Q}$ une extension quadratique imaginaire pure, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. On peut alors définir un groupe unitaire $G$, noté $G_\tau$ dans loc. cit., tel que

- $G(\mathbb{R}) \simeq U(1, d-1) \times U(0, d)^{r-1}$ ;
- $G(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ où $v = v_1, v_2, \cdots, v_r$ sont les places de $F$ au dessus de la place $u$ de $E$ telle que $p = u^c u$ et où $B$ est une algèbre à division centrale sur $F$ de dimension $d^2$ vérifiant certaines propriétés, cf. [**5**], dont en particulier d'être soit décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place $v$.

*Remarque :* on notera encore $v$ pour la valuation de $F_v$.

***2.2.1 Définition***. — Soit $\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)$ le sous-ensemble de $H^1(\mathbb{Q}, G)$ constitué des éléments qui deviennent triviaux dans $H^1(\mathbb{Q}_{p'}, G)$ pour toute place $p'$ de $\mathbb{Q}$.

Pour tout sous-groupe compact assez petit $U^p$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times) \tag{2.2.2}$$

et on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-groupes compacts assez petit de la forme $U^p(m)$. A la donnée de $G$ et $\mathcal{I}$, on associe un **schéma de Hecke** $X_\mathcal{I} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_v$ au sens de [**3**].

*2.2.3* — Pour tout $1 \leqslant h \leqslant d$, on dispose de sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$-schémas de Hecke pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$, fermés (resp. ouverts) notés $\overline{X}_\mathcal{I}^{\geqslant h}$ (resp. $\overline{X}_\mathcal{I}^{=h}$) de pure dimension $d-h$. Pour tout $1 \leqslant h < d$, les strates

$\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d}(F_v)$ au sens où il existe un sous-schéma fermé $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$ de Hecke pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$ tel que :

$$\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=h} \simeq \overline{X}_{\mathcal{I},1}^{=h} \times^{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v)$$

On note $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{\geqslant h}$ l'adhérence de $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$ dans $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geqslant h}$. On rappelle que $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$ agit à travers son quotient $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ donné par l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. Par ailleurs l'action d'un élément $w_v \in W_v$ est donné par l'action de $-\deg(w_v)$.
*Remarque :* les points géométriques du $\overline{\mathbb{F}}_p$-schéma de Hecke $X_{\mathcal{I}}^{=d}$ de dimension nulle sont dits supersinguliers.

***2.2.4 Définitions***. — *Soit $H_0/\mathbb{Q}$ le groupe algébrique forme intérieure de $G$ telle que $H_0(\mathbb{R})$ est compact et $H_0(\mathbb{A}^\infty) \simeq G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times D_{v,d}^\times \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$.*

***2.2.5 Proposition***. — *(cf. [**5**] lemme V.1.2 p.153) L'ensemble des points supersignuliers $X_{\mathcal{I}}^{=d}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est constitué de $\sharp \operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$ classes d'isogénies telles que chaque classe est isomorphe, en tant que $H_0(\mathbb{A}^\infty)$-ensemble, à $H_0(\mathbb{Q})\backslash\Big(H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z}\Big)$. En ce qui concerne les actions*

- *celle de $c_v \in W_v$ est donnée par la translation de $-\deg(c_v)$ sur la composante $\mathbb{Z} \simeq D_{v,d}^\times/\mathcal{D}_{v,d}^\times$ qui envoie $-1$ sur une uniformisante $\Pi_{v,d}$ de $D_{v,d}$ ;*
- *celle d'un élément $g^\infty \in H_0(\mathbb{A}^\infty)$ est donnée par la translation à gauche de $g^{\infty,v}$ sur $H_0(\mathbb{A}^{\infty,v})$ )et la translation de $v(\det(g_v))$ sur la composante $\mathbb{Z}$.*

**2.3. Variétés d'Igusa.** — Dans [**5**], les auteurs définissent les variétés d'Igusa de première espèce $I_{U^p(m)}^h \longrightarrow \overline{X}_{U^p(\overline{m})}^{=h}$, où $\overline{m} = (0, m_2, \cdots, m_r)$, qui est l'espace des modules des isomorphismes

$$\alpha_1^{et} : (\varpi^{-m_1}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v)^{d-h} \times \overline{X}_{U^p,\overline{m}}^{=h} \simeq \mathcal{G}^{et}[\varpi^{m_1}].$$

On obtient ainsi un revêtement galoisien de $\overline{X}_{U^p,\overline{m}}^{=h}$ de groupe de Galois $GL_{d-h}(\mathcal{O}_v/\varpi^{m_1})$.

Les variétés d'Igusa de seconde espèce sont des revêtements galoisiens $J_{U^p(m),s}^h \longrightarrow I_{U^p(m)}^h \times \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$ de groupe de Galois $(\mathcal{D}_{v,h}/\varpi^s)^\times$. On peut alors définir, cf. [**5**] p.134, sur la tour des $J_{U^p(m),s}^h$ une action par correspondances du groupe

$$G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{F_v,h}^\times,$$

où $(\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+$ désigne le sous-semi-groupe de $\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ formé des éléments $(c, g)$ tels que $\varpi_v^{\lfloor -c/h \rfloor} g \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_v)$.
*Remarque :* on notera aussi $(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v))^+$ le sous-semi groupe de $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$ formé des $(g^0, g^{et})$ tels qu'il existe $a \in F_v^\times$ tel que $ag^{et} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_v)$ et $(ag^0)^{-1} \in \mathbb{M}_h(\mathcal{O}_v)$. La surjection $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v) \longrightarrow \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ qui à $(g_v^c, g_v^{et})$ associe $(v(\det g_v^c), g_v^{et})$, induit alors une surjection de $(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v))^+$ sur $(\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+$.

**2.4. Systèmes locaux de Harris-Taylor.** — En ce qui concerne la notion de faisceau de Hecke, on renvoie le lecteur à [**3**]. A toute représentation irréductible admissible $\tau_v$ de $D_{v,h}^\times$, on associe un système local de Hecke $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},1}$ sur $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$ pour le groupe

$$G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{v,h}^\times/\mathcal{D}_{v,h}^\times$$

dont l'action, cf. [**5**] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{F_v,h}^\times$ avec

$$(g^{\infty,p}, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta) \mapsto (g^{p,\infty}, g_{p,0} q^{v(\det \delta) - c}, \delta, g_v^{et}, g_{v_i}). \tag{2.4.1}$$

On note $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},1}$ le faisceau sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$ induit associé :

$$\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}} := \mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},1} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

*Remarque :* d'après (2.1.4), $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}}$ se présente sous la forme d'une somme directe de $e_{\tau_v}$ faisceaux de Hecke irréductibles $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\tau_v}} \mathfrak{F}_{\rho_{v,i},\mathcal{I}}$ où $(\tau_v)_{|\mathcal{D}_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\tau_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible.

**2.5. Rappels des notations de [3].** — On considère les flèches suivantes de schémas de Hecke

$$i_{\mathcal{I}}^h : \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geqslant h} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}} = \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geqslant 1}, \qquad j_{\mathcal{I}}^{\geqslant h} : \overline{X}_{\mathcal{I}}^{=h} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geqslant h}$$

Dans la suite pour $1 \leqslant g \leqslant d$, $s$ désignera la partie entière de $d/g$ et $t$ un entier strictement positif inférieur ou égal à $s$. Par ailleurs $\pi_v$ désignera une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$.

– Soit $\mathcal{F}(\pi_v,t)_1$ (resp. $\mathcal{F}(\pi_v,t)$) le faisceau de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{=tg}$ (resp. $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=tg}$) précédemment noté $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D,\mathcal{I},1}$ (resp. $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D,\mathcal{I}}$).
– Pour $\Pi_t$ une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on note $HT(\pi_v,\Pi_t)$ le $W_v$-faisceau pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{tg}$ pour $G(\mathbb{A}^\infty)$ défini par

$$H(\pi_v,\Pi_t) := \mathcal{F}(\pi_v,t)[d-tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t,$$

où l'action se déduit par induction par celle de

$$(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, g_v^c, \sigma) \in$$
$$G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-tg}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times GL_{tg}(F_v) \times W_v$$

sur le faisceau non induit, via
  – $(g^p, g_{p,0}q^{-c+v(\det g_v^c)-\deg\sigma}, \gamma, g^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ sur $\mathcal{F}(t,\pi_v)$ où $\gamma \in D_{v,tg}^\times/\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ est tel que $v(\mathrm{rn}\gamma) = v(\det g_v^c) - \deg\sigma$ ;
  – $g_v^c$ sur $\Pi_t$,

et où comme précédemment le radical unipotent de $P_{tg,d}(F_v)$ agit trivialement.
*Remarque :* l'action de $W_v$ sur ces faisceaux d'Harris-Taylor se factorise par l'application deg ; dans [3] on a choisi de les considérer comme des $\mathbb{Z}$-faisceaux de Hecke de sorte que l'action de $c_v \in W_v$ est donnée par celle de $(q^{-\deg c_v}, \deg c_v) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Z}$.
– On note $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ le $W_v$-faisceaux pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geqslant 1}$ de support $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geqslant h}$ et de poids zéro défini par

$$i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!*}^{\geqslant tg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v).$$

L'action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$ sur $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ se définit par induction en faisant agir

$$(g^p, g_{p,0}, g_v^c, g_v^{et}, g_{v_i}, \sigma) \in G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$$

via l'action de :
  – $(g^p, g_{p,0}q^{-\deg\sigma}, \gamma, g_v^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ sur $\mathcal{F}(t,\pi_v)$ où $\gamma \in D_{v,tg}^\times$ est tel que $v(\mathrm{rn}\delta) = v(\det g_v^c) - \deg\sigma$ ;
  – $(g_v^c, \sigma)$ sur $\mathrm{St}_t(\pi_v) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)$.

*Remarque :* on notera aussi que $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ ne dépend, en tant que $W_v$-faisceau pervers de Hecke, que de la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$.

**2.6. Résultats globaux de [3].** — Les résultats principaux de [**3**] reposent essentiellement sur la série d'égalités dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke donnée à la proposition 4.3.1 et précisée par le corollaire 5.4.1 de loc. cit., que nous reproduisons ci-dessous.

***2.6.1 Proposition.*** — *Pour tout $1 \leqslant t \leqslant s$, on a les égalités dans le groupe de Grothendieck $\mathfrak{G}$, cf.* [**3**]*, des $W_v$-faisceaux pervers sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}$ :*

$$i^{tg}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{i=t}^{s} i^{ig}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant ig}_{\mathcal{I},!*} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-t-1}]_{\pi_v})(-\frac{t-i}{2}) \tag{2.6.2}$$

$$i^{tg}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r i^{(t+r)g}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant (t+r)g}_{\mathcal{I},!} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v})(r/2) \tag{2.6.3}$$

*Remarque :* la série d'égalités de (2.6.3) s'obtient directement par récurrence à partir de celles de (2.6.2).

Le faisceau pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v,\mathcal{I}}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2})$ sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}$ définit un $W_v$-faisceau pervers de Hecke que l'on note $\Psi_{\mathcal{I},v}$. Pour $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on note $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ la composante $\pi_v$-isotypique de $\Psi_{\mathcal{I},v}$. La restriction de l'action de $W_v$ à $I_v$ est potentiellement unipotente ce qui fournit un opérateur de monodromie pro-nilpotent $N_{\mathcal{I}} \in \mathrm{End}_{\mathrm{FPH}(X)}(\Psi_{\mathcal{I}})$ qui définit deux filtrations : la filtration par les noyaux $K_{\mathcal{I},\bullet}$ qui est croissante, et celle par les images $I^{\bullet}_{\mathcal{I}}$ qui est décroissante. Leur convolution donne la filtration $M_{\mathcal{I},\bullet}$ dite de monodromie. On note $gr^p_I(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ (resp. $gr^K_q(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$) le gradué $I^p/I^{p+1}(P_{\mathcal{I}})$ (resp. $K_{q+1}/K_q(P_{\mathcal{I}})$). On a alors

$$gr^q_I gr^K_p(\Psi^{\dagger e_{\pi_v}}_{\mathcal{I},\pi_v}) = \begin{cases} \mathcal{P}(p+q+1,\pi_v)(-\frac{p-q}{2}) \text{ si } p,q \geqslant 0 \text{ et } p+q+1 \leqslant \lfloor \frac{d}{g} \rfloor \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

*Remarque :* au §2.4 de [**3**], on explique comment se débarrasser de l'exposant $\dagger e_{\pi_v}$ dans la formule précédente ainsi que l'intérêt de cette notation. Dans notre contexte cohomologique cet exposant est plutôt encombrant puisqu'il fait apparaître un facteur $e_{\pi_v}$ dans toutes nos formules, cependant afin de garder des notations similaires à celles de [**3**] nous avons préféré le conserver.

Signalons enfin qu'étant donnée une tour de points géométriques $z$ de $\overline{X}^{=tg}_{\mathcal{I}}$, la fibre $z^*\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D}$ est munie d'une action du noyau $(D^\times_{v,tg})^0$ de la valuation de la norme réduite telle que, en tant que $D^\times_{v,tg} \times \mathbb{Z}$-module :

$$\mathrm{Ind}_{(D^\times_{v,tg})^0}^{D^\times_{v,tg}} z^*\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D} \simeq \bigoplus_{\pi'_v \sim^i \pi_v} \pi'_v[t]_D \otimes \Big((\chi'_v)^{-1} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{U}(\pi_v)} \chi^{-1} \circ \mathrm{val} \circ \det\Big) \tag{2.6.4}$$

où $\chi'_v$ désigne le caractère central de $\pi'_v$. En particulier on notera que pour $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ la formule devient :

$$\mathrm{Ind}_{(D^\times_{v,tg})^0}^{D^\times_{v,tg}} z^*\mathcal{P}(t,\pi_v) \simeq e_{\pi_v} \bigoplus_{\pi'_v \sim^i \pi_v} [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_{v,0}} \otimes \pi_{v,0}[t]_D \otimes \mathfrak{L}(\pi_{v,0}),$$

où $\pi_{v,0}$ est unitaire dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$.

**2.7. Résultats locaux de [3].** — Soit $d \geqslant 1$ et $\Sigma_{K,d}$ le $\mathcal{O}_K$-module de Barsotti-Tate formel sur $\overline{\kappa}$ de hauteur $d$, cf. [**5**] §II. On considère la catégorie $C$ des $\mathcal{O}_K$-algèbres locales, artiniennes, de corps résiduel $\overline{\kappa}$. Le foncteur qui à un objet $R$ de $C$ associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations sur $R$ de $\Sigma_{K,d}$ munies d'une structure de niveau $n$ est pro-représentable par un anneau local complet, noethérien, régulier $R_{K,d,n}$ de corps résiduel $\overline{\kappa}$.

***2.7.1 Définition.*** — Soit $\Psi^i_{K,l,d,n}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural Spf $R_{K,d,n} \longrightarrow$ Spf $\hat{\mathcal{O}}^{nr}_K$, et on pose $\Psi^i_{K,l,d} = \varinjlim_n \Psi^i_{K,l,d,n}$

Le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\Psi^i_{K,l,d}$ est muni entre autre d'une action de $GL_d(\mathcal{O}_K)$ ; pour un caractère $\chi$ de $K^\times$ d'image finie, soit $\Psi_{K,l,d,\chi}$ le facteur direct de $\Psi_{K,l,d,\chi}$ sur lequel le centre de $GL_d(\mathcal{O})$ agit via $\chi$. Ce dernier espace est alors munie d'une action du groupe $GDW_K(d)^1 = GDW_K(d)^0\varpi_K^{\mathbb{Z}}$ où $GDW_K(d)^0$ (resp. $GDW_K(d)^1$) est le noyau de l'application

$$\begin{cases} GDW_K(d) := GL_d(K)\times D^\times_{K,d}\times W_K & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \qquad (g,\delta,c) & \mapsto \mathrm{val}(\det g^{-1}\mathrm{rn}\delta)+\deg c \end{cases}$$

(resp. composée avec la surjection canonique $\mathbb{Z}\longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$). On définit alors

$$\mathcal{U}^i_{K,l,d,\chi}\simeq \mathrm{Ind}_{GDW_K(d)^1}^{GDW_K(d)}\Psi^i_{K,l,d,\chi}$$

qui est donc une représentation de $GDW_K(d)$.

***2.7.2 Théorème***. — *Pour tout diviseur $g$ de $d=sg$ et toute représentation irréductible cuspidale $\pi$ de $GL_g(K)$, on a*

$$\mathcal{U}^{d-s+i}_{K,l,d}(\pi[s]_D)\simeq \begin{cases} \mathfrak{L}(\pi)(-\frac{d-s+2i}{2})\otimes[\overleftarrow{i},\overrightarrow{s-1-i}]_\pi & 0\leqslant i<s \\ 0 & i<0 \end{cases}$$

*où $[\overleftarrow{i},\overrightarrow{s-1-i}]_\pi$ est l'unique quotient irréductible de l'induite* $\mathrm{St}_i(\pi)\overrightarrow{\times}\mathrm{Speh}_{s-i}(\pi)$.

## 3. Groupes de cohomologie des $\mathcal{P}(t,\pi_v)$

**3.1. Définitions et notations.** — Dans la suite on fixe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation $\xi$ de dimension finie de $G$ ce qui d'après [**5**] p.96, fournit un système local $\mathcal{L}_\xi$.
*Remarque :* dans [**3**], on utilisait seulement le cas $\xi=1$.

***3.1.1 Définition***. — Étant donné un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\overline{X}_\mathcal{I}$, on notera $\mathcal{F}_\xi$ le faisceau $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\xi$ qui d'après [**5**] p.98 est pur de poids $\omega(\xi)$.

*Remarque :* d'après [**5**] p.98 et p.150, $\mathcal{L}_\xi$ est un $W_v$-faisceau pervers de Hecke pour $G(\mathbb{A}^\infty)$ où $g^\infty$ agit par $\xi(g_l)$ et $\sigma\in W_v$ par $\Xi^{-\omega(\xi)/2}$ avec les notations de loc. cit.

***3.1.2 Définition***. — Une représentation automorphe $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$ sera dite cohomologique pour $\xi$ s'il existe $i$ tel que

$$H^i((\mathrm{Lie}G(\mathbb{R}))\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C},U_\tau,\Pi_\infty\otimes(\xi')^\vee)\neq(0)$$

où $U_\tau$ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, maximal, cf. [**5**] p.92, et où $\xi'$ est le caractère sur $\mathbb{C}$ associé à $\xi$ via un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_l\simeq\mathbb{C}$ fixé. On notera $d^i_\xi(\pi_\infty)$ la dimension de cet espace.

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes :

– étant donnée une représentation irréductible $\Upsilon^{\infty,v}$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,v})=H_0(\mathbb{A}^{\infty,v})$, on notera

$$\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})\quad(\text{resp. }\mathcal{U}_{H_0,\xi}(\Upsilon^{\infty,v}))$$

l'ensemble des représentations irréductibles automorphes $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$ (resp. $\overline{\Pi}$ de $H_0(\mathbb{A})$) cohomologiques pour $\xi^\vee$, telles que $\Pi^{\infty,v}\simeq\Upsilon^{\infty,v}$ (resp. $\overline{\Pi}^{\infty,v}\simeq\Upsilon^{\infty,v}$) ; On notera $m(\Pi)$ (resp. $m(\overline{\Pi})$) la multiplicité de $\Pi$) (resp. de $\overline{\Pi}$) dans l'espace des formes automorphes.

– Pour un $W_v$-faisceau pervers de Hecke $P$ sur $\overline{X}_\mathcal{I}$,

$$[H^*(P_\xi)]$$

désignera l'image de $\sum_i(-1)^iH^i(\overline{X}_\mathcal{I},P\otimes\mathcal{L}_\xi)$ dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $G(\mathbb{A}^\infty)\times W_v$.

– Pour Groth le groupe de Grothendieck d'un groupe de la forme $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \tilde{G}$, on notera Groth$\{\Pi^{\infty,v}\}$ le sous-groupe facteur direct de Groth engendré par les irréductibles de la forme $\Pi^{\infty,v} \otimes \sigma$ où $\sigma$ est une représentation irréductible quelconque de $\tilde{G}$. On notera alors
$$[H^*(P_\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$$
la projection de $[H^*(P_\xi)]$ sur ce facteur direct.

*Remarque :* d'après le corollaire VI.2.2 de [**5**], pour $\Pi, \Pi' \in \mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$ (resp. $\overline{\Pi}, \overline{\Pi}' \in \mathcal{U}_{H_0,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$), on a $\Pi_v \simeq \Pi'_v$ (resp. $\overline{\Pi}_v \simeq \overline{\Pi}'_v$). Par ailleurs le corollaire VI.2.7 de [**5**] décrit $\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$ et $\mathcal{U}_{H_0,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$ dans les situations où d'après [**5**] VI.2.4 et V.6.4, $\Pi_v$ est générique.

*Remarque :* on rappelle que $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$. Pour $\Pi$ une représentation de $G(\mathbb{A})$, sa composante pour le facteur de similitude $\mathbb{Q}_p^\times$, sera noté comme dans [**5**], $\Pi_{p,0}$. Comme tous les compacts de $\mathcal{I}$ contiennent le facteur $\mathbb{Z}_p^\times$, les représentations $\Pi$ qui vont intervenir, par la suite, dans les différents groupes de cohomologie, devront toutes vérifier que $(\Pi_{p,0})_{|\mathbb{Z}_p^\times} = 1$.

**3.2. Cohomologie d'un faisceau de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=d}$.** — Étant donné un faisceau de Hecke à support dans les points supersinguliers, ses groupes de cohomologie $H^i$ son nuls pour tout $i \neq 0$ ; en ce qui concerne son $H^0$, il résulte de la description de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=d}$ rappelée au §2.2, les résultats suivants.

***3.2.1 Proposition***. — *(cf. [**3**] proposition 5.1.1) Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ un faisceau de Hecke sur la composante $\overline{X}_{\mathcal{I},i}^{=d}$ indexée par $i$ de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=d} = \prod_{i \in \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G)} \mathrm{Sh}_{\mathcal{I}}(G,X)^{=d}$. On fixe une tour de points supersinguliers $z_i$ de $\overline{X}_{\mathcal{I},i}^{=d}$.*

*(i) La fibre $z_i^*\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est munie d'une action de $H_0(\mathbb{Q}) \times GL_d(F_v)^0$ où $GL_d(F_v)^0$ est le noyau de la valuation du déterminant.*

*(ii) En tant que $G(\mathbb{A}^\infty) \simeq H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_d(F_v)$-module, on a*
$$H^0(\overline{X}_{\mathcal{I},i}^{=d}, \mathcal{F}_{\mathcal{I}}) \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{H_0(\mathbb{Q})}^{H_0(\mathbb{A}^{\infty,v})\times\mathbb{Z}} z_i^*\mathcal{F}_{\mathcal{I}}\Big)^{\mathbb{Z}_p^\times}$$
*avec $\delta \in H_0(\mathbb{Q}) \mapsto (\delta^{\infty,v}, \mathrm{val} \circ \mathrm{rn}(\delta_v)) \in H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z}$ et où l'action de $g_v \in GL_d(F_v)$ est donnée par celle de $(g_0^{-\mathrm{val}\det g_v} g_v, \mathrm{val}\det g_v) \in GL_d(F_v)^0 \times \mathbb{Z}$ où $g_0 \in GL_d(F_v)$ est un élément fixé tel que* $\mathrm{val}\det g_0 = 1$.

***3.2.2 Corollaire***. — *(cf. [**3**] corollaire 5.1.2) Avec les notations de la proposition précédente, si $z_i^*\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est munie d'une action du noyau $(D_{v,d}^\times)^0$ de la valuation de la norme réduite compatible à l'action de $H_0(\mathbb{Q}) \hookrightarrow D_{v,d}^\times$, alors*
$$H^0(\overline{X}_{\mathcal{I},i}^{=d}, \mathcal{F}_{\mathcal{I}}) \simeq \mathcal{C}^\infty(H_0(\mathbb{Q})\backslash H_0(\mathbb{A}^\infty))^{\mathbb{Z}_p^\times} \otimes_{D_{v,d}^\times} \mathrm{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0}^{D_{v,d}^\times} z_i^*\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \tag{3.2.3}$$

En utilisant (2.6.4), l'isomorphisme (3.2.3) pour $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \mathcal{F}_\xi(s,\pi_v)$ s'écrit comme suit.

***3.2.4 Corollaire***. — *Soit $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ où $g$ divise $d = sg$. Pour toute représentation irréductible $\Pi^{\infty,v}$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$ telle que $(\Pi_{p,0})_{|\mathbb{Z}_p^\times} = 1$, en tant que $\mathbb{Z}$-module on a :*
$$[H^0(\mathcal{F}_\xi(s,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\} = \sharp\,\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G) \sum_{\chi_0:\mathbb{Z}\to\overline{\mathbb{Q}}_l} \sum_{\substack{\overline{\Pi}\in\mathfrak{U}_{H_0,\xi}(\Pi^{\infty,v}) \\ \overline{\Pi}_v \simeq (\pi_v \otimes \chi_0 \circ \mathrm{val} \circ \det)[s]_D}} m(\overline{\Pi}) \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{A}(\pi_v)} \chi_0^{-1}\chi^{-1}. \tag{3.2.5}$$

*Remarque :* d'après [**5**] VI.2.2, dans la somme ci-dessus il y a au plus un $\chi_0$ qui contribue à donner des termes non nuls. En ce qui concerne l'action de $c_v \in W_v$, on rappelle qu'elle est donnée par celle $(q^{-\deg c_v}, \deg c_v) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Z}$.

De la définition des actions sur le faisceau de Hecke $HT_\xi(s,\pi_v)$, on obtient le résultat suivant où dans la somme au plus un $\pi'_v$ contribue.

***3.2.6 Corollaire***. — *Sous les hypothèses du corollaire précédent, en tant que $GL_d(F_v)\times W_v$-module, on a*

$$[H^0(\mathcal{P}_\xi(s,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\} = \sharp\operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q},G)e_{\pi_v}\sum_{\pi'_v\sim^i\pi_v}\sum_{\substack{\overline{\Pi}\in\mathfrak{U}_{H_0,\xi}(\Pi^{\infty,v})\\ \overline{\Pi}_v\simeq\pi'_v[s]_D}} m(\overline{\Pi})[\overleftarrow{s-1}]_{\pi'_v}\otimes\Big(\mathfrak{L}(\pi'_v)\otimes\overline{\Pi}_{p,0}(\operatorname{Art}^{-1}_{F_v})\Big).$$

*Remarque :* par pureté, $\mathfrak{L}(\pi'_v)\otimes\overline{\Pi}_{p,0}(\operatorname{Art}^{-1}_{F_v})$ doit être pur de poids $\omega_\xi$ ; ainsi si $\pi_{v,0}$ désigne la représentation unitaire de la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$, si $\pi'_v\simeq\pi_{v,0}\{r\}$ alors $\overline{\Pi}_{p,0}(p)=q^{-r-\omega(\xi)/2}$.

**3.3. Une correspondance de Jacquet-Langlands globale.** — Commençons par des rappels de [**5**] sur la cohomologie à supports compacts des $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}}$.

***3.3.1 Proposition***. — *(cf. [**5**] V.5.4, V.6.4, VI.2.4) Soit $\Pi$ une représentation de $G(\mathbb{A})$ telle que $(\Pi_{p,0})_{|\mathbb{Z}_p^\times}=1$. Dans le groupe de Grothendieck de $GL_{d-h}(F_v)\times\mathbb{Z}$, on a l'égalité suivante :*

$$d[H^*_c(\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},1,\xi})]\{\Pi^{\infty,v}\} = \sharp\operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q},G)\sum_{\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})}\epsilon(\Pi)m(\Pi)d^*_\xi(\Pi_\infty)\operatorname{Red}_{\tau_v}(\Pi_v) \qquad (3.3.2)$$

*où $\epsilon(\Pi)$ est un signe qui dépend de $\Pi$ et $\operatorname{Red}_{\tau_v}$ : $\operatorname{Groth}(GL_d(F_v))\longrightarrow\operatorname{Groth}(D^\times_{v,h}/\mathcal{D}^\times_{v,h}\times GL_{d-h}(F_v))$ est défini par*

$$\operatorname{Red}_{\tau_v}(\Pi_v)=\operatorname{red}_{\tau_v}(\Pi_v)\otimes\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{U}(\tau_v)}\chi^{-1}.$$

*Démonstration*. — D'après [**5**] V.5.4, on a $d[H^*_c(\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},1,\xi})]=\operatorname{Red}_{\tau_v}\Big([H^*(\Psi_{\mathcal{I},\xi})]\Big)$. On écrit

$$[H^*(\Psi_{\mathcal{I},\xi})]=\sum_{\Upsilon^\infty}\Upsilon^\infty\otimes R^*_\xi(\Upsilon^\infty)$$

où d'après [**5**] V.6.4 la parité des $i$ tels que $R^i_\xi(\Upsilon^\infty)\neq(0)$ est fixé et donne donc un signe que l'on note $\epsilon(\Pi)$. Le résultat découle alors du fait que, cf. [**5**] p.104, la dimension de $R^*_\xi(\Upsilon^{\infty,v})$ est égale à $\sharp\operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q},G)\sum_{\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})}m(\Pi)d^i_\xi(\Pi^\infty)$. □

*Remarque :* on rappelle que l'action de $\sigma\in W_v$ sur le membre de droite de (3.3.2) est donnée par celle de $(1^{\infty,p},q^{-\deg\sigma},\delta,1_{v_i})\in G^{(d)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}^\times_{v,d}$ où $\delta\in D^\times_{v,d}$ est tel que $v(\mathrm{rn}\delta)=\deg\sigma$.

***3.3.3 Définition***. — Pour toute représentation irréductible $\Upsilon^{\infty,v}$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$ telle que $(\Upsilon^{\infty,v}_{p,0})_{|\mathbb{Z}_p^\times}=1$, on notera

$$m_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})=\frac{1}{d}\sum_{\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})}m(\Pi)d^i_\xi(\Pi^\infty)$$

et $mk_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})=\sharp\operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q},G)m_G(\Upsilon^{\infty,v})$.

*Remarque :* d'après [**5**] VI.2.7 s'il existe une place $x$ telle que $\Upsilon^{\infty,v}_x$ est générique, alors $m_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$ est un entier. Le résultat est encore valide dans le cas général s'il existe $\tau_v$ tel que $\operatorname{Red}_{\tau_v}(\Pi_v)$ est irréductible non nul pour $\Pi_v\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$ ce que nous montrerons plus loin.

***3.3.4 Corollaire***. — *Soit $\Pi$ une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour $\xi$ telle que $(\Pi_{p,0})_{\overline{\mathbb{Z}}_p^\times}=1$ et que $\Pi_v$ n'est pas de la forme $\mathrm{St}_s(\pi_v)$ ou $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ pour tout diviseur $g$ de $d=sg$ et pour toute représentation cuspidale $\pi_v$ de $GL_g(F_v)$. Alors $\mathcal{U}_{H_0,\xi}(\Pi^{\infty,v})$ est vide.*

*Plus généralement étant donnée une représentation irréductible $\Upsilon^{\infty,v}$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$ telle que $(\Upsilon^{\infty,v}_{p,0})_{\mathbb{Z}_p^\times}$, et une représentation irréductible cuspidale $\pi_v$ de $GL_g(F_v)$ avec $d=sg$, on a l'égalité suivante*

$$\frac{1}{d}\sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})\\ \Pi_v\simeq \mathrm{St}_s(\pi_v)\ \mathit{ou}\ \mathrm{Speh}_s(\pi_v)}} m(\Pi)d_\xi^*(\Pi_\infty)=\sum_{\substack{\overline{\Pi}\in\mathcal{U}_{H_0,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})\\ \overline{\Pi}_v\simeq\pi_v[s]_D}} m(\overline{\Pi}). \tag{3.3.5}$$

*Démonstration.* — On considère (3.3.2) pour $h=d$ de sorte que $\tau_v$ est de la forme $\pi_v[s]_D$ pour un certain diviseur $s$ de $d=sg$ et $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. Le résultat découle alors du fait que le terme de gauche est aussi calculée par (3.2.5). Ainsi pour la première affirmation, s'il existait $\overline{\Pi}\in\mathcal{U}_{H_0,\xi}(\Pi^{\infty,v})$, alors pour $\pi_v$ cuspidale telle que $\overline{\Pi}_v\simeq\pi_v[s]_D$, de (3.2.5) on en déduirait que $H^0(\mathcal{F}_\xi(s,\pi_v))$ serait non nul. En utilisant (3.3.2), on en déduirait qu'il existe $\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})$ tel que $\Pi_v\simeq\mathrm{St}_s(\pi_v)$ ou $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ ce qui contredit, d'après [**5**] VI.2.2.

Enfin en ce qui concerne l'égalité notons tout d'abord que d'après [**5**] VI.2.2, pour tout $\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$, $\Pi_v$ est fixe de sorte que si le membre de droite de (3.3.5) est non nul, les $\Pi^{\infty,v}$ du membre de gauche sont tous isomorphes avec $\Pi_v$ fixé isomorphe soit à $\mathrm{St}_s(\pi_v)$ soit à $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ ; dans le premier cas le signe $\epsilon(\Pi)$ de 3.3.1 est égal à 1 et dans le second à $(-1)^{s-1}$. □

*Remarque :* d'après [**5**] VI.2.2, les $\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$ de (3.3.5) ont toutes la même composante locale $\Pi_v$. Il faut prendre cet énoncé comme un forme de correspondance de Jacquet-Langlands en tenant compte des multiplicités $d_\xi^*(\Pi_\infty)$. Dans le cas $d>2$ où il existe une place $x$ telle que $\Pi_x$ est générique, alors d'après [**5**] VI.2.7, on obtient une vraie correspondance de Jacquet-Langlands globale puisque tous les $\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$ ont même multiplicité et que leur $d_\xi^*(\Pi_\infty)$ sont tous égaux à 1.

***3.3.6 Corollaire.*** — *Si pour $\Pi\in\mathcal{U}_{G,\xi}(\Upsilon^{\infty,v})$, on a $\Pi_v\simeq\mathrm{St}_s(\pi_v)$ (resp. $\Pi_v\simeq\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$) alors le signe $\epsilon(\Pi)$ de 3.3.1 est égal à 1 (resp. $(-1)^{s-1}$).*

**3.4. Cas où $\Pi_v\simeq\mathrm{St}_s(\pi_v)$.** — On fixe dans ce paragraphe un diviseur $g$ de $d=sg$ ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale unitaire $\pi_v$ de $GL_g(F_v)$. On considère alors une représentation irréductible $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour $\xi$, telle que $\Pi_v\simeq\mathrm{St}_s(\pi_v)$. .

***3.4.1 Proposition.*** — *Soit $\pi'_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g'}(F_v)$ ; pour $1\leqslant t\leqslant d/g'$, $\Pi_t$ désigne une représentation quelconque de $GL_{tg'}(F_v)$.*

– *Si $\pi'_v$ n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$ alors*

$$[H^i(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}=0$$

*pour tout $i$ et pour tout $1\leqslant t\leqslant d/g'$.*

– *Si $\pi'_v\simeq\pi_v\otimes\chi_0\circ\mathrm{val}\circ\det$ pour $\chi_0:\mathbb{Z}\to\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, alors $[H^i(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est :*
  - *nul pour tout $i$ si $1\leqslant t<s$ ;*
  - *nul pour tout $i\neq 0$ si $t=s$ et dans $\mathrm{Groth}(GL_d(F_v)\times\mathbb{Z})$ :*

$$[H^0(j^{\geqslant sg}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_s))]\{\Pi^{\infty,v}\}=\sharp\,\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G)m(\Pi)\Pi_s\otimes(\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{U}(\pi_v)}\chi_0^{-1}\chi^{-1}).$$

*Démonstration.* — D'après (2.6.1), on a l'égalité

$$H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))=\sum_{a=0}^{s-t}(-1)^aH^*(j^{\geqslant(t+a)g}_{\mathcal{I},!}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t\overrightarrow{\times}\overrightarrow{[a-1]}_{\pi'_v})(a/2)),$$

dont d'après la pureté, il suffit de calculer le membre de droite.

***3.4.2 Lemme.*** — *Avec les notations de la proposition précédente, $[H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est :*

– *nul pour tout $1\leqslant t\leqslant d/g'$ si $\pi'_v$ n'est pas inertiellement équivalente à $\pi_v$ ;*

– *pour* $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes \chi_0 \circ \mathrm{val} \circ \det$, *égal à*

$$\sharp \operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) \Big[ \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes \Big( \Xi^{\frac{s-t}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{U}(\pi_v)} \chi_0^{-1} \chi^{-1} \Big) \Big].$$

*Démonstration.* — D'après la proposition (1.4.1),

$$J_{P^{op}_{tg,d}}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) \otimes \delta^{1/2}_{P_{tg,d}} = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{(s-t)(g-1)}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v\{-\frac{t(g-1)}{2}\}}$$

de sorte que

$$\mathrm{red}^{tg}_{\pi'_v[t]_D}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \pi'_v \not\sim^i \pi_v \\ (\Xi^{-\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \chi_0^{-1}) \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v\{-\frac{t(g-1)}{2}\}} \text{ pour } \pi'_v \simeq \pi_v \otimes \chi_0 \circ \mathrm{val} \circ \det \end{cases}$$

Les résultats découlent alors de 3.3.1 et 3.3.6, en utilisant [**5**] VI.2.7, de l'isomorphisme $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$-équivariant

$$H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_t)) \otimes \Xi^{\frac{d-tg}{2}} = \operatorname{Ind}^{GL_d(F_v)}_{P_{tg,d}(F_v)} \Pi_t \otimes_{\det} \Big( H^*_c(\mathcal{F}_{\pi'_v[t]_D, \mathcal{I}, 1}) \Big).$$

□

Pour $t = s$ et $\pi'_v \sim^i \pi_v$, le résultat découle alors de l'égalité $j^{\geqslant sg}_{\mathcal{I},!*} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_s) = j^{\geqslant sg}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_s)$ dans le groupe de Grothendieck des $W_v$-faisceaux pervers de Hecke. On suppose donc $t < s$ ; le lemme précédent donne alors l'égalité suivante dans $\mathrm{Groth}(GL_d(F_v) \times \mathbb{Z})$ :

$$\sum_{a=0}^{s-t} (-1)^a [H^*(i^{(t+a)g}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant (t+a)g}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_v})(a/2))]\{\Pi^{\infty,v}\} = \sharp \operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi)$$
$$\Big( \Pi_t \overrightarrow{\times} \Upsilon \Big) \otimes \Big( \Xi^{\frac{s-t}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi_0^{-1} \chi^{-1} \Big)$$

avec

$$\Upsilon = \sum_{a=0}^{s-t-1} (-1)^a [\overrightarrow{a-1}] \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-a-1}]_{\pi_v} + (-1)^{s-t} [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v} = 0.$$

En utilisant la pureté des $H^i(i^{tg}_{\mathcal{I},*} j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*} HT_\xi(\pi_v, \Pi_t)$, on en déduit qu'ils sont nuls pour tout $i$. □

**3.5. Cas $\Pi_v = \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$.** — On considère dans la suite une représentation irréductible automorphe $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$, cohomologique pour $\xi$, telle que $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$, pour $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$.

***3.5.1 Proposition.*** — *Soit $\pi'_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g'}(F_v)$ ; pour $1 \leqslant t \leqslant d/g'$, $\Pi_t$ désigne une représentation quelconque de $GL_{tg'}(F_v)$.*

– *Si $\pi'_v$ n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$ alors*

$$[H^i(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!*} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\} = 0$$

*pour tout $i$ et pour tout $1 \leqslant t \leqslant d/g'$.*

– *Si $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes \chi_0 \circ \mathrm{val} \circ \det$ pour $\chi_0 : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, alors $[H^i(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!*} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul pour $|i| > s-t$ ou $i \not\equiv s-t \bmod 2$ et sinon il est, dans le groupe de Grothendieck de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$, égal à l'image de*

$$\sharp \operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) ([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{\tfrac{s-t-i}{2} - 1}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{\tfrac{s-t+i}{2} - 1}]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{-i/2} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{U}(\pi_v)} \chi_0^{-1} \chi^{-1}) \tag{3.5.2}$$

*Démonstration.* — D'après (2.6.1), on a l'égalité

$$H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi_v,\Pi_t))=\sum_{a=0}^{s-t}(-1)^a H^*(j^{\geqslant (t+a)g}_{\mathcal{I},!}HT_\xi(\pi_v,\Pi_t\overrightarrow{\times}\overrightarrow{[a-1]}_{\pi_v})(a/2)),$$

dont d'après la pureté, il suffit de calculer le membre de droite.

***3.5.3 Lemme.*** — *Avec les notations de la proposition précédente,* $[H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *est :*

- *nul pour tout* $1\leqslant t\leqslant d/g'$ *si* $\pi'_v$ *n'est pas inertiellement équivalente à* $\pi_v$ *;*
- *pour* $\pi'_v\simeq\pi_v\otimes\chi_0\circ\mathrm{val}\circ\det$*, égal à*

$$(-1)^t\sharp\,\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G)m(\Pi)[\Pi_t\overleftarrow{\times}\overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}\otimes(\Xi^{\frac{s-t}{2}}\otimes\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{U}(\pi_v)}\chi_0^{-1}\chi^{-1})].$$

*Démonstration.* — D'après la proposition (1.4.1),

$$J_{P^{op}_{tg,d}}(\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v})\otimes\delta^{1/2}_{P_{tg,d}}=\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v\{\frac{(s-t)(g+1)}{2}\}}\otimes\overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v\{-\frac{t(g+1)}{2}\}}$$

de sorte que

$$\mathrm{red}^{tg}_{\pi'_v[t]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v})=\begin{cases}0 \text{ si } \pi'_v\not\sim^i\pi_v\\ (-1)^t\chi_0^{-1}\otimes\Xi^{-\frac{(s-t)(g+1)}{2}}\otimes\overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v\{-\frac{t(g+1)}{2}\}} \text{ pour } \pi'_v\simeq\pi_v\otimes\chi_0\circ\mathrm{val}\circ\det\end{cases}$$

Les résultats découlent alors de 3.3.1 et 3.3.6, et de l'isomorphisme $GL_d(F_v)\times\mathbb{Z}$-équivariant

$$H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))\otimes\Xi^{\frac{d-tg}{2}}=\mathrm{Ind}^{GL_d(F_v)}_{P_{tg,d}(F_v)}\Pi_t\otimes_{\det}\Big(H^*_c(\mathcal{F}_{\pi'_v[t]_D,\mathcal{I},1})\Big).$$

□

Pour $t=s$ et $\pi'_v\sim^i\pi_v$, le résultat découle alors de l'égalité $j^{\geqslant sg}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_s)=j^{\geqslant sg}_{\mathcal{I},!}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_s)$ dans le groupe de Grothendieck des $W_v$-faisceaux pervers de Hecke. On suppose donc $t<s$ ; le lemme précédent donne alors l'égalité suivante dans $\mathrm{Groth}(GL_d(F_v)\times\mathbb{Z})$ :

$$\begin{aligned}&[H^*(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}=(-1)^t\sharp\,\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G)\Big[\Pi_t\overrightarrow{\times}\\ &\Big(m(\Pi)\sum_{a=0}^{s-t-1}\overrightarrow{[a-1]}_{\pi_v})\overleftarrow{\times}\overrightarrow{[s-t-a-1]}_{\pi_v}\otimes(\Xi^{\frac{s-t-2a}{2}}\otimes\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{U}(\pi_v)}\chi_0^{-1}\chi^{-1})+\\ &\sum_{\substack{\overline{\Pi}\in\mathfrak{U}_{H_0,\xi}(\Pi)\\ \overline{\Pi}_v\simeq\pi_v[s]_D}}m(\overline{\Pi})\overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}\otimes(\Xi^{\frac{s-t}{2}}\otimes\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{U}(\pi_v)}\chi_0^{-1}\chi^{-1})\Big)\Big]\end{aligned}$$

Du fait que $H^i(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!*}HT_\xi(\pi_v,\Pi_t))$ est pur de poids $i$, on en déduit le résultat dans le groupe de Grothendieck pour tout $i\neq t-s$, et enfin pour $i=t-s$ par dualité ce qui en outre fournit le corollaire suivant. □

*Remarque :* en passant aux faisceaux non induits, on en déduit que $[H^i(j^{\geqslant tg}\mathcal{F}(\pi_v,t)[d-tg])]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est égal à l'image de

$$\begin{aligned}\sharp\,\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G)m(\Pi)\overrightarrow{[\frac{s-t-i}{2}-1]}_{\pi_v\{\frac{(s-3t-i)g+s-i+t}{4}\}}\times\overrightarrow{[\frac{s-t+i}{2}-1]}_{\pi_v\{-\frac{(s+t-i)(g+1)}{4}\}}\\ \otimes(\Xi^{-\frac{(s-t)g+i}{2}}\otimes\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{A}(\pi_v)}\chi^{-1})\end{aligned}$$

**3.6. Cas général.** — D'après [**6**], la composante locale $\Pi_v$ d'une représentation automorphe $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$ est de la forme $\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t_1-1]}_{\pi_{v,1}\{\lambda_1\}}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t_u-1]}_{\pi_{v,u}\{\lambda_u\}}}$ où les $\pi_{v,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{g_i}(F_v)$ avec $\lambda_i \in ]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $s\sum_{i=1}^u g_i t_i = d$. Commençons comme le suggère le lemme 1.5.5, par étudier le cas $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}}$.

***3.6.1 Proposition.*** — *Soit $\Pi$ une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$, cohomologique pour $\xi$ et telle que $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}}$. Pour tout $r \geqslant 1$, l'image de $[H^i(\mathcal{P}_\xi(r,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ dans le groupe de Grothendieck de $GL_d(F_v) \times W_v$ vérifie les propriétés suivantes :*

*(i) si $r > s+t-1$ alors elle est nulle pour tout $i$ ;*

*(ii) pour $r = s+t-1$, elle est nulle pour tout $i \neq 0$ et pour $i=0$ elle est égale à*

$$e_{\pi_v} m k_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) \overleftarrow{[s+t-2]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-2]}_{\pi_v}} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1});$$

*(iii) pour $t \leqslant r \leqslant s+t-1$, elle est nulle si $|i| > s+t-1-r$ et pour $i = s+t-1-r$ elle est égale, avec les notations de 1.5.7, à $e_{\pi_v} m k_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) R_{\pi_v}(s,t)(r-t,t-1) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(-\frac{s+t-1-r}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ ;*

*(iv) pour $\max\{1, t-s\} \leqslant r \leqslant t$, elle est nulle pour tout $|i| > s-t+r$ ;*

*(v) pour $t-s > 1$ et $1 \leqslant r < t-s$, elle est nulle pour tout $i$.*

*Démonstration.* — (i) D'après 1.5.6, pour tout $r > s+t-1$ on a $\mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}}) = (0)$ de sorte que d'après 3.3.1 $\Big[H^*(j_!^{\geqslant rg} HT_\xi(\pi_v, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_v}))\Big]\{\Pi^{\infty,v}\} = (0)$ ce qui implique (i) d'après 2.6.1.

(ii) Pour $r = s+t-1$, on a

$$\mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}}) = \Xi^{\frac{(s-1)(t-1)g}{2}} \otimes \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-2]}_{\pi_v\{-\frac{(s+t-1)g}{2}\}}}.$$

D'après (i) et 2.6.1 $\Big[H^*(j_!^{\geqslant rg} HT_\xi(\pi_v, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_v}))\Big]\{\Pi^{\infty,v}\} = H^*(j_{!*}^{\geqslant rg} HT_\xi(\pi_v, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_v}))$ est donc égal d'après 3.3.1 à $e_{\pi_v} m k_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) \overleftarrow{[s+t-2]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-2]}_{\pi_v}} \otimes \Big(\mathcal{L}(\pi_v) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})\Big)$ avec $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$.

*Remarque :* par pureté $\mathcal{L}(\pi_v) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ est pur de poids $\omega(\xi)$ ; par ailleurs comme $\mathrm{red}_{\pi_v[s+t-1]_D}(\Pi_v)$ est irréductible $m_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})$ est un entier, cf. la remarque qui suit la définition 3.3.3.

(iii) On raisonne par récurrence sur $r$ de $s+t-1$ à $t$ ; l'initialisation $r = s+t-1$ a été traitée en (ii). Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $r+1$ et traitons le cas de $r$. D'après 1.5.6, $\mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}})$ est égal à $\Xi^{\frac{stg-rg+s+t-1-r}{2}} \otimes R_{\pi_v}(s,t)(r-t,t-1)$ plus une somme de termes de la forme $\Xi^{\frac{stg-rg+\delta}{2}} \otimes \Pi_\delta$ avec $\delta \equiv s+t-1-r \bmod 2$ et $\delta < s+t-1-r$. D'après 3.3.1 et le fait que $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$, on en déduit donc que $H^*(j_!^{\geqslant rg} HT_\xi(\pi_v, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_v}))\{\Pi^{\infty,v}\}$ est égal à $e_{\pi_v} m k_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) R_{\pi_v}(s,t)(r-t,t-1) \otimes \Xi^{\frac{s+t-1-r}{2}}$ plus des termes de poids strictement plus petit de sorte que d'après 2.6.1 et l'hypothèse de récurrence, $[H^*(\mathcal{P}(r,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est égal à $e_{\pi_v} m k_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) R_{\pi_v}(s,t)(r-t,t-1) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(-\frac{s+t-1-r}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ plus des termes de poids strictement plus petit. Le résultat découle alors de la pureté et du fait que d'après (ii), $\mathcal{L}(\pi_v) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ est pur de poids $\omega(\xi)$.

(iv) On raisonne par récurrence sur $r$ de $t$ à $\max\{1, t-s\}$ ; l'initialisation $r = t$ a été traitée en (iii). Le raisonnement est strictement identique à celui de (iii) en remarquant que les termes de $\mathrm{red}_{\pi_v[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}})$ sont tous de poids inférieur ou égal à $s-t-1+r$.

(v) Le raisonnement de (iv) fournit la nullité pour tout $i > -1$ et donc pour tout $i$ par dualité de Grothendieck-Verdier. $\square$

***3.6.2 Corollaire.*** — *On reprend les hypothèses de la proposition précédente, en particulier $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}}$. Pour tout $1 \leqslant r \leqslant st$ et $r \neq t$ (resp. $r \neq t \pm 1$), $[H^i(\mathcal{P}_\xi(r,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\} = (0)$ pour tout $i \geqslant s-1$ (resp. $i = s-2$). Par ailleurs :*

*(i) pour* $r=t$, $[H^{s-1}(\mathcal{P}_\xi(t,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *contient* $e_{\pi_v} mk_{g,\xi}(\Pi^{\infty,v})\Pi_v \otimes \Big(\mathcal{L}(\pi_v)\otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})\Big)$ *;*

*(ii) pour* $r=t\pm 1$, $\Pi_v$ *n'est pas un constituant de* $[H^{s-2}(\mathcal{P}_\xi(r,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *en tant que* $GL_d(F_v)$*-module.*

*Démonstration.* — Par rapport à la proposition précédente, il ne reste plus qu'à vérifier (ii). Pour $r=t+1$ d'après le point (iii) de la proposition précédente, $[H^{s-2}(\mathcal{P}_\xi(t+1,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est, en tant que $GL_d(F_v)$-module, isotypique pour $[\overleftarrow{t}\,]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}\times R_{\pi_v}(s,t)(1,t-1)$. Le résultat découle alors du lemme suivant.

**3.6.3 Lemme**. — *L'image de* $[\overleftarrow{t}\,]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}\times R_{\pi_v}(s,t)(1,t-1)$ *par* $J_{P_{tg,tsg}}$ *ne contient jamais un élément de la forme* $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s-1}{2}\}}\otimes ?$.

*Démonstration.* — En effet comme $J_{P_{g,(t+1)g}}\Big([\overleftarrow{t}\,]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}\Big)=[\overleftarrow{0}\,]_{\pi_v\{\frac{s-t-2}{2}\}}\otimes[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s-1}{2}\}}$ par égalité des supports cuspidaux, on en déduit que si $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s-1}{2}\}}\otimes ?$ était un constituant de

$$J_{P_{tg,tsg}}\Big([\overleftarrow{t}\,]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}\times R_{\pi_v}(s,t)(1,t-1)\Big)$$

alors $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s-1}{2}\}}$ serait un constituant de $J_{P_{tg,t(s-1)g}}\Big(R_{\pi_v}(s,t)(1,t-1)\{\frac{(t+1)g}{2}\}\Big)$ ce qui n'est pas car $\pi_v\{\frac{s+t-2}{2}\}$ n'appartient pas au support cuspidal de $R_{\pi_v}(s,t)(1,t-1)\{\frac{(t+1)g}{2}\}$. □

Dans le cas $r=t-1$, d'après la proposition précédente et comme $\epsilon(\Pi)=(-1)^{s-1}$, dans $\mathrm{Groth}(GL_d(F_v))$

$$\begin{aligned}[H^{s-2}(\mathcal{P}_\xi(t-1,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\} = {} & [H^*(j_!^{\geqslant tg}HT(\pi_v,[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{0}\,]_{\pi_v}))]_{s-1}\{\Pi^{\infty,v}\}- \\ & [H^*(j_!^{\geqslant (t-1)g}HT(\pi_v,[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v}))]_{s-2}\{\Pi^{\infty,v}\}\end{aligned}$$

où $[M]_k$ indique la partie de poids $k$ de $[M]$. On obtient alors que $[H^{s-2}(\mathcal{P}_\xi(t-1,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est égal à $e_{\pi_v}gmk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})$ fois

$$[\overrightarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{-1/2\}}}\times[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}\times[\overleftarrow{0}\,]_{\pi_v\{\frac{s+t-2}{2}\}}-R_{\pi_v}(s,t)(0,t-2)\times[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}.$$

Comme d'après 1.4.2, $J_{P_{g,t(s-1)g}}\Big([\overrightarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{-1/2\}}}\Big)=[\overleftarrow{0}\,]_{\pi_v\{\frac{s-t-2}{2}\}}\otimes ?$, par égalité des supports cuspidaux, on en déduit que la somme des constituants de la forme $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s-1}{2}\}}\otimes ?$ de

$$J_{P_{tg,tsg}}\Big([\overrightarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{-1/2\}}}\times[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}\times[\overleftarrow{0}\,]_{\pi_v\{\frac{s+t-2}{2}\}}\Big)$$

est égale à $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s-1}{2}\}}\otimes[\overrightarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{-1/2\}}}$. Le même raisonnement appliqué à $R_{\pi_v}(s,t)(0,t-2)\times[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v\{\frac{s-2}{2}\}}$ donne exactement le même résultat, ce qui prouve l'affirmation. □

*Remarque :* on pourrait être plus précis et donner explicitement le calcul de chacun des groupes de cohomologie; par exemple dans la situation de (ii), pour tout $0\leqslant\delta\leqslant s+t-1-r$, $[H^{s+t-1-r-2\delta}(\mathcal{P}(r,\pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est égal à $e_{\pi_v}mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})\Pi_\delta\otimes(\mathcal{L}(\pi_v)\otimes\Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1}))$ où

$$\begin{aligned}\Pi_\delta = {} & [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{1-s}{2}\}}\boxplus\cdots\boxplus[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{1-s+2(s+t-2-r-\delta)}{2}\}} \\ & \boxplus[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v\{\frac{1-s+2(s+t+1-r-\delta)}{2}\}}\boxplus\cdots\boxplus[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v\{\frac{s-2\delta}{2}\}}\boxplus[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s+3-2\delta}{2}\}}\boxplus\cdots\boxplus[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v\{\frac{s+1}{2}\}}.\end{aligned}$$

Dans le cas général, en utilisant le lemme 1.5.5, il est facile de généraliser 3.6.1 et 3.6.2. Signalons simplement le corollaire suivant qui sera utilisé dans la section suivante.

**3.6.4 Corollaire**. — *Soit* $\Pi$ *une représentation irréductible automorphe de* $G(\mathbb{A})$*, cohomologique pour* $\xi$ *; d'après* [**6**] *sa composante locale* $\Pi_v$ *est de la forme*

$$[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t_1-1}]_{\pi_{v,1}\{\lambda_1\}}}\times\cdots\times[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t_u-1}]_{\pi_{v,u}\{\lambda_u\}}}$$

*où les $\pi_{v,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{g_i}(F_v)$ avec $\lambda_i \in ]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$. On a alors les résultats suivants :*

*(i) il existe un caractère $\chi$ tel que pour tout $i = 1, \cdots, u$, $\pi_{v,i} \otimes \chi$ est unitaire et $(\chi \otimes \Pi_{p,0}) \circ (\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ est pur de poids $\omega(\xi)$ avec $\lambda_i = 0$ ;*

*(ii) si $\pi_v$ est une représentation irréductible cuspidale unitaire de $GL_g(F_v)$ qui n'est isomorphe à aucun des $\pi_{v,i} \otimes \chi$, alors $[H^i(\mathcal{P}_\xi(t, \pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul pour tout $i$ et pour tout $1 \leqslant t \leqslant d/g$ ;*

*(iii) pour tout $i = 1, \cdots, u$, $[H^j(\mathcal{P}_\xi(t, \pi_{v,i}))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul pour tout $j > s-1$ et pour tout $1 \leqslant t \leqslant d/g_i$ et pour $j = s-1$ avec $1 \leqslant t \leqslant d/g_i$, $[H^{s-1}(\mathcal{P}_\xi(t, \pi_{v,i}))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ contient $e_{\pi_{v,i}} m k_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) \Pi_v \otimes \sum_{\substack{k/\pi_{v,k} \sim^i \pi_{v,i} \\ t_k = t}} \mathfrak{L}(\pi_{v,k}) \Pi_{p,0} \otimes (\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ ;*

*(iv) pour tout $\pi_v$ et pour tout $1 \leqslant t \leqslant d/g$, $[H^{s-2}(\mathcal{P}_\xi(t, \pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$, en tant que $GL_d(F_v)$-module, ne contient jamais $\Pi_v$.*

*Remarque :* le point (i) du corollaire précédent correspond à la conjecture de Ramanujan-Peterson. Au point (iii), on peut comme dans la proposition 3.6.1, donner précisément $[H^{s-1}(\mathcal{P}_\xi(t, \pi_v))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ :

$$H^{s-1}(\mathcal{P}_\xi(t, \pi_{v,i}))\{\Pi^{\infty,v}\} = e_{\pi_{v,i}} m k_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) \sum_{\substack{k/\pi_{v,k} \sim^i \pi_{v,i} \\ t_k = t}}$$

$$[\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t_1-1}]_{\pi_v} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_{k-1}-1}]_{\pi_{v,k-1}} \times [\overleftarrow{t_{k+1}-1}]_{\pi_{v,k}} \times \cdots [\overleftarrow{t_u-1}]_{\pi_{v,u}}} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_{v,k}} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_{v,k}}}.$$

On notera enfin que pour une telle représentation, on a $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$.

## 4. Groupes de cohomologie des variétés de Shimura de [5]

Le but de cette section est de prouver la conjecture de monodromie poids pour les schémas $X_I$, autrement dit pour tout $i$, les gradués $gr_k^M H^i_{\overline{\eta}_v}$ de la filtration de monodromie de $H^i(X_I \otimes_{F_v} \overline{F}_v, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ sont purs de poids de poids $k+i$.

**4.1. Cas $\Pi_v = \mathrm{St}_s(\pi_v)$.** — On fixe comme précédemment un diviseur $g$ de $d = sg$ ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale $\pi_v$ de $GL_g(F_v)$. On considère alors une représentation irréductible $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$, cohomologique pour $\xi$, telle que $\Pi_v \simeq \mathrm{St}_s(\pi_v)$. On rappelle que l'on a un isomorphisme $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$-équivariant $H^i_{\eta_v,\xi}(\frac{d-1}{2}) \simeq H^{1-d+i}(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})$ où $H^i_{\eta_v,\xi}$ désigne la cohomologie de $\mathcal{L}_\xi$ sur la fibre générique $X_{\mathcal{I},\eta_v}$.

***4.1.1 Proposition.*** — *Dans* $\mathrm{Groth}(GL_d(F_v) \times \mathbb{Z})$, *les* $[H^i(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *sont nuls pour* $i \neq 0$ *et*

$$[H^0(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})]\{\Pi^{\infty,v}\} = \sharp \operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \Big[\mathfrak{L}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v})\Big] \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1}).$$

*Démonstration.* — On considère la suite spectrale de monodromie

$$E_1^{i,j} := H^{i+j}(gr^M_{-i}(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})) \Rightarrow H^{i+j}(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})$$

où d'après [**3**],

$$gr_k^M(\Psi^{\dagger e_{\pi_v}}_{\mathcal{I},\xi,\pi_v})(\frac{k}{2}) = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leqslant s \\ t \equiv k-1 \bmod 2}} \mathcal{P}_\xi(t, \pi_v).$$

D'après 3.4.1, pour tout $(i,j)$ tels que $i+j \neq 0$, $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty,v}\} = (0)$ de sorte que la suite spectrale ci-dessus dégénère en $E_1$ ce qui donne le résultat en remarquant que l'indice de nilpotence de l'opérateur de monodromie est bien égal à $s-1$. □

**4.2. Cas $\Pi_v = \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$.** — On considère dans la suite $\Pi$ une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour $\xi$ telle que $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$, pour $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$.

***4.2.1 Proposition***. — *Dans* $\mathrm{Groth}(GL_d(F_v) \times \mathbb{Z})$, $[H^i(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *est nul si* $|i| > s-1$ *ou si* $i \equiv s \bmod 2$ ; *sinon il est isomorphe à* $\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)(-i/2) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$.

*Démonstration*. — On considère la suite spectrale de monodromie-poids

$$E_1^{i,j} := H^{i+j}(gr^M_{-i}(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})) \Rightarrow H^{i+j}(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})$$

dont on étudie les $\Pi^{\infty,v}$-parties au sens où pour $r \geqslant 1$, on regarde l'image de $E_r^{i,j}$ dans le groupe de Grothendieck des $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$-modules et plus particulièrement les constituants de la forme $\Pi^{\infty,v} \otimes \Pi'_v \otimes \sigma_v$.[1] De la description des $gr^M_k(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})$, et d'après (3.5.1), pour $\delta \geqslant 0$, on a

$$\frac{[E_1^{-k,\delta+k}]\{\Pi^{\infty,v}\}}{\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi)} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leqslant s \\ t \equiv k+1 \equiv s+\delta \bmod 2}} \Big[ ([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{\tfrac{s-t+\delta-2}{2}}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{\tfrac{s-t-\delta-2}{2}}]_{\pi_v} \Big] \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)(-\frac{k-\delta}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1}) \quad (4.2.2)$$

$$\frac{[E_1^{-k,\delta+k}]\{\Pi^{\infty,v}\}}{\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi)} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leqslant s \\ t \equiv k+1 \equiv s+\delta \bmod 2}} \Big[ ([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{\tfrac{s-t-\delta-2}{2}}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{\tfrac{s-t+\delta-2}{2}}]_{\pi_v} \Big] \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)(-\frac{\delta+k}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1}) \quad (4.2.3)$$

On en déduit que $\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)(\frac{s-1}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ est un constituant de $[E_\infty^{0,1-s}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ de sorte que d'après le théorème de Lefschetz difficile, $\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)(\frac{s-1-2r}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$ est un constituant de $[H^{1-s+2r}(\Psi_{\mathcal{I},v})]\{\Pi^{\infty,v}\}$. Le résultat découle alors du fait que d'après [**5**] V.6.4, si $[H^i(\Psi_{\mathcal{I},v})]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est non nul alors la parité de $i$ est fixée et que la dimension virtuelle de $[H^*(\Psi_{\mathcal{I},v})]\{\Pi^\infty\}$ est égale à $d \sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi)$.
*Remarque :* on peut se passer de toute référence en étudiant directement la suite spectrale de monodromie et en utilisant que l'aboutissement doit vérifier le théorème de Lefschetz difficile et être compatible à la dualité de Verdier. (cf. [**2**]) □

**4.3. Cas général : conjecture de monodromie-poids.** — On fixe dans ce paragraphe une représentation irréductible automorphe $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour $\xi$. D'après [**6**] sa composante locale $\Pi_v$ est de la forme $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$ pour $\pi_v$ une représentation irréductible tempérée de $GL_g(F_v)$ pour $d = sg$, i.e. de la forme $[\overleftarrow{t_1-1}]_{\pi_{v,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u-1}]_{\pi_{v,u}}$ où d'après 3.6.4 (i), pour un certain caractère $\chi$ de $F_v^\times$, les $\pi_{v,i} \otimes \chi$ sont des représentations irréductibles unitaires cuspidales de respectivement $GL_{g_i}(F_v)$.

***4.3.1 Théorème***. — *Avec les notations précédentes,* $[H^i_{\eta_v,\xi}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *vérifient les propriétés suivantes :*

(i) *il est nul si* $i \equiv s \bmod 2$ *ou si* $|i| \geqslant s$ ;

(ii) *pour* $i = s-1-2k$ *avec* $0 \leqslant k \leqslant s-1$, *il est égal à* $\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) \Pi_v \otimes \mathfrak{L}(\Pi_v) \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$.

*Démonstration*. — (i) Le résultat découle de la première affirmation du point (iii) du corollaire 3.6.4. En ce qui concerne (ii), on considère comme ci-avant la suite spectrale de monodromie-poids

$$E_1^{i,j} := H^{i+j}(gr^M_{-i}(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})) \Rightarrow H^{i+j}(\Psi_{\mathcal{I},\xi,v})$$

1. Prendre la $\Pi^{\infty,v}$-partie n'est pas un foncteur exact.

dont on étudie les $\Pi^{\infty,v}$-parties ; par pureté celle-ci dégénère en $E_2$. Comme le suggère le lemme 1.5.5, cela revient à traiter le cas où $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}}$ avec $\pi_v$ irréductible cuspidal. D'après 3.6.2 (i), pour tout $(i,j)$ avec $i+j=s-1$ et $-i=t-1-2k$ où $0 \leqslant k \leqslant t-1$, $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ contient $\sharp \operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q},G)m(\Pi)\Pi_v \otimes \Big(\mathfrak{L}(\pi_v)(-\frac{s-1+t-1-2k}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\operatorname{Art}_{F_v}^{-1})\Big)$ et d'après 3.6.2 (ii), il en est de même pour $E_2^{i,j}$. Ainsi $[H^{s-1}_{\eta_v,\xi}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ contient $\sharp \operatorname{Ker}^1(\mathbb{Q},G)m(\Pi)\Pi_v \otimes \Big(\mathfrak{L}(\Pi_v)(-\frac{s-1}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\operatorname{Art}_{F_v}^{-1})\Big)$ ; d'après le théorème de Lefschetz difficile il il en est de même pour $[H^{s-1-2k}_{\eta_v,\xi}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant s-1$ et on conclut comme précédemment par un argument de dimension.

Le cas général se traite de manière strictement identique en invoquant le corollaire 3.6.4. □

## 5. Groupes de cohomologie des $j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi_v,\Pi_t)$

Des égalités de (2.6.2), on associe la suite spectrale des poids dont les termes initiaux ont déjà été calculés et dont l'aboutissement calcule les $H^i(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT(\pi_v,\Pi_t))$. Comme application de ces calculs on a en vue un énoncé de connexité pour les $X_I$ donné au corollaire 5.3.3.

**5.1. Cas $\Pi_v = \operatorname{St}_s(\pi_v)$.** — On fixe comme précédemment un diviseur $g$ de $d=sg$ ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale $\pi_v$ de $GL_g(F_v)$. On considère alors une représentation irréductible $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour $\xi$ telle que $\Pi_v \simeq \operatorname{St}_s(\pi_v)$.

***5.1.1 Proposition.*** — *– Soit $1 \leqslant tg' \leqslant d$ et $\pi'_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g'}(F_v)$. Si $g' \neq g$ ou si $\pi'_v$ n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$, alors les $[H^i(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ sont nuls pour tout $i$.*

*– Pour $g'=g$ et $\pi'_v=\pi_v$, pour tout $i \neq 0$, $[H^i(j^{\geqslant tg}_! HT_\xi(\pi_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul et pour $i=0$*

$$[H^0(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi_v,\Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\} = mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) \Big[(\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v})\Big] \otimes (\Xi^{-\frac{s-t}{2}} \otimes \Pi_{p,0}(\operatorname{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

*en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$.*

*Remarque :* de manière équivalente, $[H^i(j^{\geqslant tg'}_! \mathcal{F}_\xi(t,\pi'_v)_1)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul si $\pi'_v$ n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$ ou si $i \neq d-tg$, et dans le groupe de Grothendieck de $GL_{(s-t)g}(F_v) \times \mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$[H^{d-tg}(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} \mathcal{F}_\xi(t,\pi_v)_1)]\{\Pi^{\infty,v}\} = mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})[\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v\{-t(g-1)/2\}} \otimes \Big(\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \Pi_{p,0}(\operatorname{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}\Big).$$

*Démonstration.* — On considère la filtration par les poids du $W_v$-faisceaux pervers de Hecke $j^{\geqslant tg'}_! HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t)$ de sorte que ces gradués $gr^W_k(!,\pi'_v,t)$ sont nuls pour $k>0$ ou $-k < \lfloor \frac{d}{g'} \rfloor - t$ et sinon donné par $j^{\geqslant (t-k)g'}_{!*} HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{-k-1}]_{\pi'_v})(-k/2)$, cf. (2.6.1). On considère alors la suite spectrale associée

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(gr^W_{-i}(!,\pi'_v,t) \Rightarrow H^{i+j}(j^{\geqslant tg'}_! HT_\xi(\pi'_v,\Pi_t))$$

D'après (3.4.1), les $E_1^{i,j}[\Pi^{\infty,v}]$ sont nuls sauf si $\pi'_v$ est dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$ et si $i=-j=s-t$ avec

$$[E_1^{s-t,t-s}]\{\Pi^{\infty,v}\} = mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})\Big[\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v}\Big] \otimes \Big(\Xi^{(t-s)/2} \otimes \Pi_{p,0} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}\Big)$$

d'où le résultat. □

**5.2. Cas $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$.** — On considère $\Pi$ une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour $\xi$ telle que $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$, pour $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$.

***5.2.1 Proposition.*** — *– Soit $1 \leqslant tg' \leqslant d$ et $\pi'_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g'}(F_v)$. Si $g' \neq g$ ou si $\pi'_v$ n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$, alors les $[H^i(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ sont nuls pour tout $i$.*

*– Pour $g' = g$ et $\pi'_v = \pi_v$, pour tout $i \neq s-t$, $[H^i(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul et pour $i = s-t$, dans le groupe de Grothendieck de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$, $[H^{s-t}(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est égal à l'image de*

$$mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})\Pi_t \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes \Big(\Xi^{\frac{s-t}{2}} \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}^{-1}_{F_v}) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}\Big).$$

*Remarque :* de manière équivalente, $[H^i(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!} \mathcal{F}_\xi(t, \pi'_v)_1)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul si $\pi'_v$ n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$ ou si $i \neq (s-t)(g+1)$, et on a

$$\begin{aligned}&[H^{(s-t)(g+1)}(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} \mathcal{F}_\xi(t, \pi_v)_1)]\{\Pi^{\infty,v}\} = \\ &\qquad mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})[\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v\{-t(g+1)/2\}} \otimes \Big(\Xi^{\frac{(s-t)(g+1)}{2}} \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}^{-1}_{F_v}) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}\Big).\end{aligned}$$

*Démonstration.* — On considère comme précédemment la filtration par les poids du $W_v$-faisceaux pervers de Hecke $j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_t)$ ainsi que la suite spectrale associée

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(gr^W_{-i}(!, \pi'_v, t)) \Rightarrow H^{i+j}(j^{\geqslant tg'}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi'_v, \Pi_t))$$

D'après (3.5.1), $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est non nul si et seulement si $\pi'_v$ est dans la classe d'équivalence inertielle de $\pi_v$ et $(i,j)$ est de la forme $(a, t-s+2r)$ avec $0 \leqslant a \leqslant s-t-r \leqslant s-t$ auquel cas on a

$$\begin{aligned}\frac{[E_1^{a,t-s+2r}]\{\Pi^{\infty,v}\}}{mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})} &= \Big[(\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}\Big] \\ &\qquad \otimes \Big(\Xi^{\frac{2r-s+t}{2}} \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}^{-1}_{F_v}) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}\Big). \qquad (5.2.2)\end{aligned}$$

On observe en particulier que pour tout $(i,j)$ tels que $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est non nul, il est pur de poids $\omega(\xi)+j$ de sorte qu'en particulier, la suite spectrale dégénère en $E_2$. Il s'agit alors de montrer que pour tout $(i,j) = (a, t-s+2r) \neq (0, s-t)$, $[E_2^{i,j}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul. Pour cela, en raisonnant par récurrence sur $t$, on suppose la conclusion de la proposition vérifiée pour tout $t' < t$ ; pour $t=1$ l'hypothèse de récurrence est vide. Soit alors $t-s \leqslant i$ minimal tel que $[H^i(j^{\geqslant tg}_{\mathcal{I},!} HT_\xi(\pi_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ soit non nul de sorte que sa partie de poids minimale non nulle est

$$mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})\Big[(\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}\Big] \otimes \Big(\Xi^{\frac{2r-s+t}{2}} \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}^{-1}_{F_v}) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}\Big)$$

avec $i = t-s+2r+a$.

***5.2.3 Lemme.*** — *Sous les hypothèses ci-avant, on a pour $g > 1$*

$$\begin{aligned}&[H^{d-tg+i}(\overline{X}_{\mathcal{I}}, \Psi^{1-d+t(g-1)}_{\mathcal{I},\xi,v})]\{\Pi^{\infty,v}\} = mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) \\ &\quad \Big[([\overrightarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}\Big] \otimes \Big(\mathfrak{L}(\pi_v)(-\frac{2r-s+t}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}^{-1}_{F_v})\Big)\end{aligned}$$

*Pour $g=1$, il contient*

$$mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})\Big[([\overrightarrow{t-1}, \overleftarrow{a+1}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}\Big] \otimes \Big(\mathfrak{L}(\pi_v)(-\frac{2r-s+t}{2}) \otimes \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}^{-1}_{F_v})\Big).$$

*Démonstration.* — On considère la suite spectrale associée à la stratification

$$E_1^{p,q}=H_c^{p+q}(\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=p},\Psi_{\mathcal{I},\xi,v}^{1-d+t(g-1)})\Rightarrow H^{p+q}(\overline{X}_{\mathcal{I}},\Psi_{\mathcal{I},v}^{1-d+t(g-1)}).$$

D'après (3.4.1), $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul si $p$ n'est pas de la forme $t'g$ avec $t'(g-1)\leqslant t(g-1)\leqslant t'g-1$.

- En particulier pour $g>1$, on a $t'\leqslant t$. En outre pour un tel $t'$, on a

$$((\Psi_{\mathcal{I},\xi,\pi_v}^{1-d+t(g-1)})_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=t'g}})^{e_{\pi_v}}\simeq\mathcal{F}_\xi(t',\pi_v)\otimes\Psi_{F_v,t'g}^{t(g-1)}(\pi_v[t']_D)$$

de sorte que pour $p=t'g<tg$, $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul pour $p+q\neq(s-t')(g+1)>(s-t)g+i$ pour tout $i\leqslant s-t$. On en déduit donc que $[E_\infty^{(s-t)g+i}]\{\Pi^{\infty,v}\}=[E_1^{tg,(s-2t)g+i}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ qui est donc isomorphe à

$$mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v})\Big[([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overleftarrow{a},\overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_v})\overleftarrow{\times}[\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}\Big]\otimes\Big(\mathfrak{L}(\pi_v)(-\frac{2r-s+t}{2})\otimes\Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})\Big)$$

d'après (5.2.2), d'où le résultat.

- Pour $g=1$, on a comme précédemment $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty,v}\}=0$ pour $p+q=(s-t)g+i-1$, reste alors à regarder le cas $p+q=(s-t)g+i+1$ : la partie de poids $\omega(\xi)+t-s+2r$ est alors, d'après (5.2.2), à prendre parmi les constituants de $([\overrightarrow{t'-1}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overleftarrow{a+t-t'}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{s-2-r-a-t}]_{\pi_v})\overleftarrow{\times}[\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}$ de sorte que $([\overrightarrow{t-1},\overleftarrow{a+1},\overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_v})\overleftarrow{\times}[\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}$ n'en est jamais un constituant, d'où le résultat. □

***5.2.4 Lemme.*** — *Avec les hypothèses précédentes* $[H^i(\overline{X}_{\mathcal{I}},\Psi_{\mathcal{I},\xi,v}^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty,v}\}$*, pour tout* $j<t(g-1)$*, est mixte de poids strictement supérieur à* $\omega(\xi)+s-2t+1$.

*Démonstration.* — On raisonne comme précédemment via la suite spectrale associée à la stratification

$$E_1^{p,q}=H_c^{p+q}(\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=p},\Psi_{\mathcal{I},\xi,\pi_v}^{1-d+t(g-1)})\Rightarrow H^{p+q}(\overline{X}_{\mathcal{I}},\Psi_{\mathcal{I},\xi,\pi_v}^{1-d+t(g-1)})$$

Pour que $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ soit non nulle il faut, car $j<tg-1)$, que $t'<t$. Le résultat découle alors du fait que, d'après (5.2.2), la propriété est vérifiée pour les termes initiaux d'après l'hypothèse de récurrence sur les $t'<t$. □

***5.2.5 Lemme.*** — *Avec les hypothèses précédentes, pour* $j=t(g-1)+\alpha$ *avec* $\alpha>0$*, les constituants de poids* $1-s+2r$ *des* $[H^i(\overline{X}_{\mathcal{I}},\Psi_{\mathcal{I},\xi,v}^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *sont à prendre parmi les constituants de*

$$([\overleftarrow{\delta},\overrightarrow{t'-1-\delta}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overleftarrow{a'-1}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overleftarrow{s-t'-1-r'-a'}]_{\pi_v})\overleftarrow{\times}[\overrightarrow{r'-1}]_{\pi_v}$$

*avec* $t'\geqslant t$, $\delta=\alpha-(t'-t)(g-1)$ *et* $r'=r-\delta$.

*Démonstration.* — La suite spectrale de stratification nous ramène à prouver le résultat pour les $[H^i(\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=p},\Psi_{\mathcal{I},\xi,\pi_v}^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty,v}\}$ avec $p=t'g$. Comme nous l'avons remarqué dans la preuve du lemme précédent, pour $t'<t$, d'après l'hypothèse de récurrence, il n'y a pas de parties de poids $\omega(\xi)+1-s+2r\leqslant s-2t+1$. Pour $t'\geqslant t$ le résultat découle alors de (5.2.2). □

*Fin de la preuve de la proposition (5.2.1) :* on considère la suite spectrale des cycles évanescents :

$$E_2^{p,q}=H^p(\overline{X}_{\mathcal{I}},\Psi_{\mathcal{I},\xi,v}^{1-d+q})\Rightarrow H_{\eta_v,\xi}^{p+q}$$

Pour $0\leqslant r<s-t$, d'après (5.2.3), $[\overrightarrow{t+r-1},\overleftarrow{a+1},\overrightarrow{s-t-r-a-1}]_{\pi_v}$ est un constituant de la partie de poids $1-s+2r<s-1+2t$ de $[E_2^{d-tg+t-s+2r+a,t(g-1)}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ alors que d'après (5.2.4) il n'est pas un constituant de $[E_2^{p,q}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ pour tout $q<t(g-1)$. Par ailleurs comme d'après (4.2.1), il n'est pas un constituant de l'aboutissement, on en déduit, d'après (5.2.5), qu'il existe $t'\geqslant t$ tel qu'il soit un constituant de

$$([\overleftarrow{\delta},\overrightarrow{t'-1-\delta}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overleftarrow{a'-1}]_{\pi_v}\overrightarrow{\times}[\overleftarrow{s-t'-1-r'-a'}]_{\pi_v})\overleftarrow{\times}[\overrightarrow{r'-1}]_{\pi_v}$$

avec $t'\geqslant t$, $\delta=\alpha-(t'-t)(g-1)$ et $r'=r-\delta$. En reprenant les notations de §1.2, les constituants de ces derniers sont de la forme $\Gamma^{s-1}=(\overrightarrow{a_1},\overleftarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\overleftarrow{a_4},\overrightarrow{a_5})$ avec $(a_1,a_2)=(r'-1,\delta+1)$ ou $(r',\delta)$

de sorte que si l'on veut qu'il contienne $[\overrightarrow{t+r-2}, \overleftarrow{a+1}, \overrightarrow{s-t-r-a-1}]_{\pi_v}$, il faut que $\delta = 0$ et $a_2 = 0$. On a alors $(a_1, a_2, a_3) = (r', 0, t'-1)$ ou $(r', 0, t')$ ; il faut alors $r' + t' - 1 \leqslant t + r - 1$ et donc $t' \leqslant t$ ce qui impose $t' = t$ et donc $\alpha = \delta + (t'-t)(g-1) = 0$ ce qui n'est pas par hypothèse, d'où le résultat. □

**5.3. Cas général : irréductibilité des variétés d'Igusa.** — L'étude du cas général où $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$ où $\pi_v \simeq [\overleftarrow{t_1-1}]_{\pi_{v,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u-1}]_{\pi_{v,u}}$ avec pour tout $i = 1, \cdots, u$, $\pi_{v,i}$ irréductible cuspidale de $GL_{g_i}(F_v)$ se ramène comme précédemment, cf. le lemme 1.5.5, au cas $u = 1$. Plutôt que de se lancer dans un énoncé particulièrement lourd à formuler nous allons prouver la proposition suivante dont une application est donnée au corollaire 5.3.3.

***5.3.1 Proposition***. — *Soit $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $1 \leqslant t \leqslant s = \lfloor d/g \rfloor$. Le groupe de cohomologie $H^{d-tg}(j_!^{\geqslant tg} HT_\xi(\pi_v, \Pi_t))$ vérifie les faits suivants :*

- *il est nul dès que $g > 1$ ;*
- *pour $g = 1$ et $\pi_v = \chi_v$, il est, en tant que $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$-module, isomorphe à $\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) \chi^\infty \otimes \chi_v \chi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1})$, où $\chi$ est un caractère de $\mathbb{A}^\times$ cohomologique pour $\xi$ de composante locale $\chi_v$ en $v$.*

*Démonstration*. — On raisonne comme dans les deux paragraphes précédents via l'étude de la suite spectrale

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(gr_{-i}^W(!, \pi_v', t)) \Rightarrow H^{i+j}(j_{\mathcal{I},!}^{\geqslant tg'} HT_\xi(\pi_v', \Pi_t)).$$

D'après la proposition 3.6.1, pour $\Pi$ une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$ telle que $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t_1-1}]_{\pi_{v,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u-1}]_{\pi_{v,u}}}$, pour tout $r > s-t$, $[E_1^{i,r-i}]\{\Pi^{\infty,v}\} = (0)$ pour tout $i$ de sorte que $[H^r(j_!^{\geqslant tg} HT_\xi(\pi_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul pour tout $r > s-t$. Ainsi en ce qui concerne $r = d - tg \geqslant g(s-t)$, pour que $[H^{d-tg}(j_!^{\geqslant tg} HT_\xi(\pi_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ soit non nul, il faut $g = 1$ et $s = d$, i.e. $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{d-1}]_{\chi_v}$ d'où le résultat. □

***5.3.2 Définition***. — Soit $\mathcal{D}_{v,h}^1$ le noyau de la norme réduite de $D_{v,h}^\times$. Pour tout $m \geqslant 0$, on note alors $\mathcal{D}_{v,h,m}^1 := \mathcal{D}_{v,h}^1/(1+\varpi^s)$ et soit $J_{U^p,m,s}^{h,1} := (J_{U^p,m}^h)^{\mathcal{D}_{v,h,m}^1}$.

***5.3.3 Corollaire***. — *Pour tout $1 \leqslant h < d$, les variétés d'Igusa de première espèce $I_{U^p,m}^h$, sont géométriquement connexes. Plus généralement $J_{U^p,m}^h \longrightarrow J_{U^p,m}^{h,1}$ est un $\mathcal{D}_{v,h,m}^1$-torseur géométriquement irréductible au dessus de toute composante géométriquement connexe et*

$$J_{U^p,m}^{h,1}(\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq I_{U^p,m}^h(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{D}_{v,h,m}/\mathcal{D}_{v,h,m}^1$$

*où l'action est induite par l'action du groupe de Galois $\mathcal{D}_{v,h,m}$ du revêtement $J_{U^p,m}^h \longrightarrow I_{U^p,\overline{m}}^h$.*

*Démonstration*. — Le résultat découle classiquement par dualité de Poincaré de la proposition précédente. □

## 6. Appendice : preuve cohomologique de la proposition 5.4.3 de [3]

Il s'agit ici de prouver la proposition 5.4.3 de [**3**] sans utiliser la propriété d'autodualité du modèle local mais à partir les calculs de groupes de cohomologie précédents, ceux qui n'utilisent pas la connaissance des faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$, ce qui est le cas des propositions (3.5.1), (4.2.1) et (5.2.1). On considère dans la suite une représentation irréductible automorphe $\Pi$ de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour 1 telle que $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$, pour $\pi_v$ une représentation irréductible cuspidale unitaire de $GL_g(F_v)$.

***6.0.4 Proposition***. — *Soient $g$ un diviseur de $d = sg$ et $\pi_v$ une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_v)$. Dans le groupe de Grothendieck de $GDW_v(d)$, si $\Pi_v \otimes \tau_v \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)(-\frac{s(g-1)+2k}{2})$ est un constituant non nul de l'image de $\mathcal{U}_{F_v,l,d}^i$, on a alors les propriétés suivantes :*

*(i)* $0 \leqslant k \leqslant s-1$ ;
*(ii) si* $k=0$ *alors on a* $i=d-s$ *avec* $\Pi_v = [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$ *et* $\tau_v = \pi_v[s]_D$.

*Démonstration.* — (i) On considère la suite spectrale des cycles évanescents

$$E_2^{p,q} = H^p(h^q \Psi_{\mathcal{I}}) \Rightarrow H^{p+q}(\Psi_{\mathcal{I}})$$

Chacun des termes initiaux est l'aboutissement d'une suite spectrale de stratification

$$E_1^{i,j;q} = H^{i+j}(\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=i}, h^q \Psi_{\mathcal{I}}) \Rightarrow H^{i+j}(h^q \Psi_{\mathcal{I}})$$

dont tous les termes $[E_1^{i,j;q}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ pour $i \neq d$ sont, d'après (5.2.1) de poids $1-s+2k$ avec $0 \leqslant k \leqslant s-1$. Le résultat découle alors du fait que d'après (4.2.1), les $[H^n(\Psi_{\mathcal{I}})]\{\Pi^{\infty,v}\}$ sont aussi de poids $1-s+2k$ avec $0 \leqslant k \leqslant s-1$.

(ii) D'après (5.2.1), on remarque qu'en ce qui concerne les parties de poids $1-s$ des $[E_2^{p,q}]\{\Pi^{\infty,v}\}$ de la suite spectrale des cycles évanescents, seuls les points supersinguliers contribuent. On se retrouve alors dans la situation de [**1**] et on procède de même. Précisément, de la suite spectrale de stratification du $W_v$-faisceau de Hecke $\Psi_{\mathcal{I}}^i$, on en déduit, d'après (5.2.1), que la partie de poids $1-s$ de $[H^n(\Psi_{\mathcal{I}})]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nulle pour $n>0$ et sinon, d'après (3.2.1), égale dans $\mathrm{Groth}(GL_d(F_v) \times W_v)$ à la partie de poids $1-s$ de $\mathcal{U}_{F_v,l,d}^{d-s}(\pi_v[s]_D)(\frac{d-1}{2})$ qui est donc, via la suite spectrale des cycles évanescents, égale à la partie de poids $1-s$ de $[H^n(\Psi_{\mathcal{I}})]\{\Pi^{\infty,v}\}$. Le résultat découle alors de (4.2.1). □

## Références


[1] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.

[2] P. Boyer. Faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Drinfeld et groupes de cohomologies du modèle de Deligne-Carayol. *Mémoires de la SMF*, 2009.

[3] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications. *Invent. Math.*, 2009.

[4] L. Fargues. Dualité de Poincaré et involution de Zelevinsky dans la cohomologie étale équivariante des espaces analytiques rigides. *http ://www.math.u-psud.fr/ fargues/Dualite.dvi*, 2006.

[5] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[6] Colette Moeglin and Jean-Loup Waldspurger. *Spectral decomposition and Eisenstein series. (Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'écriture.)*. Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 113. Basel : Birkhäuser Verlag. xxix, 341 p., 1994.

[7] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive $p$-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.



Boyer Pascal • *E-mail :* `boyer@math.jussieu.fr`, Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586, université Paris 6, 175 rue du Chevaleret Paris 13